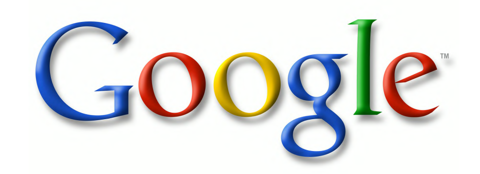


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



506 .S127 V.8 : NO.1 C.1
GeodLatische untersuch
Stanford University Libraries
3 6105 046 400 409

506
S127

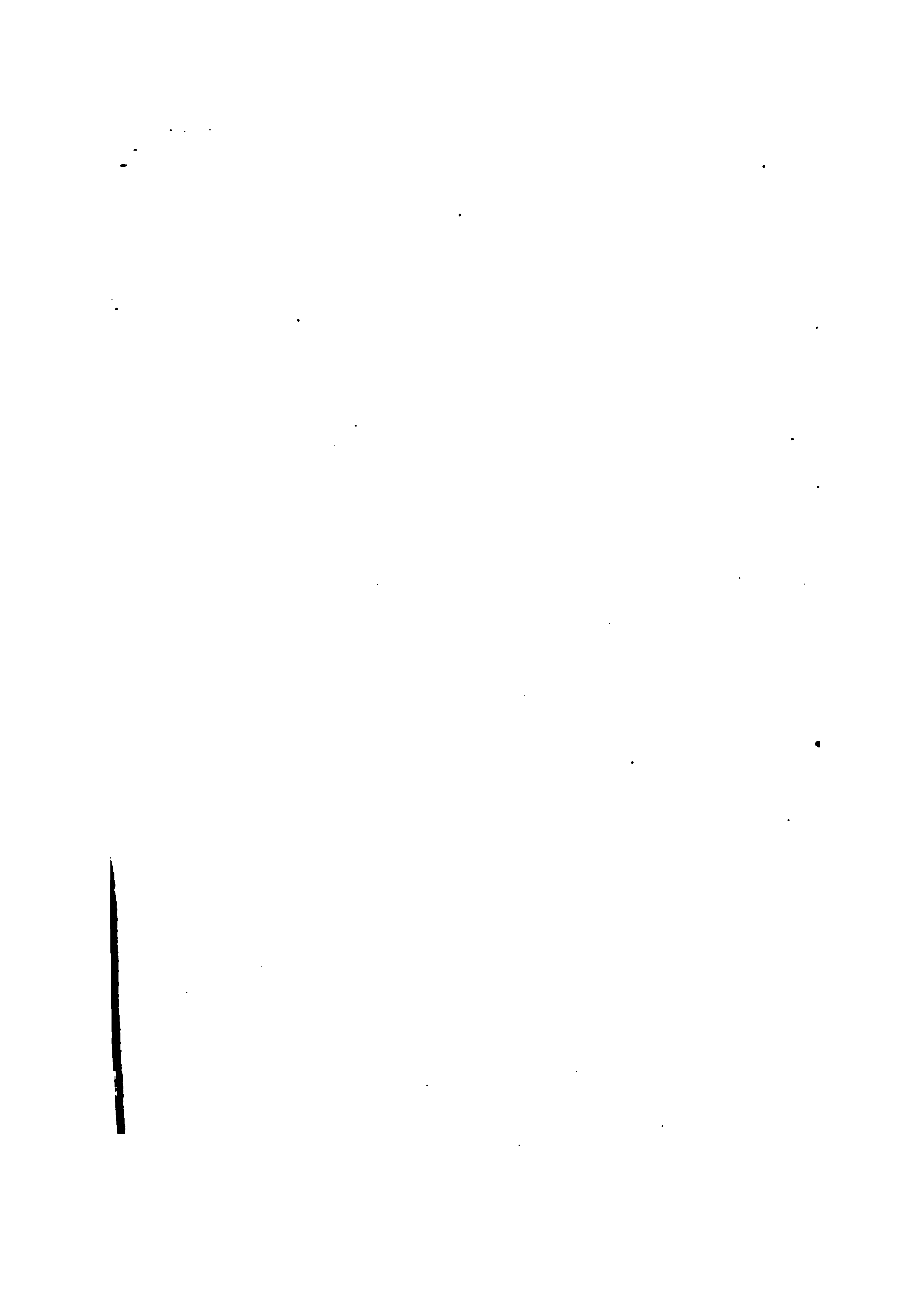




ABHANDLUNGEN

DREIZEHNTER BAND.

DRUCK VON BREITKOPF UND HÄRTEL IN LEIPZIG.



ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



DREIZEHNTER BAND.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1868.

INHALT.

Vom Verfasser übergeben den 15. März 1865.
Der Abdruck vollendet den 24. August 1865.

Inhaltsverzeichniss.

Dritter Abschnitt.

Vierter Abschnitt.

GEODÄTISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

P. A. HANSEN.

Da zu Anfang eines jeden der vier Abschnitte, in welche diese Abhandlung eingetheilt ist, der Inhalt derselben ausführlich dargelegt wird, so ist hier wenig darüber nachzuholen. Ich führe nur an, dass im ersten Abschnitte eine in neuerer Zeit mehrfach behandelte geodätische Aufgabe vorgenommen wird, deren hier ausgeführte Auflösung dennoch, wie ich glaube, mehreres Neue enthält. Die Aufgaben des zweiten und vierten Abschnittes sind meines Wissens nach, in der neueren Zeit, wenigstens in Deutschland, nicht behandelt worden, obgleich sie in älteren Schriften über Geodäsie und sphäroidische Trigonometrie vorkommen; die Auflösungen, die ich von diesen, an sich indirecten, Aufgaben gebe, machen sich dadurch bemerklich, dass sie schon in der ersten Annäherung so genaue Resultate geben, dass wohl nie die Durchführung einer zweiten Annäherung erforderlich sein wird, obgleich denselben die grösst mögliche Ausdehnung gegeben worden ist.

Im dritten Abschnitt wird die Reduction der sphäroidischen Dreiecke auf sphärische, und die der sphärischen auf ebene entwickelt. Es musste dieser Abschnitt dem vierten um deswillen vorangestellt werden, weil die Auflösung der Aufgabe des letzteren auf die im dritten Abschnitt abgeleiteten Sätze beruht.

Nicht nur die Hauptaufgaben, sondern auch die damit in Verbindung stehenden Nebenaufgaben sind berücksichtigt, und fast allen Beispiele hinzugefügt worden. In Bezug auf diese Beispiele führe ich an, dass Herr Dr. Auwers die Güte gehabt hat, die Berechnung derselben mit auszuführen.

Erster Abschnitt.

1.

Eine der in der praktischen Geodäsie häufig anwendbaren Aufgaben ist die: aus der gegebenen Lage des Anfangspunkts einer geodätischen Linie auf dem Erdellipsoid und der Länge derselben die Lage

des Endpunkts zu finden. Diese Aufgabe ist in neuerer Zeit von deutschen Astronomen und Mathematikern mehrfach behandelt worden. Gauss hat in seiner zweiten Abhandlung über die Geodäsie (Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie, Göttingen, 1847) zwei verschiedene Auflösungen derselben gegeben, und Jacobi hat kurz nach dem Erscheinen dieser Abhandlung seinerseits eine kurze Auflösung gegeben, zu welcher ich auf seinen Wunsch ein Beispiel gerechnet habe. Die Jacobi'sche Auflösung ist erst nach seinem Tode von Luther (A. N. No. 974) bekannt gemacht worden, und es ist diesem Astronomen auch gelungen aus Jacobi's nachgelassenen Papieren seine Ableitung aufzufinden, die er gleichfalls (A. N. No. 1006 u. 1007) veröffentlicht hat.

Die genannten Auflösungen, sowohl die von Gauss wie die von Jacobi sind nicht allgemein, sondern erstrecken sich nur auf die Fälle, in welchen die gegebene geodätische Linie nicht grösser ist, als dass man sie, gleichwie die Excentricität der Erdmeridiane, als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachten kann. Für die bisher ausgeführten Gradmessungen mochte man wohl mit dieser Beschränkung ausreichen können, allein für die beiden grossen, jetzt im Werke begriffenen Unternehmungen, für die mitteleuropäische Gradmessung und die Längengradmessung zwischen Orsk in Russland und Valentia in Irland reicht man mit der genannten beschränkenden Annahme in Betreff der Länge der geodätischen Linie nicht aus. Bessel hat (A. N. No. 86) von derselben Aufgabe eine Auflösung gegeben, in welcher die genannte Beschränkung nicht enthalten ist, allein ich habe demungeachtet nicht unterlassen wollen meiner Seits auch eine selbstständige Bearbeitung derselben vorzunehmen, da mir vorkam als möchte diese Auflösung noch etwas vereinfacht werden können.

Gauss und Bessel brauchen zur Anwendung ihrer Auflösungen mehr oder minder zusammengesetzte Tafeln, die ihren Abhandlungen auch beigegeben sind, während die Auflösung, die ich hier geben werde, gar keine Hülfstafeln erfordert, gleichwie auch bei der Jacobi'schen der Fall ist; man reicht mit einigen Constanten aus, die Functionen der Excentricität der Erdmeridiane sind, welche selbstverständlich als gegeben betrachtet werden muss, und stets einen bestimmten, nie einen unbestimmten, Einfluss auf das numerische Resultat in jedem speciellen Falle äussert.

Die Jacobi'sche Ableitung seiner Auflösung ist durch seine Theorie

der elliptischen Functionen mit vieler Eleganz durchgeführt, aber so zusammengesetzt, dass es Mühe kostet von seinen Entwickelungen sich eine vollständige und klare Einsicht zu verschaffen, und es daher wünschenswerth schien, eine einfachere Ableitung zu versuchen. Die hier gegebene Entwickelung geht von denselben Legendre'schen Formeln aus, die Jacobi zu Grunde gelegt hat, und es wird daraus ohne Zuziehung der Theorie der elliptischen Functionen auf einfache Weise die unbeschränkte Auflösung erhalten. Nachdem ich in diese, als besonderen Fall, die Beschränkung eingeführt hatte, dass die geodätische Linie so kurz sei, dass man sie als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachten könne, kam ich auf eine Auflösung die nahe mit der Jacobi'schen übereinstimmt, sich aber von dieser wesentlich dadurch unterscheidet, dass sie Eine Hülfsgrösse weniger erfordert, und einige kleine Glieder enthält, die zur Genauigkeit des Resultats beitragen, aber bei Jacobi nicht vorhanden sind. Es war hiefür aus der Theorie der elliptischen Functionen nur die Anwendung eines einzigen Satzes erforderlich, nemlich die Relation zwischen dem Modul einer elliptischen Function und der von Jacobi mit q bezeichneten Grösse, durch deren Einführung er so sehr stark convergirende Reihen erhalten hat. Diese Relation tritt hier auch ohne Bezug auf ihre Bedeutung in der Theorie der elliptischen Functionen ein, und erscheint nur als eine Substitution, durch welche bewirkt wird, dass in den Coefficienten mehrere Glieder der höheren Ordnungen verschwinden, und die Reihen überhaupt eine weit grössere Convergenz bekommen. Ich habe auch aus diesem Grunde, so wie um Multiplicationen und Divisionen mit denselben numerischen Coefficienten zu vermeiden, nicht q selbst, sondern statt dessen $4q$ unter der Bezeichnung μ eingeführt.

Die Legendre'schen Formeln, von welchen ich bei den Entwickelungen ausgehe, hätte ich unmittelbar aus seinen Abhandlungen, namentlich aus seinen »Exercices etc.« entnehmen können, allein ich habe vorgezogen eine Ableitung derselben voranzustellen, die von dem Grundsatz ausgeht, dass man die Gleichung irgend einer beliebigen Oberfläche durch zwei von einander unabhängige Veränderliche, statt der drei von einander abhängigen Coordinaten darstellen kann. Dieser schon längst bekannte Satz ist bekanntlich von Gauss am Meisten angewandt und ausgebildet worden.

2.

Die Gleichung irgend einer Oberfläche sei allgemein

$$f(x, y, z) = 0$$

wo unter x, y, z die rechtwinklichen Coordinaten irgend eines Punkts derselben verstanden werden. Da in Folge dieser Gleichung immer zwei Coordinaten von einander unabhängig sind, so kann man alle drei als Functionen von irgend zwei anderen, von einander unabhängigen Veränderlichen betrachten und darstellen, so dass

$$x = \varphi(p, q), \quad y = \psi(p, q), \quad z = \chi(p, q)$$

werden, wenn p und q die neuen Veränderlichen, und φ, ψ, χ nicht minder wie f Functionszeichen sind. Da die eben aufgestellten Functionen keiner anderen Bedingung unterliegen, als dass sie, statt x, y, z in die Gleichung der Oberfläche substituirt, diese identisch Null machen müssen, so können die Veränderlichen p und q auf mannigfache Weise angenommen, und bestimmt werden. Durch die Differentiation soll nun aus den vorstehenden drei Gleichungen hervorgegangen sein

$$\begin{aligned} dx &= \eta\, dp + \eta' dq \\ dy &= \theta\, dp + \theta' dq \\ dz &= \mu\, dp + \mu' dq \end{aligned}$$

wo die sechs Coefficienten $\eta, \theta, \mu, \eta', \theta', \mu'$ als Functionen von p und q betrachtet werden können.

3.

Das Differential irgend eines Bogens hat bekanntlich, wenn man es mit ds bezeichnet, zum Ausdruck

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Substituirt man hierin die eben aufgestellten Ausdrücke für dx, dy, dz, und setzt zur Abkürzung

$$\begin{aligned} E &= \eta^2 + \theta^2 + \mu^2 \\ F &= \eta\eta' + \theta\theta' + \mu\mu' \\ G &= \eta'^2 + \theta'^2 + \mu'^2 \end{aligned}$$

so ergiebt sich

$$(1) \quad \ldots \quad ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

welcher Ausdruck das Differential irgend einer beliebigen, auf der ge-

gebenen Oberfläche gezogenen, willkührlichen Linie durch die Differentiale der Unabhängigen p und q giebt.

Man kann diesen Ausdruck vereinfachen, ohne ihm die Allgemeinheit zu rauben. Man findet auf bekannte Weise, dass das Trinom

$$E^2dp^2 + 2EFdp\,dq + EG\,dq^2$$

sich in die beiden imaginären Factoren

$$Edp + Fdq \pm idq\sqrt{EG-F^2}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist, auflösen lässt. Setzt man daher

$$\left.\begin{aligned} dh &= \sqrt{E}\,.\,dp + \frac{F}{\sqrt{E}}\,dq \\ m &= \sqrt{\frac{EG-F^2}{E}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

so erhält man

$$ds^2 = dh^2 + m^2dq^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Man leistet dieser Gleichung durch die folgenden Gnüge

$$\begin{aligned} dh &= ds\cos\alpha \\ m\,dq &= ds\sin\alpha \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

woraus sich zu erkennen giebt, dass α der Winkel ist, den das Element ds der Linie s mit dem Element dh der Linie h auf der gegebenen Oberfläche macht. Die Elemente der Linien h und $\int m\,dq$ schneiden sich also unter rechten Winkeln, und ds ist die Hypotenuse eines elementaren rechtwinklichen Dreiecks, in welchem die Catheten dh und mdq sind. Der sich aus (1) ergebende Werth von ds hingegen kann als dritte Seite eines schiefwinklichen Dreiecks construirt werden, dessen beiden anderen Seiten $\sqrt{E}.dp$ und $\sqrt{G}.dq$ sind. Nennt man den von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkel ω, so wird

$$\cos\omega = -\frac{F}{\sqrt{EG}}$$

denn hiemit erhält man der ebenen Trigonometrie gemäss

$$ds^2 = (\sqrt{E}.dp)^2 - 2(\sqrt{E}.dp)(\sqrt{G}.dq)\cos\omega + (\sqrt{G}.dq)^2$$

Die Linearelemente $\sqrt{E}.dp$ und $\sqrt{G}.dq$ schneiden sich also nur dann unter einem rechten Winkel, wenn die Coefficienten $\eta, \theta, \mu, \eta', \theta', \mu'$ so beschaffen sind, dass daraus $F = 0$ folgt.

4.

Will man nun auf der gegebenen Oberfläche irgend eine der Linien $\int\sqrt{E}.dp$ oder h oder $\int\sqrt{G}.dq$ oder $\int m\,dq$ bestimmen, so kann dieses ohne Weiteres, und nur mit dem Vorbehalt der Ausführung der Integrationen geschehen, da für jede derselben das Differential der bezüglichen anderen gleich Null ist. Will man hingegen eine Linie bestimmen, die von den eben genannten verschieden ist, und einem gegebenen Gesetze folgen soll, so muss man entweder p und q oder bez. h und q in Function einer dritten Veränderlichen darstellen, oder die eine derselben bez. als Function der anderen ansehen.

5.

Um die kürzeste Linie zwischen irgend zwei Punkten auf der gegebenen Oberfläche zu bestimmen werde ich mich der Gleichung (3) bedienen, und h als Function von q betrachten. Es muss nun unter dieser Voraussetzung die Variation des Ausdrucks

$$s = \int\sqrt{dh^2 + m^2dq^2}$$

Null werden, und da

$$\delta s = \int\frac{dh\,d\delta h + m\left(\frac{dm}{dh}\right)dq^2\,\delta h}{ds}$$

$$= \frac{dh\,\delta h}{ds} + \int\delta h\left\{\frac{m\left(\frac{dm}{dh}\right)dq^2}{ds} - d.\frac{dh}{ds}\right\}$$

ist, so drückt die Gleichung

$$m\left(\frac{dm}{dh}\right)dq^2 = ds\,d.\frac{dh}{ds}$$

die Bedingung aus, dass s die kürzeste Linie zwischen irgend zwei Punkten auf der gegebenen Oberfläche ist. Diese Gleichung kann vereinfacht werden. Die erste (4) giebt

$$d.\frac{dh}{ds} = d.\cos\alpha = -\sin\alpha\,d\alpha$$

und durch die Substitution dieser und die Zuziehung der zweiten (4) ergiebt sich

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{dm}{dh}\right)dq = -\,d\alpha$$

als Bedingungsgleichung für die gesuchte kürzeste Linie. Ich bemerke

zum Ueberfluss hier, dass $\left(\frac{dm}{dh}\right)$ der partielle Differentialquotient von m in Bezug auf h ist. Die Relation zwischen α, dh, dq, die als Hülfsgleichung hier mit zugezogen werden muss, ist

$$\operatorname{tg}\alpha = m\frac{dq}{dh} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

und durch Hülfe dieser nebst deren Differential könnte man α und $d\alpha$ aus der (5) eliminiren, wodurch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen h und q entstehen würde. Für den hier zu erreichenden Zweck ist es jedoch einfacher die vorstehenden Gleichungen unverändert anzuwenden.

6.

Wenden wir nun die im Vorhergehenden abgeleiteten allgemeinen Gleichungen dazu an, um auf der als abgeplattetes Revolutionsellipsoid betrachteten Erdoberfläche die kürzeste Linie zwischen irgend zwei Punkten zu bestimmen. Dem allgemeinen Sprachgebrauch zufolge, werde ich mich für diese Linie des Ausdrucks »geodätische Linie« bedienen, welcher also hier mit »kürzester Linie« als synonym zu betrachten ist.

Legen wir die Achsen der x und y in den Aequator, in zwei beliebige, sich rechtwinklich schneidende Meridiane, und die der z in die Umdrehungsachse; bezeichnen wir ferner die Halbachsen des Ellipsoids mit a und b, unter der Voraussetzung dass $a > b$ sei, dann ist die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

und dieser Gleichung wird durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned} x &= a\cos\beta\cos l \\ y &= a\cos\beta\sin l \\ z &= b\sin\beta \end{aligned}$$

Gnüge geleistet, wo β die sogenannte reducirte Breite irgend eines Punkts, und l dessen geographische Länge, von irgend einem beliebigen Meridian an gezählt, bezeichnen. Differentiirt man diese Gleichungen, und identificirt β mit p und l mit q, so wird zufolge des Vorhergehenden

$$\begin{aligned} \eta &= -a\sin\beta\cos l\,; & \eta' &= -a\cos\beta\sin l \\ \theta &= -a\sin\beta\sin l\,; & \theta' &= a\cos\beta\cos l \\ \mu &= b\cos\beta\,; & \mu' &= 0 \end{aligned}$$

also

$$E = a^2 \sin{}^2\beta + b^2 \cos{}^2\beta$$
$$F = 0$$
$$G = a^2 \cos{}^2\beta$$

7

Es soll zuerst zu mehrerer Deutlichkeit das System von Linien, welches in der allgemeinen Ableitung mit h bezeichnet wurde, für sich betrachtet werden. Man erhält dieses wenn man in der Gleichung (3) $dq = 0$ macht, und es wird also hierauf $s = h$. Macht man nun in der Bedingungsgleichung (5) auch $dq = 0$, so wird $d\alpha = 0$, folglich $\alpha = \text{const.}$; die Gleichung (6) giebt ferner $\alpha = 0$. Die Bedingungsgleichung der kürzesten Linie ist also von selbst erfüllt, und alle Linien h sind kürzeste Linien. Für die Erdoberfläche giebt der vor. Art. in Verbindung mit der ersten (2)

$$(7) \quad . \quad . \quad . \qquad dh = -\, d\beta \sqrt{a^2 \sin{}^2\beta + b^2 \cos{}^2\beta}$$

wo ich das Minuszeichen gewählt habe, weil es angemessen ist die geodätischen Linien h im Pole anfangen zu lassen. Hiemit wird also

$$h = -\int d\beta \sqrt{a^2 \sin{}^2\beta + b^2 \cos{}^2\beta} + \text{const.}$$

und dieser Ausdruck zeigt, dass h ein Bogen irgend eines Meridians ist; die Meridiane sind also auf der Oberfläche der Erde geodätische Linien.

8.

Gehen wir zum allgemeinen Fall auf der Erdoberfläche über, so erhalten wir erst durch die zweite (2) in Verbindung mit den Ausdrücken des vorvor. Art.

$$m = a \cos\beta$$

woraus mit Zuziehung der (7)

$$\left(\frac{dm}{dh}\right) = \left(\frac{dm}{d\beta}\right)\left(\frac{d\beta}{dh}\right) = \frac{a \sin\beta}{\sqrt{a^2 \sin{}^2\beta + b^2 \cos{}^2\beta}}$$

folgt. Die Gleichungen (5) und (6) werden nun

$$\frac{a \sin\beta\, dl}{\sqrt{a^2 \sin{}^2\beta + b^2 \cos{}^2\beta}} = -\, d\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a \cos\beta}{\sqrt{a^2 \sin{}^2\beta + b^2 \cos{}^2\beta}} \frac{dl}{d\beta}$$

und eliminirt man hieraus dl, so erhält man

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta d\beta = d\alpha$$

deren Integral

$$\cos\beta \sin\alpha = \text{const.}$$

ist. Es ist an sich klar, dass jede geodätische Linie hinreichend verlängert wenigstens Ein Mal einen Meridian rechtwinklich schneiden muss, und nennt man die reducirte Breite des Punkts derselben, wo dieses statt findet, β_0, so wird das vorstehende Integral

$$\cos\beta \sin\alpha = \cos\beta_0 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Diese Gleichung ist die erste Grundgleichung der geodätischen Linie. Zufolge des Art. 3 ist α der Winkel den die allgemeine kürzeste Linie mit den Linien h macht, und zufolge des Art. 7 sind die Linien h auf dem Revolutionsellipsoid Meridianbögen, oder wenn man das dort gefundene Integral hinreichend ausdehnt, die ganzen Meridiane, der Winkel α ist folglich das Azimuth der geodätischen Linie in irgend einem unbestimmten Punkt derselben.

Die zweite Gleichung (4) wird jetzt

$$a\cos\beta dl = \sin\alpha ds$$

und eliminirt man hieraus α vermittelst der (8), so ergiebt sich

$$a\cos^2\beta dl = \cos\beta_0 ds \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

welches die zweite Grundgleichung der geodätischen Linie ist.

Die Elimination von dh aus der ersten (4) durch Hülfe der (7) giebt

$$ds\cos\alpha = -d\beta\sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}$$

und schafft man hieraus α durch Hülfe der (8) fort, so bekommt man

$$ds = -d\beta\cos\beta\frac{\sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}}{\sqrt{\sin^2\beta_0 - \sin^2\beta}} \quad \ldots \quad (10)$$

welches die dritte und letzte Grundgleichung der geodätischen Linie ist. Das Integral dieser Gleichung giebt die Länge der geodätischen Linie, die durch einen endlichen Ausdruck nicht erhalten werden kann, weshalb die Rectification derselben unmöglich ist. Eliminirt man ds aus (9) durch Zuziehung der (10), so bekommt man

$$dl = -d\beta\frac{\cos\beta_0}{\cos\beta}\,\frac{\sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}}{a\sqrt{\sin^2\beta_0 - \sin^2\beta}}$$

deren Integral die Gleichung der geodätischen Linie selbst ist.

9.

Der Ausdruck (10) kann vereinfacht werden. Führt man erst die Excentricität e der Erdmeridiane durch die Gleichung

$$a^2 - b^2 = a^2 e^2$$

ein, so wird er

$$ds = -\, a d\beta \cos\beta \frac{\sqrt{1 - e^2 + e^2 \sin^2\beta}}{\sqrt{\sin^2\beta_0 - \sin^2\beta}}$$

und führt man hierauf den Bogen φ statt β durch die folgende Relation ein,

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad \sin\beta = \sin\beta_0 \cos\varphi$$

so ergiebt sich

$$ds = a d\varphi \sqrt{1 - e^2 + e^2 \sin^2\beta_0 \cos^2\varphi}$$

Setzt man hierauf

$$(12) \quad \ldots \quad \operatorname{tg}\beta_0 = \sqrt{1 - e^2} \,.\, \operatorname{tg} B_0 \,,\; e \sin B_0 = k$$

wo also B_0 die Polhöhe des Punkts bezeichnet, in welchem die geodätische Linie den Meridian rechtwinklich schneidet, und erwägt dass hieraus

$$\sin^2\beta_0 = \frac{(1 - e^2)\sin^2 B_0}{1 - e^2 \sin^2 B_0}$$

folgt, so wird schliesslich

$$(13) \quad \ldots\ldots \quad ds = a \frac{\sin\beta_0}{\sin B_0} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Länge der geodätischen Linie durch ein elliptisches Integral zweiter Gattung bestimmt wird.

Eliminirt man vermittelst der (13) ds aus der (9), so bekommt man für die Differentialgleichung der geodätischen Linie selbst

$$(14) \quad \ldots \quad dl = \frac{\sin\beta_0 \cos\beta_0}{\sin B_0} d\varphi \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}{1 - \sin^2\beta_0 \cos^2\varphi}$$

Da der Nenner dieses Ausdrucks

$$1 - \sin^2\beta_0 \cos^2\varphi = \cos^2\beta_0 (1 + \operatorname{tg}^2\beta_0 \sin^2\varphi)$$

ist, so erkennt man, dass die Gleichung der geodätischen Linie ein elliptisches Integral dritter Gattung ist.

10.

Gehen wir nun zu der ersten Hauptaufgabe über: »Aus der gegebenen Länge einer geodätischen Linie und der Lage ihres Anfangs»punkts auf der Erdoberfläche die Lage ihres Endpunkts zu finden.«

Seien

s die Länge der geodätischen Linie
B' die Polhöhe ⎫
β' die reducirte Breite ⎬ des Anfangspunkts
α' das Azimuth ⎭

von s dessen geogr. Länge gleich Null gesetzt wird, ferner

B'' die Polhöhe ⎫
β'' die reducirte Breite ⎪
λ die geogr. Länge ⎬ des Endpunkts von s.
$180^0 + \alpha''$ das Azimuth ⎭

Da man die geographischen Längen von einem beliebigen Meridian an zählen kann, so ist durch B' oder β' und α' die Lage des Anfangspunkts von s vollständig gegeben, und die Bögen s, B', α' sind daher die gegebenen Stücke unserer Aufgabe; aus demselben Grunde sind die Bögen B'', λ, α'' die zu bestimmenden Grössen. Die Azimuthe sollen hier immer vom Südpunkt des Horizonts gezählt werden, und von da an in derselben Richtung, in welcher man die Längen wachsend annimmt, wachsen. Durch diese Bestimmung werden alle Längen positiv, und zwischen den Grenzen 0 und 180^0 eingeschlossen; dieselben Grenzen sind alsdann auch die von α' und α''.

Seien nun φ' und φ'' die Werthe des Bogens φ für den Anfangs- und den Endpunkt von s, dann geben die Gleichungen (13) und (14)

$$s = a\frac{\sin\beta_0}{\sin B_0}\int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

$$\lambda = \frac{\sin\beta_0\cos\beta_0}{\sin B_0}\int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi\,\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi}$$

Da die Lage des Anfangspunkts von s gegeben ist, so sind durch die Gleichungen (8) und (11) auch β_0 und φ' gegeben, und in der ersten der vorstehenden Gleichungen ist φ'' die einzige Unbekannte, die daher durch diese Gleichung zu bestimmen ist. Hierauf wird die rechte Seite der zweiten Gleichung völlig bekannt, und es kann durch dieselbe der Längenunterschied λ des Anfangs- und des Endpunkts von s bestimmt werden.

11.

Aus den Gleichungen (8) und (11) geht hervor, dass überhaupt $90^\circ - \beta_0$, $90^\circ - \beta$, α, φ vier Stücke eines rechtwinklichen, sphärischen Dreiecks sind, in welchem $90^\circ - \beta$ die Hypotenuse, $90^\circ - \beta_0$ und φ die Catheten, und α der der Seite $90^\circ - \beta_0$ gegenüber liegende Winkel sind. Um dieses Dreieck sogleich vollständig betrachten zu können soll auch der Winkel am Pole, oder der der Seite φ gegenüber liegende Winkel eingeführt, und allgemein mit Ω bezeichnet werden. Bezieht man dieses Dreieck auf den Anfangspunkt von s, und versieht wie oben die dahin gehörigen Bögen mit einem Strich, so ergeben sich zur Bestimmung von φ', Ω', β_0 die Gleichungen

$$(15) \quad \ldots \quad \begin{cases} \sin\beta_0 \sin\varphi' = \cos\beta' \cos\alpha' \\ \sin\beta_0 \cos\varphi' = \sin\beta' \\ \sin\beta_0 \sin\Omega' = \cos\alpha' \\ \sin\beta_0 \cos\Omega' = \sin\beta' \sin\alpha' \\ \cos\beta_0 = \cos\beta' \sin\alpha' \end{cases}$$

Ist hierauf auf die im vor. Art. angedeutete Art φ'' bestimmt, so giebt dasselbe Dreieck durch seine Anwendung auf den Endpunkt von s,

$$(16) \quad \ldots \quad \begin{cases} \cos\beta'' \sin\alpha'' = \cos\beta_0 \\ \cos\beta'' \cos\alpha'' = \sin\beta_0 \sin\varphi'' \\ \cos\beta'' \sin\Omega'' = \sin\varphi'' \\ \cos\beta'' \cos\Omega'' = \cos\beta_0 \cos\varphi'' \\ \sin\beta'' = \sin\beta_0 \cos\varphi'' \end{cases}$$

Durch die Anwendung dieser beiden Systeme von Gleichungen kann man immer die Unbekannten mit der ganzen Sicherheit, die die Umstände der Aufgabe gestatten, bestimmen, und ist über den Quadranten, in welchem die Bögen zu nehmen sind, nie in Ungewissheit.

Von B' zu β', und von β'' zu B'' geht man durch die allgemeine Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{1 - e^2}\,.\operatorname{tg} B$$

oder durch die Reihenentwickelungen derselben, die weiter unten angeführt werden sollen, über.

12.

Wenden wir uns nun zur Bestimmung von φ'', so ist die Gleichung (13) oder

$$\frac{\sin B_0}{a \sin \beta_0}\, ds = d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$

von φ' bis φ'' zu integriren. Zu diesem Zweck ergiebt sich zuerst

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = 1 - \tfrac{1}{2} k^2 \sin^2\varphi - \tfrac{1}{8} k^4 \sin^4\varphi - \tfrac{1}{16} k^6 \sin^6\varphi - \ldots$$

in welcher bei dem statt findenden Werthe von e für den Erdkörper die angesetzten Glieder völlig ausreichend sind. Durch die bekannten, allgemeinen Relationen

$$\sin^2\varphi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2\varphi$$

$$\sin^4\varphi = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2} \cos 2\varphi + \tfrac{1}{8} \cos 4\varphi$$

$$\sin^6\varphi = \tfrac{5}{16} - \tfrac{15}{32} \cos 2\varphi + \tfrac{3}{16} \cos 4\varphi - \tfrac{1}{32} \cos 6\varphi$$

erhält man hieraus

$$\begin{aligned}\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi} = {} & \left(1 - \tfrac{1}{4}k^2 - \tfrac{3}{64}k^4 - \tfrac{5}{256}k^6\right) + \left(\tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{1}{16}k^4 + \tfrac{15}{512}k^6\right) \cos 2\varphi \\ & - \left(\tfrac{1}{64}k^4 + \tfrac{3}{256}k^6\right) \cos 4\varphi + \tfrac{1}{512}k^6 \cos 6\varphi \mp \ldots\end{aligned}$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $d\varphi$, und integrirt innerhalb der angegebenen Grenzen, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\sin B_0}{a \sin \beta_0}\, s = {} & \left(1 - \tfrac{1}{4} k^2 - \tfrac{3}{64} k^4 - \tfrac{5}{256} k^6\right) (\varphi'' - \varphi') \\ & + \left(\tfrac{1}{8} k^2 + \tfrac{1}{32} k^4 + \tfrac{15}{1024} k^6\right) (\sin 2\varphi'' - \sin 2\varphi') \\ & - \left(\tfrac{1}{256} k^4 + \tfrac{3}{1024} k^6\right) (\sin 4\varphi'' - \sin 4\varphi') \\ & + \tfrac{1}{3072} k^6 (\sin 6\varphi'' - \sin 6\varphi')\end{aligned}$$

Aber aus den Gleichungen (12) folgt leicht, dass

$$\frac{\sin B_0}{\sin \beta_0} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-e^2}}$$

ist, substituirt man diesen Ausdruck und zieht die Glieder möglichst zusammen, so wird

$$\begin{aligned}\frac{s}{a\sqrt{1-e^2}} = {} & A(\varphi'' - \varphi') + B \cos(\varphi'' + \varphi') \sin(\varphi'' - \varphi') \qquad (17) \\ & - C \cos 2(\varphi'' + \varphi') \sin 2(\varphi'' - \varphi') \\ & + D \cos 3(\varphi'' + \varphi') \sin 3(\varphi'' - \varphi')\end{aligned}$$

wo

$$A = 1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{13}{64}k^4 + \frac{45}{256}k^6$$
$$B = \frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{16}k^4 + \frac{79}{512}k^6$$
$$C = \frac{1}{128}k^4 + \frac{5}{512}k^6$$
$$D = \frac{1}{1536}k^6$$

ist. In diesem Ausdruck muss s jedenfalls durch dieselbe Maasseinheit ausgedrückt werden wie der Halbmesser des Aequators a, in Bezug auf die Bögen φ'' und φ' ist es am Zweckmässigsten dieselben auf gewöhnliche Art in Secunden u. s. w. auszudrücken, und zur Erlangung der Homogeneität in der vorstehenden Gleichung müssen daher sowohl die linke Seite derselben, wie die Coefficienten B, C, D mit dem in Secunden ausgedrückten Kreisbogen multiplicirt werden, der dem Kreishalbmesser gleich ist.

13.

Es ist nun φ'' durch die Gleichung (17) zu bestimmen, und hiebei soll zuerst die Länge s der geodätischen Linie keiner Beschränkung unterworfen werden. Es ergiebt sich hiemit

$$\begin{aligned}\varphi'' = \varphi' + \frac{1}{A\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{s}{a} r & - B_1 \cos(\varphi''+\varphi') \sin(\varphi''-\varphi') \\ & + C_1 \cos 2(\varphi''+\varphi') \sin 2(\varphi''-\varphi') \\ & - D_1 \cos 3(\varphi''+\varphi') \sin 3(\varphi''-\varphi')\end{aligned}$$

wo

$$B_1 = r\frac{B}{A}, \quad C_1 = r\frac{C}{A}, \quad D_1 = r\frac{D}{A}$$

und r die Anzahl von Secunden bedeutet, die dem Kreishalbmesser gleich, also $r = 206264'',8\ldots$ ist. Die vorstehende Gleichung zeigt, dass die Summe der beiden ersten Glieder rechter Hand einen bis auf Grössen zweiter Ordnung in Bezug auf e genäherten Werth von φ'' bildet. Setzt man daher

$$\sigma = r\frac{s}{a}, \quad S = \frac{\sigma}{A\sqrt{1-e^2}}$$
$$\varphi'' = \varphi' + S - x$$

wo folglich σ die in Bogentheilen des Aequators ausgedrückte Länge der geodätischen Linie bezeichnet, dann ist x eine kleine Grösse zweiter Ordnung, und durch die Substitution erhält man

$$x = B_1 \cos(2\varphi'+S-x)\sin(S-x) - C_1 \cos(4\varphi'+2(S-x))\sin 2(S-x)$$
$$+ D_1 \cos(6\varphi'+3(S-x))\sin 3(S-x)$$

Diese Gleichung giebt bei den grössten Werthen von S, die vorkommen können, eine sehr schnell convergirende indirecte Auflösung, wenn man die Näherungen damit anfängt, dass man

$$x = B_1 \cos(2\varphi'+S)\sin S$$

in die rechte Seite substituirt.

14.

Es wird, ehe wir weiter gehen, nicht undienlich sein, diese starke Annäherung durch ein Beispiel nachzuweisen. Der Maximalwerth von k ist e, und diesen will ich im Beispiel annehmen, da es klar ist, dass für kleinere Werthe von k die Annäherung noch grösser werden muss. Es ist hiemit zugleich $B_0 = \beta_0 = 90^0$ angenommen, und folglich ist die geodätische Linie, die hier beispielsweise betrachtet werden soll, ein Theil irgend eines Meridians des Erdellipsoids. Setzt man nach Bessel

$$\log e = 8{,}9122052$$

so ergeben sich unter der Voraussetzung dass $k=e$ ist, die folgenden numerischen Werthe der Coefficienten

$$B_1 = 345'',3250$$
$$C_1 = 0.0722$$
$$D_1 = 0.00004$$

woraus hervorgeht, dass selbst wenn man die Genauigkeit bis auf Zehntausendtheile der Secunde treiben will, das dritte Glied des Ausdrucks für x immer völlig unmerklich ist. Dagegen sind die in B_1 und C_1 enthaltenen Glieder sechster Ordnung nicht ohne Belang. Setzt man ausserdem

$$\varphi' = 10^0\ ,\quad S = 40^0$$

so giebt die Näherungsformel für x zuerst $x = 1'51'',0$, und substituirt man diesen in die vollständige Gleichung, so bekommt man

$$x = +\ 1'51'',0175 + 0'',0355 = +\ 1'51'',0530$$

Hiemit sind die Annäherungen schon vollendet, da eine neue Substitution von x denselben Werth wieder geben würde.

Es wird daher schliesslich

$$\varphi'' = 49^0 58' 8'',9470$$

Man sieht hieraus wie schnell man durch den obigen Ausdruck von x zum genauen Werthe dieses Bogens gelangt.

15.

Der im vorvor. Art. erhaltene Ausdruck für x kann aber auch in einen directen umgewandelt werden, und das Resultat wird sehr einfach, wenn man die Glieder sechster Ordnung weglässt. Den Ausdruck für x ändert man leicht in den folgenden ab,

$$\begin{aligned} x = &- \tfrac{1}{2} B_1 \sin 2\varphi' + \tfrac{1}{4} C_1 \sin 4\varphi' \\ &+ \tfrac{1}{2} B_1 \sin 2(\varphi'+S) \cos 2x - \tfrac{1}{4} C_1 \sin 4(\varphi'+S) \cos 4x \\ &- \tfrac{1}{2} B_1 \cos 2(\varphi'+S) \sin 2x + \tfrac{1}{4} C_1 \cos 4(\varphi'+S) \sin 4x \end{aligned}$$

Substituirt man hierin für die Sinusse und Cosinusse der Vielfachen von x ihre Reihenentwickelungen, so ergiebt sich bis auf Grössen sechster Ordnung

$$\begin{aligned} x = &B_1 \cos(2\varphi'+S) \sin S - C_1 \cos(4\varphi'+2S) \sin 2S \\ &- xB_1 \cos 2(\varphi'+S) \end{aligned}$$

und nach der Elimination von x auf der rechten Seite, mit demselben Grade der Genauigkeit

$$\begin{aligned} x = &B_1 \cos(2\varphi'+S) \sin S - C_1 \cos(4\varphi'+2S) \sin 2S \\ &- \tfrac{1}{r} B_1^2 \cos 2(\varphi'+S) \cos(2\varphi'+S) \sin S \end{aligned} \tag{18}$$

Behandelt man das Beispiel des vor. Art. nach diesem Ausdruck, so findet man

$$x = +\,1'50'',9853 + 0''.0355 + 0''.0323 = +\,1'51'',0531$$

mit dem obigen Werthe bis auf 0",0001 übereinstimmend.

16.

In vielen zur Anwendung kommenden Fällen ist der Werth von σ so klein, dass er für eine kleine Grösse erster Ordnung gehalten werden kann, und es ist daher von Interesse diesen Fall besonders zu behandeln. Man kann hiebei von der Gleichung (18) ausgehen, die nun, da S eine kleine Grösse erster Ordnung wird, bis auf Grössen siebenter Ordnung richtig wird. Da man jetzt auch die Sinusse und Cosinusse der Vielfachen von S in ihre Reihen auflösen darf, so wird soweit es zur

Erlangung des Resultats bis auf Grössen siebenter Ordnung erforderlich ist,

$$\cos(2\varphi'+S)\sin S = S\cos 2\varphi' - S^2\sin 2\varphi' - \frac{2}{3}S^3\cos 2\varphi' + \frac{1}{3}S^4\sin 2\varphi'$$

$$\cos(4\varphi'+2S)\sin 2S = 2S\cos 4\varphi' - 4S^2\sin 4\varphi'$$

$$\cos(2\varphi'+2S)\cos(2\varphi'+S)\sin S = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S\cos 4\varphi' - \frac{3}{2}S^2\sin 4\varphi'$$

und für die Coefficienten bekommt man

$$B_1 = r\left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4\right), \quad C_1 = r\frac{1}{128}k^4, \quad \frac{1}{r}B_1^2 = r\frac{1}{16}k^4$$

Substituirt man diese Ausdrücke, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} x = S&\left\{-\frac{1}{32}k^4 + \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4\right)\cos 2\varphi' - \frac{3}{64}k^4\cos 4\varphi'\right\} \\ &- \varrho S^2\left\{\left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4\right)\sin 2\varphi' - \frac{1}{8}k^4\sin 4\varphi'\right\} \\ &- \frac{1}{6}\varrho^2 S^3 k^2\cos 2\varphi' + \frac{1}{12}\varrho^3 S^4 k^2\sin 2\varphi' \end{aligned}$$

wo $\varrho = \frac{1}{r}$ ist. Es ist angemessen hier statt S die Grösse

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{1-e^2}}$$

einzuführen, und da nun zufolge des Art. 13

$$S = \frac{\sigma'}{A}$$

oder nach der Reihenentwickelung

$$S = \sigma'\left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{9}{64}k^4\right)$$

wird, so kann x leicht in Function von σ' dargestellt werden. Setzt man $\varphi'' - \varphi' = \chi$, woraus $\chi = S - x$ folgt, dann giebt die Substitution der vorstehenden Ausdrücke von x und S

$$\begin{aligned} \chi = \sigma'&\left\{\left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{7}{64}k^4\right) - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16}k^4\right)\cos 2\varphi' + \frac{3}{64}k^4\cos 4\varphi'\right\} \\ &+ \varrho\sigma'^2\left\{\frac{1}{4}k^2\sin 2\varphi' - \frac{1}{8}k^4\sin 4\varphi'\right\} \\ &+ \varrho^2\sigma'^3\frac{1}{6}k^2\cos 2\varphi' - \varrho^3\sigma'^4\frac{1}{12}k^2\sin 2\varphi' \end{aligned}$$

bis auf Grössen siebenter Ordnung vollständig.

17.

Den eben gefundenen Ausdruck kann man durch die folgenden Substitutionen vereinfachen. Löst man zuerst die erste Zeile desselben ab, indem man

$$\psi = \sigma' \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{7}{64}k^4\right) - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{16}k^4\right) \cos 2\varphi' + \frac{3}{64}k^4 \cos 4\varphi' \right\}$$

setzt, und führt darauf in dem übrigen Theil ψ statt σ' ein, so bekommt man

$$\chi = \psi + \varrho\psi^2 \left\{ \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4\right) \sin 2\varphi' - \frac{1}{16}k^4 \sin 4\varphi' \right\}$$
$$+ \varrho^2\psi^3 \frac{1}{6}k^2 \cos 2\varphi' - \varrho^3\psi^4 \frac{1}{12}k^2 \sin 2\varphi'$$

sucht man ferner statt der Ausdrücke für ψ und χ selbst, die ihrer Logarithmen, so erhält man

$$\log.\text{nat}\,\psi = \log.\text{nat}\,\sigma' - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{5}{32}k^4\right) - \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4\right) \cos 2\varphi'$$
$$+ \frac{1}{32}k^4 \cos 4\varphi'$$

$$\log.\text{nat}\,\chi = \log.\text{nat}\,\psi + \varrho\psi \left\{ \left(\frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4\right) \sin 2\varphi' - \frac{1}{16}k^4 \sin 4\varphi' \right\}$$
$$+ \frac{1}{6}\varrho^2\psi^2k^2 \cos 2\varphi' - \frac{1}{12}\varrho^3\psi^3k^2 \sin 2\varphi'$$

Sei endlich

$$(19) \quad . \quad . \quad k^2 = 4\mu - 8\mu^2 + 11\mu^3 - 12\mu^4 \pm \ldots$$

dann werden die vorstehenden Ausdrücke

$$\log.\text{nat}\,\psi = \log.\text{nat}\,\sigma' - 2\mu \cos^2\varphi' - \mu^2 \sin^2 2\varphi'$$
$$\log.\text{nat}\,\chi = \log.\text{nat}\,\psi + \varrho\psi\mu \sin 2\varphi' + \frac{2}{3}\varrho^2\psi^2\mu \cos 2\varphi'$$
$$- \varrho\psi\mu^2 \sin 4\varphi' - \frac{1}{3}\varrho^3\psi^3\mu \sin 2\varphi'$$

auch bis auf Grössen siebenter Ordnung richtig.

Die Gleichung zwischen k und μ giebt durch die Umkehrung

$$\mu = \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{8}k^4 + \frac{21}{256}k^6 + \frac{31}{512}k^8 + \ldots$$

aber die Gleichungen (12) geben

$$\sin^2 B_0 = \frac{\sin^2\beta_0}{1 - e^2\cos^2\beta_0}\,, \quad e \sin B_0 = k$$

woraus

$$k^2 = \frac{\varepsilon \sin^2\beta_0}{1 + \varepsilon \sin^2\beta_0}$$

folgt, wenn

$$\varepsilon = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

gesetzt wird. Hiemit bekommt man

$$k^2 = \varepsilon \sin^2\beta_0 - \varepsilon^2 \sin^4\beta_0 + \varepsilon^3 \sin^6\beta_0 - \varepsilon^4 \sin^8\beta_0 \pm \dots$$
$$k^4 = \varepsilon^2 \sin^4\beta_0 - 2\varepsilon^3 \sin^6\beta_0 + 3\varepsilon^4 \sin^8\beta_0 \mp \dots$$
$$k^6 = \varepsilon^3 \sin^6\beta_0 - 3\varepsilon^4 \sin^8\beta_0 \pm \dots$$
$$k^8 = \varepsilon^4 \sin^8\beta_0 \mp \dots$$

Setzt man diese in die vorstehende Gleichung zwischen μ und k, so erhält man

$$\mu = \frac{1}{4}\varepsilon \sin^2\beta_0 - \frac{1}{8}\varepsilon^2 \sin^4\beta_0 + \frac{21}{256}\varepsilon^3 \sin^6\beta_0 - \frac{81}{512}\varepsilon^4 \sin^8\beta_0 \pm \dots$$

woraus, wenn man zum Logarithmus übergeht

$$\log.\operatorname{nat}\mu = \log.\operatorname{nat}\frac{\varepsilon}{4}\sin^2\beta_0 - \frac{1}{2}\varepsilon\sin^2\beta_0 + \frac{13}{64}\varepsilon^2\sin^4\beta_0 - \frac{23}{192}\varepsilon^3\sin^6\beta_0 \pm \dots$$

folgt. Vergleicht man diese Ausdrücke mit den Jacobi'schen, so findet man dass sie im Allgemeinen damit übereinstimmen. Die hier entwickelten Endformeln sind aber aus dem Grunde, dass im Ausdruck für μ die Polhöhe B_0 eliminirt ist, einfacher wie die Jacobi'schen, indem dadurch die Berechnung von B_0 ganz wegfällt, welches bei Jacobi nicht der Fall ist. Ausserdem ist zu bemerken, dass in dem Ausdruck für log. nat χ die beiden Glieder $-\varrho\psi\mu^2\sin 4\varphi' - \frac{1}{3}\varrho^3\psi^3\mu\sin 2\varphi'$ bei Jacobi nicht vorhanden sind, und daher sein Ausdruck für χ (von ihm φ genannt) nur bis auf Grössen sechster Ordnung richtig ist; die beiden genannten Glieder können indess zuweilen Merkliches geben.

18.

Für die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt der geodätischen Linie nehme ich die Gleichung (14) vor. Entwickelt man die in derselben vorkommende Wurzelgrösse, so findet man

$$dl = \frac{\sin\beta_0}{\sin B_0}\cdot\frac{\cos\beta_0\, d\varphi}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi}\left\{1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi - \frac{1}{8}k^4\sin^4\varphi - \frac{1}{16}k^6\sin^6\varphi - \dots\right\}$$

Es ist aber leicht zu zeigen dass

$$\frac{\sin^2\varphi}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\beta_0} - \frac{\operatorname{cotg}^2\beta_0}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi}$$
$$\frac{\sin^4\varphi}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi} = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\beta_0} - \frac{\operatorname{cotg}^2\beta_0}{\sin^2\beta_0} + \frac{\operatorname{cotg}^4\beta_0}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi}$$
$$\frac{\sin^6\varphi}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi} = \frac{\sin^4\varphi}{\sin^2\beta_0} - \frac{\operatorname{cotg}^2\beta_0}{\sin^2\beta_0}\sin^2\varphi + \frac{\operatorname{cotg}^4\beta_0}{\sin^2\beta_0} - \frac{\operatorname{cotg}^6\beta_0}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi}$$

u. s. w., deren Fortschreiten einfach und regelmässig ist. Ferner ist leicht zu bestätigen dass

$$\cos\beta_0 \int \frac{d\varphi}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi} = \text{arc. tg}\,\frac{\text{tg}\,\varphi}{\cos\beta_0} + \text{const.}$$

ist, und aus den vorstehenden Ausdrücken folgt daher dass

$$\cos\beta_0 \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi} = \frac{\cos\beta_0}{\sin^2\beta_0}\varphi - \text{cotg}^2\beta_0\, \text{arc. tg}\,\frac{\text{tg}\,\varphi}{\cos\beta_0}$$

$$\cos\beta_0 \int \frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi} = \cos\beta_0\,\frac{1-2\,\text{cotg}^2\beta_0}{2\sin^2\beta_0}\varphi$$

$$- \cos\beta_0\,\frac{\sin 2\varphi}{4\sin^2\beta_0} + \text{cotg}^4\beta_0\, \text{arc. tg}\,\frac{\text{tg}\,\varphi}{\cos\beta_0}$$

$$\cos\beta_0 \int \frac{\sin^6\varphi\, d\varphi}{1-\sin^2\beta_0\cos^2\varphi} = \cos\beta_0\,\frac{3-4\,\text{cotg}^2\beta_0+8\,\text{cotg}^4\beta_0}{8\sin^2\beta_0}\varphi$$

$$- \cos\beta_0\,\frac{1-\text{cotg}^2\beta_0}{4\sin^2\beta_0}\sin 2\varphi + \cos\beta_0\,\frac{\sin 4\varphi}{32\sin^2\beta_0} - \text{cotg}^6\beta_0\, \text{arc. tg}\,\frac{\text{tg}\,\varphi}{\cos\beta_0}$$

u. s. w., wo ich der Kürze wegen die Integrationsconstanten weggelassen habe. Substituirt man nun die vorstehenden Ausdrücke in das Integral des vorstehenden Ausdrucks für dl, und nimmt vorläufig keine Rücksicht auf die Grenzen desselben, so bekommt man für irgend einen unbestimmten Punkt der geodätischen Linie

$$l = \frac{\sin\beta_0}{\sin B_0}\Big\{\Big(1+\frac{1}{2}k^2\,\text{cotg}^2\beta_0 - \frac{1}{8}k^4\,\text{cotg}^4\beta_0 + \frac{1}{16}k^6\,\text{cotg}^6\beta_0 \mp \ldots\Big)\,\text{arc. tg}\,\frac{\text{tg}\,\varphi}{\cos\beta_0}$$

$$- \cos\beta_0\Big[\Big(\frac{k^2}{2\sin^2\beta_0} + k^4\,\frac{1-2\,\text{cotg}^2\beta_0}{16\sin^2\beta_0} + k^6\,\frac{3-4\,\text{cotg}^2\beta_0+8\,\text{cotg}^4\beta_0}{128\sin^2\beta_0}\Big)\varphi$$

$$- \Big(\frac{k^4}{32\sin^2\beta_0} + k^6\,\frac{1-\text{cotg}^2\beta_0}{64\sin^2\beta_0}\Big)\sin 2\varphi + \frac{k^6}{512\sin^2\beta_0}\sin 4\varphi\Big] \pm \ldots\Big\}$$

$$+ \text{const.}$$

Es ist zu bemerken, dass alle unendlichen Reihen dieses Ausdrucks immer stark convergiren, da für jeden Werth von β_0 das Verhältniss $\frac{k}{\sin\beta_0}$ sehr nahe $= e$ ist.

19.

Man erkennt auf den ersten Blick, dass die Reihe womit arc. tg $\frac{\text{tg}\,\varphi}{\cos\beta_0}$ in dem eben erhaltenen Ausdruck für l multiplicirt ist, die Entwickelung von $\sqrt{1+k^2\,\text{cotg}^2\beta_0}$ ist, und da

$$\sin B_0 = \frac{k}{e}\,, \quad \text{tg}\,\beta_0 = \sqrt{1-e^2}\,.\,\text{tg}\,B_0$$

ist, so wird

$$\text{tg}^2 B_0 = \frac{k^2}{e^2-k^2}\,, \quad \text{cotg}^2\beta_0 = \frac{e^2-k^2}{k^2(1-e^2)}$$

folglich

$$\sqrt{1+k^2\operatorname{cotg}^2\beta_0} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\sin B_0}{\sin\beta_0}$$

Der Ausdruck für l geht daher über in

$$\begin{aligned} l = \text{arc. tg}\, & \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\beta_0} \\ & - \cos\beta_0 \frac{\sin\beta_0}{\sin B_0}\left\{\left(\frac{k^2}{2\sin^2\beta_0} + k^4\frac{1-2\operatorname{cotg}^2\beta_0}{16\sin^2\beta_0} + k^6\frac{3-4\operatorname{cotg}^2\beta_0+8\operatorname{cotg}^4\beta_0}{128\sin^2\beta_0}\right)\varphi\right. \\ & \left. - \left(\frac{k^4}{32\sin^2\beta_0} + k^6\frac{1-\operatorname{cotg}^2\beta_0}{64\sin^2\beta_0}\right)\sin 2\varphi + \frac{k^6}{512\sin^2\beta_0}\sin 4\varphi\right\} \\ & + \text{const.} \end{aligned}$$

Wenden wir uns nun zu dem im Art. 11 betrachteten rechtwinklichen, sphärischen Dreieck, so geben die Gleichungen (15), wenn sie auf den unbestimmten Punkt der geodätischen Linie angewandt werden, welcher dem Bogen φ entspricht,

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\alpha}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\beta\cos\alpha}{\sin\beta}$$
$$\cos\beta_0 = \cos\beta\sin\alpha$$

und hieraus folgt

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\beta_0}$$

Setzt man daher $l = \Omega - \Delta\Omega$, so bekommt man

$$\begin{aligned} \Delta\Omega = \frac{1}{2}\cos\beta_0\frac{\sin\beta_0}{\sin B_0} & \left\{\left(\frac{k^2}{\sin^2\beta_0} + k^4\frac{1-2\operatorname{cotg}^2\beta_0}{8\sin^2\beta_0} + k^6\frac{3-4\operatorname{cotg}^2\beta_0+8\operatorname{cotg}^4\beta_0}{64\sin^2\beta_0}\right)\varphi\right. \\ & \left. - \left(\frac{k^4}{16\sin^2\beta_0} + k^6\frac{1-\operatorname{cotg}^2\beta_0}{32\sin^2\beta_0}\right)\sin 2\varphi + \frac{k^6}{256\sin^2\beta_0}\sin 4\varphi\right\} \\ & + \text{const.} \end{aligned}$$

Die in diesem Ausdruck vorkommenden Functionen lassen sich durch Zuziehung der im vorvor. Art. eingeführten, mit ε bezeichneten, Grösse auf einfache Weise ausdrücken. Man bekommt strenge

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{\sin^2\beta_0} &= \varepsilon(1-k^2) \\ k^2(1-2\operatorname{cotg}^2\beta_0) &= 3k^2 - 2\varepsilon(1-k^2) \\ k^4(3-4\operatorname{cotg}^2\beta_0+8\operatorname{cotg}^4\beta_0) &= 15k^4 - 20\varepsilon k^2(1-k^2) + 8\varepsilon^2(1-k^2)^2 \\ k^4(1-\operatorname{cotg}^2\beta_0) &= 2k^4 - \varepsilon k^2(1-k^2) \\ \frac{\sin\beta_0}{\sin B_0} &= \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}\,.\sqrt{1-k^2}} \end{aligned}$$

Substituirt man diese und bleibt bei den Gliedern sechster Ordnung stehen, so bekommt man

$$\Delta\Omega = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,\frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\cos\beta_0\left\{\left(1+\frac{3}{8}k^2-\frac{1}{4}\varepsilon+\frac{15}{64}k^4-\frac{1}{16}\varepsilon k^2+\frac{1}{8}\varepsilon^2\right)\varphi\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{16}k^2+\frac{1}{16}k^4-\frac{1}{32}\varepsilon k^2\right)\sin 2\varphi+\frac{k^4}{256}\sin 4\varphi\right\}$$
$$+\text{ const.}$$

die auch in die folgende umgewandelt werden kann

$$\Delta\Omega = \frac{1}{2}e^2\cos\beta_0\left\{\left(1-\frac{1}{8}k^2+\frac{1}{4}e^2-\frac{5}{64}k^4+\frac{1}{8}e^4\right)\varphi\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{16}k^2+\frac{1}{32}k^4\right)\sin 2\varphi+\frac{k^4}{256}\sin 4\varphi\right\}+\text{ const.}$$

und bis auf Grössen achter Ordnung richtig ist. Die Grössen sechster Ordnung, welche dieser Ausdruck enthält, sind fast immer ganz unmerklich, und nur hauptsächlich das Glied $\frac{1}{8}e^4$ im Coefficienten von φ wird zuweilen ein Weniges geben können, indem in den Fällen, in welchen $\cos\beta_0$ nicht klein wird, im Gegentheil k sehr klein wird. Man kann aus diesem Grunde die Grösse $\frac{\varphi}{64}k^2e^4\cos\beta_0$ als ganz unmerklich betrachten*), fügt man aber dem Coefficienten von φ innerhalb der Klammern das Glied $-\frac{1}{32}k^2e^2$ hinzu, so lässt er sich in die beiden Factoren $1-\frac{1}{8}k^2-\frac{5}{64}k^4$ und $1+\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{8}e^4$ zerlegen, und die Berechnung desselben wird einfacher. Da ferner auch das mit $\sin 4\varphi$ multiplicirte Glied immer unmerklich ist, so wird mit stets ausreichender Genauigkeit

$$\Delta\Omega = \frac{1}{2}e^2\cos\beta_0\left\{\left(1+\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{8}e^4\right)\left(1-\frac{1}{8}k^2-\frac{5}{64}k^4\right)\varphi\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{16}k^2+\frac{1}{32}k^4\right)\sin 2\varphi\right\}+\text{ const.}$$

Es ist hiebei noch zu bemerken, dass in vielen Fällen $\cos\beta_0$ sehr klein wird, und wenn dieses statt findet, ist der vorstehende Ausdruck eine Ordnung genauer wie ausserdem.

20.

Schreibt man nun für den Anfangs- und den Endpunkt der geodätischen Linie nicht nur wieder φ' und φ'' so wie Ω' und Ω'', sondern auch l' und l'', und setzt

---

*) Das Maximum von $\frac{1}{64}e^6\sin^2\beta_0\cos\beta_0$, in Theilen des Kreishalbmessers ausgedrückt, ist $= 0{,}0000000018$, und das Maximum des im Text genannten Gliedes wird daher erst $= 0'',0001$, wenn $\varphi = 15^0{,}5$, $= 0'',001$ wenn $\varphi = 155^0$ ist, u. s. w.

$$l'' - l' = \lambda \ ; \quad \Omega'' - \Omega' = \omega \ ; \quad \varDelta\Omega'' - \varDelta\Omega' = \varDelta\omega$$

dann ist wieder λ der Längenunterschied zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt der geodätischen Linie, und es wird ausserdem

$$\lambda = \omega - \varDelta\omega$$

$$\varDelta\omega = \frac{1}{2}e^2\cos\beta_0\left\{\left(1+\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{8}e^4\right)\left(1-\frac{1}{8}k^2-\frac{5}{64}k^4\right)\chi \right.$$
$$\left. - r\left(\frac{1}{8}k^2+\frac{1}{16}k^4\right)\cos(2\varphi'+\chi)\sin\chi\right\} . \quad (20)$$

wo wieder $\chi = \varphi'' - \varphi'$ ist. Dieser Ausdruck gilt für jeden beliebigen Werth von s.

21.

Nimmt man nun wieder an, dass die Länge der geodätischen Linie s eine kleine Grösse erster Ordnung ist, so lässt sich der eben gefundene Ausdruck für $\varDelta\omega$ noch mehr vereinfachen. Wegen der Factoren χ und $\sin\chi$ wird er eine Ordnung genauer, wie in dem Falle, wo die geodätische Linie beliebig lang ist, und es können daher jetzt die mit k^4 und e^4 multiplicirten Glieder weggelassen, und der Factor $1+\frac{1}{4}e^2$ zum allgemeinen Factor gemacht werden. Nimmt man indess hierin immer noch das Glied $\frac{1}{8}e^4$ auf, da es in der Anwendung so leicht zu berücksichtigen ist, so entsteht hieraus nicht der mindeste Nachtheil. Erwägt man nun, dass jetzt

$$\cos(2\varphi'+\chi) = \cos 2\varphi' - \chi\sin 2\varphi' \ , \quad \sin\chi = \chi$$

wird, und führt μ durch die Gleichung $k^2 = 4\mu \pm$ etc. ein, so bekommt man

$$\varDelta\omega = \left(\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{8}e^4+\frac{1}{16}e^6\right)\chi\cos\beta_0\left\{1-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\mu\cos 2\varphi'+\frac{1}{2r}\mu\chi\sin 2\varphi'\right\}$$

und wenn man hievon zum logarithmischen Ausdruck übergeht

$$\log.\text{nat}\,\varDelta\omega = \log.\text{nat}\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{8}e^4+\frac{1}{16}e^6\right)\chi\cos\beta_0$$
$$- \mu\cos^2\varphi' + \frac{\mu}{2r}\chi\sin 2\varphi' \ .$$

Dieser, bis auf Grössen siebenter Ordnung vollständige, Ausdruck ist bis auf das Glied $\frac{1}{16}e^6$ mit dem Jacobi'schen identisch.

22.

Ehe ich weiter gehe will ich die bis jetzt abgeleiteten Ausdrücke in der Reihenfolge, in welcher sie gebraucht werden, zusammen stellen, und die Logarithmen der constanten Factoren in der Annahme des im Art. 14 angeführten Werthes von e hinzufügen. Es sind nun zuerst die folgenden Formeln zu berechnen, in welchen B', α', s die ursprünglich gegebenen Grössen sind.

$$\operatorname{tg}\beta' = \sqrt{1-e^2}\,.\,\operatorname{tg}B'$$

wo

$$\log\sqrt{1-e^2} = 9.9985458202$$

ist. Ferner φ', β_0, Ω' aus den folgenden

$$(21)\quad . \;.\; . \quad \begin{cases} \sin\beta_0\sin\varphi' = \cos\beta'\cos\alpha' \\ \sin\beta_0\cos\varphi' = \sin\beta' \\ \sin\beta_0\sin\Omega' = \cos\alpha' \\ \sin\beta_0\cos\Omega' = \sin\beta'\sin\alpha' \\ \cos\beta_0 = \cos\beta'\sin\alpha' \end{cases}$$

oder, wenn man will, aus den folgenden

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\cos\alpha'}{\operatorname{tg}\beta'}\,;\quad \operatorname{tg}\beta_0 = \frac{\operatorname{tg}\beta'}{\cos\varphi'\sin\alpha'} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha'}{\sin\varphi'}$$

$$\operatorname{tg}\Omega' = \frac{\operatorname{cotg}\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\cos\beta_0}$$

Ferner ist zu berechnen

$$\log\mu = \log(b\sin^2\beta_0) - c\sin^2\beta_0 + c'\sin^4\beta_0 - c''\sin^6\beta_0$$

wo

$$\log b = 7.2252588 - 10\;;\quad \log c = 7.164073 - 10$$

$$\log c' = 4.6002 - 10\;;\quad \log c'' = 2.198 - 10$$

und unter dem Zeichen »log« hier gleichwie im Folgenden der Briggische, oder gemeine, Logarithmus verstanden wird.

23.

Es werden von hier an die zu berechnenden Grössen grösstentheils anders, je nachdem s beliebig gross, oder eine kleine Grösse erster Ordnung ist. In der Voraussetzung, dass s beliebig gross ist, ist zuerst nach den Ausdrücken der Art. 13 oder 15 zu verfahren, in welchen aber noch die Coefficienten auf die zur Anwendung geeigneteste Form hinzuführen sind.

Aus dem im Art. 12 gegebenen Ausdruck des Coefficienten A folgt

$$\frac{1}{A} = 1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{9}{64}k^4 - \frac{23}{256}k^6$$

oder wenn man μ durch die (19) einführt,

$$\frac{1}{A} = 1 - \mu - \frac{1}{4}\mu^2 + \frac{1}{2}\mu^3$$

Aus dem Art. 13 folgt nun

$$S = \sigma \frac{1-\mu-\frac{1}{4}\mu^2+\frac{1}{2}\mu^3}{\sqrt{1-e^2}}$$

oder

$$S = \sigma + \sigma K - \sigma K'$$

wenn

$$K = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2}}, \quad K' = \frac{\mu+\frac{1}{4}\mu^2-\frac{1}{2}\mu^3}{\sqrt{1-e^2}}$$

gesetzt wird. Es folgt hieraus

$$\log.\text{nat}\, K' = \log.\text{nat} \frac{\mu}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{1}{4}\mu - \frac{17}{32}\mu^2$$

und durch ähnliche Behandlung der Coefficienten B_1 und C_1 des Art. 13 ergiebt sich

$$\log.\text{nat}\, B_1 = \log.\text{nat}\, r\mu - \frac{5}{8}\mu^2$$

$$\log C_1 = \log \frac{r}{8}\mu^2$$

bis auf Grössen der achten Ordnung richtig, wenn man von dem Coefficienten D_1 absieht, von welchem im Art. 14 gezeigt worden ist, dass er durchaus nichts Merkliches geben kann.

Es ist nun zuerst

$$\sigma = \frac{r}{a}s$$

zu rechnen, und nimmt man an, dass s in Toisen gegeben ist, so wird

$$\log \frac{r}{a} = 8.7996015995$$

Wenn s in irgend einem anderen Maasse gegeben ist, oder wenn man einen anderen Werth von a anwenden will, so kann man diesen Werth des constanten Logarithmus demgemäss leicht abändern. Rechnet man nun ferner

$$\log K' = \log \alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu^2$$

wo

$$\log \alpha = 0.0014542$$
$$\log \beta = 9.03572 - 10$$
$$\log \gamma = 9.363 - 10$$

und setzt

$$\log K = 7{,}5255611$$

so wird

$$S = \sigma + \sigma K - \sigma K'$$

und rechnet man hierauf

$$\log B_1 = \log r\mu - \delta\mu^2$$
$$\log C_1 = \log r'\mu^2$$

wo

$$\log r = 5.3144251 \;;\; \log\delta = 9.43366-10$$
$$\log r' = 4.4113$$

so bekommt man x entweder durch

(22) $x = B_1 \cos(2\varphi'+S-x)\sin(S-x) - C_1\cos 2(2\varphi'+S-x)\sin 2(S-x)$

indem man mit dem Näherungswerthe

$$x = B_1\cos(2\varphi'+S)\sin S$$

anfängt, oder durch

(23) $$x = B_1\cos(2\varphi'+S)\sin S - C_1\cos 2(2\varphi'+S)\sin 2S - \frac{B_1^2}{r}\cos 2(\varphi'+S)\cos(2\varphi'+S)\sin S$$

die aber nur bis auf Grössen sechster Ordnung richtig ist. Hierauf wird

(24) . . . . . $\varphi'' = \varphi' + S - x$

Sei ferner

$$m = \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{8}e^4 + \tfrac{1}{16}e^6$$

$$E = 1 - \tfrac{1}{8}k^2 - \tfrac{5}{64}k^4 \;;\; E' = re^2\left(\tfrac{1}{16}k^2 + \tfrac{1}{32}k^4\right)$$

Behandelt man E und E' wie eben B' und C', so entsteht

$$\text{log. nat}\, E = -\tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{3}{8}\mu^2$$
$$\log E' = \log\tfrac{1}{4}re^2\mu$$

Wenn nun

$$\log E = -\varepsilon\mu - \zeta\mu^2$$
$$\log E' = \log\eta\mu$$

gesetzt wird wo

$$\log\varepsilon = 9.3367543-10 \;;\; \log\zeta = 9.2118-10$$
$$\log\eta = 2.53678$$

ist, so wird

(25) $\Delta\omega = mE(S-x)\cos\beta_0 - E'\cos\beta_0\cos(2\varphi'+S-x)\sin(S-x)$

wo ausserdem

$$\log m = 7.5241068 - 10$$

ist, und bemerkt werden kann, dass der Logarithmus des Factors $\cos(2\varphi' + S - x)\sin(S - x)$ schon in der Berechnung von x gebraucht wurde, und daher hier nicht besonders berechnet zu werden braucht.

24.

Wenn σ für eine kleine Grösse erster Ordnung gehalten werden darf, so fallen die im vor. Art. erklärten Rechnungen weg, und die folgenden treten an ihre Stelle. Nachdem $\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{1-e^2}}$ gerechnet worden ist, wo σ dieselbe Bedeutung hat wie vorher, rechne man

$$\log\psi = \log\sigma' - f\mu\cos^2\varphi' - g\mu^2\sin^2 2\varphi'$$

und hierauf

$$\log\chi = \log\psi + h\psi\mu\sin 2\varphi' + k\psi^2\mu\cos 2\varphi' - h\psi\mu^2\sin 4\varphi' - l\psi^3\mu\sin 2\varphi'$$

worauf

$$\varphi'' = \varphi' + \chi$$

wird. Die Constanten haben hier die folgenden Werthe

$$\log f = 9.93881 - 10\,, \quad \log g = 9.63778 - 10$$
$$\log h = 4.32335 - 10\,, \quad \log k = 8.8328 - 20$$
$$\log l = 3.2174 - 20$$

Hierauf ist

$$\log\Delta\omega = \log m\chi\cos\beta_0 - \tfrac{1}{2}f\mu\cos^2\varphi' + \tfrac{1}{2}h\psi\mu\sin 2\varphi' \qquad (26)$$

wo m denselben Werth hat wie im vor. Art., und bemerkt werden kann, dass die beiden letzten Glieder bis auf den Factor $\frac{1}{2}$ schon in den Ausdrücken für ψ und χ vorkommen, und daher nicht von Neuem berechnet zu werden brauchen.

25.

Sind nun die im Vorhergehenden beschriebenen Rechnungen ausgeführt, so giebt wieder das im Art. 11 erklärte rechtwinkliche Dreieck, welches schon oben gedient hat um β_0, φ', Ω' zu erhalten, durch seine Anwendung auf den Endpunkt der geodätischen Linie die Bögen

α'', Ω'', ", und zwar entweder durch Anwendung der folgenden Gleichungen

$$(27) \quad \ldots \quad \begin{cases} \cos\beta''\sin\alpha'' = \cos\beta_0 \\ \cos\beta''\cos\alpha'' = \sin\beta_0\sin\varphi'' \\ \cos\beta''\sin\Omega'' = \sin\varphi'' \\ \cos\beta''\cos\Omega'' = \cos\beta_0\cos\varphi'' \\ \sin\beta'' = \sin\beta_0\cos\varphi'' \end{cases}$$

oder, wenn man will, durch

$$\operatorname{tg}\alpha'' = \frac{\operatorname{cotg}\beta_0}{\sin\varphi''}\,,\quad \operatorname{tg}\beta'' = \frac{\cos\alpha''}{\operatorname{tg}\varphi''} = \operatorname{tg}\beta_0\cos\varphi''\sin\alpha''$$

$$\operatorname{tg}\Omega'' = \frac{\operatorname{tg}\varphi''}{\cos\beta_0}$$

Nennt man wieder den Unterschied der geographischen Längen des Anfangs- und des Endpunkts der geodätischen Linie λ, so wird nun zunächst

$$\lambda = \Omega'' - \Omega' - \Delta\omega$$

und die Polhöhe B'' kann man aus β'' durch die mehrmals angeführte endliche Gleichung berechnen. Man kann statt dieser auch ihre bekannte Reihenentwickelung gebrauchen, und selbst diese auch auf den Unterschied $B''-B'$ anwenden. Setzt man $e = \sin\psi$, so ist allgemein

$$\beta = B - r\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\psi\sin 2B + \tfrac{1}{2}r\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}\psi\sin 4B$$
$$- \tfrac{1}{3}r\operatorname{tg}^6\tfrac{1}{2}\psi\sin 6B \pm \ldots.$$

und diesem entgegengesetzt

$$B = \beta + r\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\psi\sin 2\beta + \tfrac{1}{2}r\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}\psi\sin 4\beta$$
$$+ \tfrac{1}{3}r\operatorname{tg}^6\tfrac{1}{2}\psi\sin 6\beta + \ldots$$

wo wieder $r = 206264'',8$ ist. Wendet man die letztere auf den genannten Unterschied an, so erhält man

$$B''-B' = \beta''-\beta' + 2r\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\psi\cos(\beta''+\beta')\sin(\beta''-\beta')$$
$$+ r\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}\psi\cos 2(\beta''+\beta')\sin 2(\beta''-\beta')$$
$$+ \tfrac{2}{3}r\operatorname{tg}^6\tfrac{1}{2}\psi\cos 3(\beta''+\beta')\sin 3(\beta''-\beta')$$
$$+ \text{etc.}$$

worauf

$$B'' = B' + (B''-B')$$

wird. Der oben angenommene Werth von e giebt

$$\psi = 4^0 41' 9'',983$$

und hieraus folgt

$$\log 2r\,\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2}\psi = 2.8392585\;; \qquad \log r\,\mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2}\psi = 2.5382285$$

$$\log r\,\mathrm{tg}^4 \tfrac{1}{2}\psi = 9.76203-10\;; \quad \log \tfrac{1}{2} r\,\mathrm{tg}^4 \tfrac{1}{2}\psi = 9.46100$$

$$\log \tfrac{2}{3} r\,\mathrm{tg}^6 \tfrac{1}{2}\psi = 6.810 \quad -10\;; \quad \log \tfrac{1}{3} r\,\mathrm{tg}^6 \tfrac{1}{2}\psi = 6.509$$

die man, wenn man will, beliebig fortsetzen kann.

Es lässt sich noch ein anderer Ausdruck für die Hinführung von β auf B geben, der in vielen Fällen Anwendung findet. Die obige Reihe für B giebt, wenn man die Glieder, die von der Ordnung e^6 sind, übergeht,

$$B - \beta = 2\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \sin\beta\cos\beta + 2\frac{(1-\sqrt{1-e^2})^2}{(1+\sqrt{1-e^2})^2} \sin\beta\cos\beta\,(2\cos^2\beta - 1)$$

Es ist aber

$$(1+\sqrt{1-e^2})^{-1} = \tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{4}e^2+\ldots)\;; \quad 1-\sqrt{1-e^2} = \tfrac{1}{2}e^2+\ldots$$

und der vorstehende Ausdruck lässt sich daher auch wie folgt schreiben,

$$B - \beta = (1-\sqrt{1-e^2})\sin\beta\cos\beta + \tfrac{1}{2}e^2(1-\sqrt{1-e^2})\sin\beta\cos^3\beta$$

welcher ebenfalls bis auf Grössen sechster Ordnung richtig ist. Hieraus ergiebt sich aber

$$\log.\mathrm{nat}\,(B-\beta) = \log.\mathrm{nat}\,(1-\sqrt{1-e^2})\sin\beta\cos\beta + \tfrac{1}{2}e^2\cos^2\beta$$

also, wenn man zu den Briggischen, oder gemeinen, Logarithmen übergeht,

$$\log(B-\beta) = \log(\eta\sin\beta\cos\beta) + \theta\cos^2\beta$$

wo

$$\eta = 1-\sqrt{1-e^2}\,, \quad \theta = \tfrac{1}{2}e^2 M$$

ist, wenn M den Modul der Briggischen Logarithmen bezeichnet. Richtet man die Coefficienten so ein, dass der aus diesem Ausdruck hervorgehende Werth von $B-\beta$ unmittelbar in Secunden erhalten wird, so erhält man

$$\log\eta = 2.8385319\;; \quad \log\theta = 7.1612 - 10$$

Auf ähnliche Art bekommt man für die entgegengesetzte Reduction

$$\log(B-\beta) = \log(\eta\sin B\cos B) + \theta\sin^2 B$$

wo die Constanten dieselben sind. Diese Reihen gewähren eine kürzere Rechnung wie die obigen, und geben in der Regel die Hunderttheile der Secunden genau.

26.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass das hier eingeschlagene Verfahren unter anderen Rechnungen auf die Auflösung zweier rechtwinklichen sphärischen Dreiecke führt, und wenn s gross ist, so scheint mir dieses das Kürzeste und Angemessenste zu sein. Das erste dieser beiden Dreiecke muss jeden Falls zur Erlangung der Werthe von β_0 und φ' berechnet werden, und da die Berechnung eines zweiten Dreiecks nicht vermieden werden kann, so ist es in den Fällen, wo keine weiteren Reductionen möglich sind, am Einfachsten das zweite rechtwinkliche Dreieck, welches sich darbietet, anzuwenden. Wenn nun, wie oben angenommen wurde, s gross ist, dann ist in der That keine weitere Reduction möglich, wenn aber s klein ist, dann ist der Unterschied zwischen den beiden rechtwinklichen Dreiecken auch klein, und in dem schiefwinklichen Dreieck, welches den Unterschied jener bildet, ist nicht nur eine Seite immer eine kleine Grösse, sondern der dieser gegenüber liegende Winkel ist im Allgemeinen auch klein. Hiedurch ist die Möglichkeit gegeben durch Reihenentwickelungen mit aller wünschenswerthen Genauigkeit auf kürzere Weise zum Ziele zu gelangen, und deshalb soll im Folgenden dieses schiefwinkliche Dreieck der Betrachtung unterzogen werden.

27.

Man findet leicht, dass das schiefwinkliche Dreieck, welches den Unterschied der bisher betrachteten beiden rechtwinklichen Dreiecke bildet, die

Seiten χ, $90^0-\beta'$, $90^0-\beta''$, und die
Winkel ω, α'', $180^0-\alpha'$

hat, wo wieder

$$\chi = \varphi'' - \varphi', \quad \omega = \Omega'' - \Omega'$$

ist. Wenn σ eine kleine Grösse erster Ordnung ist, so sind χ und im Allgemeinen auch ω solche Grössen.

Die auf dieses Dreieck angewandten Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie sind

$$\left.\begin{aligned}
\cos\beta''\sin\alpha'' &= \cos\beta'\sin\alpha' \\
\cos\beta''\cos\alpha'' &= \sin\beta'\sin\chi + \cos\beta'\cos\chi\cos\alpha' \\
\cos\beta''\sin\omega &= \sin\chi\,\sin\alpha' \\
\cos\beta''\cos\omega &= \cos\chi\,\cos\beta' + \sin\chi\,\sin\beta'\cos\alpha' \\
\sin\beta'' &= \cos\chi\,\sin\beta' - \sin\chi\,\cos\beta'\cos\alpha'
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Man zieht diese Gleichungen durch die Substitutionen

$$\left.\begin{aligned}
\cos\theta\sin\eta &= \sin\chi\cos\alpha' \\
\cos\theta\cos\eta &= \cos\chi \\
\cos\theta\sin\mu &= \cos\chi\sin\alpha' \\
\cos\theta\cos\mu &= \cos\alpha' \\
\sin\theta &= \sin\chi\,\sin\alpha'
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (29)$$

zusammen, und erhält dadurch

$$\left.\begin{aligned}
\cos\beta''\sin\omega &= \sin\theta \\
\cos\beta''\cos\omega &= \cos\theta\cos(\beta'-\eta) \\
\cos\beta''\sin(\alpha''-\mu) &= -\sin\theta\sin(\beta'-\eta) \\
\cos\beta''\cos(\alpha''-\mu) &= \cos(\beta'-\eta) \\
\sin\beta'' &= \cos\theta\sin(\beta'-\eta)
\end{aligned}\right\} \quad . \; (30)$$

Die Herleitung der ersten, zweiten und fünften dieser Gleichungen aus den Grundgleichungen ist so einfach, dass sie keiner Erläuterung bedarf, aber die der dritten und vierten ist etwas mehr zusammengesetzt, weshalb ich das Hauptsächlichste davon angeben werde.

Multiplicirt man die erste Grundgleichung mit $\cos\theta\sin\mu$, die zweite mit $\cos\theta\cos\mu$ und addirt, so bekommt man in Folge der (29)

$$\cos\theta\cos\beta''\cos(\alpha''-\mu) = \sin\beta'\cos\alpha'\sin\chi + \cos\beta'\cos\chi$$

Multiplicirt man ferner die erste Grundgleichung mit $\cos\theta\cos\mu$, die zweite mit $\cos\theta\sin\mu$ und subtrahirt, so wird auch in Folge der (29)

$$\begin{aligned}
\cos\theta\cos\beta''\sin(\alpha''-\mu) = {} & \cos\beta'\sin\chi\sin\alpha'\sin\chi\cos\alpha' \\
& - \sin\beta'\sin\chi\sin\alpha'\cos\chi
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich leicht durch nochmalige Anwendung der (29) die obige dritte und vierte Gleichung. Man kann die Gleichungen (29) und (30) auch dadurch erhalten, dass man vom Scheitel des Winkels α'' einen grössten Kreisbogen senkrecht auf die gegenüber liegende Seite fällt.

Auf diese Gleichungen soll jetzt eine Reihenentwickelung gegründet

werden, die um zwei Ordnungen weiter geht wie die Gaussische und auch sonst noch von dieser etwas verschieden ist.

28.

Um zu dieser Reihenentwickelung zu gelangen, nehme ich zuerst die Gleichungen

$$\sin\theta = \sin\chi \sin\alpha'$$
$$\operatorname{tg}\eta = \operatorname{tg}\chi \cos\alpha'$$

vor, die aus den (29) folgen. Setzt man hier für $\sin\theta$, $\sin\chi$, $\operatorname{tg}\eta$, $\operatorname{tg}\chi$ die ersten Glieder der bekannten Reihen, durch welche sie dargestellt werden, und ausserdem

$$\theta_0 = \chi \sin\alpha'$$
$$\eta_0 = \chi \cos\alpha'$$

woraus $\chi^2 = \theta_0^2 + \eta_0^2$ folgt, so bekommt man zuerst

$$\theta = \theta_0 - \tfrac{1}{6}\theta_0\chi^2 + \tfrac{1}{120}\theta_0\chi^4 + \tfrac{1}{6}\theta^3 - \tfrac{1}{120}\theta^5$$
$$\eta = \eta_0 + \tfrac{1}{3}\eta_0\chi^2 + \tfrac{2}{15}\eta_0\chi^4 - \tfrac{1}{3}\eta^3 - \tfrac{2}{15}\eta^5$$

Mit Anwendung der Gleichung $\chi^2 = \theta_0^2 + \eta_0^2$ folgt hieraus bis auf Grössen der fünften Ordnung

$$\theta = \theta_0 - \tfrac{1}{6}\theta_0\eta_0^2\ ,\quad \eta = \eta_0 + \tfrac{1}{3}\eta_0\theta_0^2$$

woraus

$$\theta^3 = \theta_0^3 - \tfrac{1}{2}\theta_0^3\eta_0^2\ ,\quad \eta^3 = \eta_0^3 + \eta_0^3\theta_0^2$$

sich ergiebt. Substituirt man diese, und eliminirt χ wieder durch die eben gegebene Gleichung, so erhält man leicht

$$\theta = \theta_0\left(1 - \tfrac{1}{6}\eta_0^2 + \tfrac{1}{120}\eta_0^4 - \tfrac{1}{45}\theta_0^2\eta_0^2\right)$$
$$\eta = \eta_0\left(1 + \tfrac{1}{3}\theta_0^2 + \tfrac{2}{15}\theta_0^4 - \tfrac{1}{15}\theta_0^2\eta_0^2\right)$$

welche bis auf Grössen siebenter Ordnung richtig sind. Die dritte und vierte der (29) zeigen, dass μ wenig von α' verschieden ist, setzt man daher

$$\mu = \alpha' - \tau$$

so geben diese Gleichungen

$$(31) \quad \ldots\ldots \quad \operatorname{tg}(\alpha' - \tau) = \operatorname{tg}\alpha' \cos\chi$$

und hieraus bekommt man leicht

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{(1 - \cos\chi)\sin\alpha'\cos\alpha'}{1 - (1 - \cos\chi)\sin^2\alpha'}$$

oder bis auf Grössen achter Ordnung

$$\tau = \left(\tfrac{1}{2}\chi^2 - \tfrac{1}{24}\chi^4 + \tfrac{1}{720}\chi^6\right)\sin\alpha'\cos\alpha'$$
$$+ \left(\tfrac{1}{4}\chi^4 - \tfrac{1}{24}\chi^6\right)\sin^3\alpha'\cos\alpha'$$
$$+ \tfrac{1}{8}\chi^6\sin^5\alpha'\cos\alpha' - \tfrac{1}{3}\tau^3$$

Diese Gleichung giebt bis auf Grössen vierter Ordnung

$$\tau = \tfrac{1}{2}\chi^2\sin\alpha'\cos\alpha'$$

und erhebt man diese in den Cubus, und eliminirt damit τ^3 aus der vorstehenden, so ergiebt sich mit demselben Grade der Genauigkeit,

$$\tau = \left(\tfrac{1}{2}\chi^2 - \tfrac{1}{24}\chi^4 + \tfrac{1}{720}\chi^6\right)\sin\alpha'\cos\alpha'$$
$$+ \left(\tfrac{1}{4}\chi^2 - \tfrac{1}{12}\chi^6\right)\sin^3\alpha'\cos\alpha' + \tfrac{1}{6}\chi^6\sin^5\alpha'\cos\alpha'$$

Die oben gefundenen Ausdrücke für θ und η geben aber leicht durch die Umkehrung

$$\chi\sin\alpha' = \theta\left(1 + \tfrac{1}{6}\eta^2 + \tfrac{7}{360}\eta^4 - \tfrac{2}{45}\eta^2\theta^2\right)$$
$$\chi\cos\alpha' = \eta\left(1 - \tfrac{1}{3}\theta^2 - \tfrac{1}{45}\theta^4 - \tfrac{2}{45}\eta^2\theta^2\right)$$

und hiedurch erhält man mit der hier erforderlichen Genauigkeit

$$\chi^2\sin\alpha'\cos\alpha' = \theta\eta\left(1 + \tfrac{1}{6}\eta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^2 + \tfrac{7}{360}\eta^4 - \tfrac{13}{90}\eta^2\theta^2 - \tfrac{1}{45}\theta^4\right)$$
$$\chi^4\sin^3\alpha'\cos\alpha' = \theta\eta\left(\theta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^4 + \tfrac{1}{2}\eta^2\theta^2\right)$$
$$\chi^6\sin^5\alpha'\cos\alpha' = \theta\eta.\theta^4$$

Da nun die Gleichung $\chi^2 = \eta_0^2 + \theta_0^2$

$$\chi^2 = \eta^2 + \theta^2 - \tfrac{1}{3}\eta^2\theta^2$$

giebt, so geben die vorstehenden Ausdrücke

$$\chi^4\sin\alpha'\cos\alpha' = \theta\eta\left(\eta^2 + \theta^2 + \tfrac{1}{6}\eta^4 - \tfrac{1}{2}\eta^2\theta^2 - \tfrac{1}{3}\theta^4\right)$$
$$\chi^6\sin\alpha'\cos\alpha' = \theta\eta\,(\eta^4 + 2\eta^2\theta^2 + \theta^4)$$
$$\chi^6\sin^3\alpha'\cos\alpha' = \theta\eta\,(\eta^2\theta^2 + \theta^4)$$

Eliminirt man hiemit χ aus dem Ausdruck für τ, so erhält man

$$\tau = \tfrac{1}{2}\theta\eta\left(1 + \tfrac{1}{12}\eta^2 + \tfrac{1}{12}\theta^2 + \tfrac{1}{120}\eta^4 - \tfrac{1}{72}\eta^2\theta^2 + \tfrac{1}{120}\theta^4\right)$$

bis auf Grössen achter Ordnung genau.

29.

Setzt man $\gamma = \mu - \alpha''$, so geben die Gleichungen (30)

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos(\beta'-\eta)}$$
$$\operatorname{tg}\gamma = \sin\theta\operatorname{tg}(\beta'-\eta)$$

deren Reihenentwickelung auf ähnliche Art, wie die von θ und η bewirkt werden kann. Sei

$$\omega_0 = \frac{\theta}{\cos(\beta'-\eta)}$$
$$\gamma_0 = \theta\operatorname{tg}(\beta'-\eta)$$

woraus $\theta^2 = \omega_0^2 - \gamma_0^2$ folgt, so bekommt man zuerst

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{3}\omega_0\theta^2 + \frac{2}{15}\omega_0\theta^4 - \frac{1}{3}\omega^3 - \frac{2}{15}\omega^5$$
$$\gamma = \gamma_0 - \frac{1}{6}\gamma_0\theta^2 + \frac{1}{120}\gamma_0\theta^4 - \frac{1}{3}\gamma^3 - \frac{2}{15}\gamma^5$$

Hieraus folgt

$$\omega^3 = \omega_0^3 + \omega_0^3\theta^2 - .\omega_0^5 \;;\quad \gamma^3 = \gamma_0^3 - \frac{1}{2}\gamma_0^3\theta^2 - \gamma_0^5$$

eliminirt man hiemit ω und γ, so wie mit $\theta^2 = \omega_0^2 - \gamma_0^2$ den Bogen θ auf den rechten Seiten dieser Gleichungen, so ergiebt sich

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{1}{3}\gamma_0^2 + \frac{2}{15}\gamma_0^4 + \frac{1}{15}\gamma_0^2\omega_0^2\right)$$
$$\gamma = \gamma_0\left(1 - \frac{1}{6}\gamma_0^2 - \frac{1}{6}\omega_0^2 + \frac{1}{24}\gamma_0^4 + \frac{8}{30}\gamma_0^2\omega_0^2 + \frac{1}{120}\omega_0^4\right)$$

die bis auf Grössen siebenter Ordnung richtig sind. Setzt man in dem Quotienten der letzten (30) durch die zweite

$$\beta'' = \beta' - \eta - v$$

so bekommt man

$$\operatorname{tg}(\beta' - \eta - v) = \operatorname{tg}(\beta' - \eta)\cos\omega$$

die der (31) völlig ähnlich ist, und daher eben so behandelt werden kann wie diese. Man bekommt also zuerst

$$v = \left(\frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{24}\omega^4 + \frac{1}{720}\omega^6\right)\sin(\beta'-\eta)\cos(\beta'-\eta)$$
$$+ \left(\frac{1}{4}\omega^4 - \frac{1}{12}\omega^6\right)\sin^3(\beta'-\eta)\cos(\beta'-\eta)$$
$$+ \frac{1}{6}\omega^6\sin^5(\beta'-\eta)\sin(\beta'-\eta)$$

Die obigen Gleichungen geben aber

$$\omega\sin(\beta'-\eta) = \gamma_0\frac{\omega}{\omega_0} \;;\quad \omega\cos(\beta'-\eta) = \theta\frac{\omega}{\omega_0}$$

und durch Umkehrungen erhält man aus den Ausdrücken für ω und γ

$$\gamma_0 = \gamma\left(1+\tfrac{1}{6}\gamma^2+\tfrac{1}{6}\omega^2+\tfrac{1}{24}\gamma^4+\tfrac{13}{180}\gamma^2\omega^2+\tfrac{7}{360}\omega^4\right)$$

$$\omega = \omega_0\left(1-\tfrac{1}{3}\gamma^2+\tfrac{1}{45}\gamma^4-\tfrac{2}{45}\gamma^2\omega^2\right)$$

und hiemit

$$\omega\sin(\beta'-\eta) = \gamma\left(1-\tfrac{1}{6}\gamma^2+\tfrac{1}{6}\omega^2+\tfrac{1}{120}\gamma^4-\tfrac{1}{36}\gamma^2\omega^2+\tfrac{7}{360}\omega^4\right)$$

$$\omega\cos(\beta'-\eta) = \theta\left(1-\tfrac{1}{3}\gamma^2+\tfrac{1}{45}\gamma^4-\tfrac{2}{45}\gamma^2\omega^2\right)$$

ferner

$$\omega^2\sin(\beta'-\eta)\cos(\beta'-\eta) = \theta\gamma\left(1-\tfrac{1}{2}\gamma^2+\tfrac{1}{6}\omega^2+\tfrac{31}{360}\gamma^4-\tfrac{23}{180}\gamma^2\omega^2+\tfrac{7}{360}\omega^4\right)$$

$$\omega^4\sin(\beta'-\eta)\cos(\beta'-\eta) = \theta\gamma\left(\omega^2-\tfrac{1}{2}\omega^2\gamma^2+\tfrac{1}{6}\omega^4\right)$$

$$\omega^6\sin(\beta'-\eta)\cos(\beta'-\eta) = \theta\gamma\,.\,\omega^4$$

$$\omega^4\sin^3(\beta'-\eta)\cos(\beta'-\eta) = \theta\gamma\left(\gamma^2-\tfrac{5}{6}\gamma^4+\tfrac{1}{2}\gamma^2\omega^2\right)$$

$$\omega^6\sin^3(\beta'-\eta)\cos(\beta'-\eta) = \theta\gamma\,.\,\gamma^2\omega^2$$

$$\omega^6\sin^5(\beta'-\eta)\cos(\beta'-\eta) = \theta\gamma\,.\,\gamma^4$$

Substituirt man diese in den obigen Ausdruck für v, so entsteht

$$v = \tfrac{1}{2}\theta\gamma\left(1+\tfrac{1}{12}\omega^2+\tfrac{1}{360}\gamma^4-\tfrac{1}{360}\gamma^2\omega^2+\tfrac{1}{120}\omega^4\right)$$

bis auf Grössen achter Ordnung vollständig. Hiemit sind alle Bögen entwickelt.

30.

Statt der im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke für die Bögen θ, η, τ, ω, γ, v selbst, ist es vortheilhafter die ihrer Logarithmen anzuwenden, die man aus jenen leicht erhalten kann, und die sich wie folgt stellen lassen,

$$\log.\text{nat}\,\theta = \log.\text{nat}\,\theta_0-\tfrac{1}{6}\eta_0^2-\tfrac{1}{180}\eta_0^4-\tfrac{1}{15}\eta_0^2\theta_0^2$$

$$\log.\text{nat}\,\eta = \log.\text{nat}\,\eta_0+\tfrac{1}{3}\theta_0^2+\tfrac{7}{90}\theta_0^4-\tfrac{1}{15}\eta_0^2\theta_0^2$$

$$\log.\text{nat}\,\tau = \log.\text{nat}\,\tfrac{1}{2}\theta\eta+\tfrac{1}{12}\eta^2+\tfrac{1}{12}\theta^2+\tfrac{7}{1440}\eta^4-\tfrac{1}{48}\eta^2\theta^2+\tfrac{7}{1440}\theta^4$$

$$\log.\text{nat}\,\omega = \log.\text{nat}\,\omega_0-\tfrac{1}{3}\gamma_0^2+\tfrac{7}{90}\gamma_0^4+\tfrac{1}{15}\gamma_0^2\omega_0^2$$

$$\log.\text{nat}\,\gamma = \log.\text{nat}\,\gamma_0-\tfrac{1}{6}\gamma_0^2-\tfrac{1}{6}\omega_0^2+\tfrac{1}{36}\gamma_0^4+\tfrac{11}{90}\gamma_0^2\omega_0^2-\tfrac{1}{180}\omega_0^4$$

$$\log.\text{nat}\,v = \log.\text{nat}\,\tfrac{1}{2}\theta\gamma+\tfrac{1}{12}\omega^2+\tfrac{1}{360}\gamma^4-\tfrac{1}{360}\gamma^2\omega^2+\tfrac{7}{1440}\omega^4$$

31.

Schreibt man nun die erhaltenen Ausdrücke in der Reihenfolge hin, in welcher sie zur Anwendung kommen, geht zu den Briggischen Logarithmen über, und richtet alle Ausdrücke so ein, dass die in denselben enthaltenen Bögen in Secunden ausgedrückt werden müssen, und wieder in Secunden ausgedrückt aus denselben hervorgehen, so ist das Ergebniss der hier ausgeführten Reihenentwickelungen in den folgenden, zu berechnenden, Ausdrücken enthalten, in welchen wieder unter der Bezeichnung log der Briggische Logarithmus zu verstehen ist.

$$\theta_0 = \chi \sin \alpha'$$
$$\eta_0 = \chi \cos \alpha'$$
$$\log \theta = \log \theta_0 - 2\mu\eta_0^2 - 8\mu'\eta_0^4 - 96\mu'\eta_0^2\theta_0^2$$
$$\log \eta = \log \eta_0 + 4\mu\theta_0^2 + 112\mu'\theta_0^4 - 96\mu'\eta_0^2\theta_0^2$$
$$\log \tau = \log \varrho'\theta\eta + \mu\eta^2 + \mu\theta^2 + 7\mu'\eta^4 - 30\mu'\eta^2\theta^2 + 7\mu'\theta^4$$
$$\omega_0 = \frac{\theta}{\cos(\beta'-\eta)}$$
$$\gamma_0 = \theta \operatorname{tg}(\beta'-\eta)$$
$$\log \omega = \log \omega_0 - 4\mu\gamma_0^2 + 112\mu'\gamma_0^4 + 96\mu'\gamma_0^2\omega_0^2$$
$$\log \gamma = \log \gamma_0 - 2\mu\gamma_0^2 - 2\mu\omega_0^2 - 8\mu'\omega_0^4 + 176\mu'\omega_0^2\gamma_0^2 + 40\mu'\gamma_0^4$$
$$\log v = \log \varrho'\theta\gamma + \mu\omega^2 + 4\mu'\gamma^4 - 4\mu'\omega^2\gamma^2 + 7\mu'\omega^4$$
$$\beta'' = \beta' - \eta - v$$
$$\alpha'' = \alpha' - \gamma - \tau$$
$$\lambda = \omega - \varDelta\omega$$

Ausserdem ist hier, wenn M den Modul der Briggischen Logarithmen bezeichnet,

$$\varrho' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{206264'',8}$$
$$\mu = \frac{1}{8}\varrho'^2 M$$
$$\mu' = \frac{1}{90}\varrho'^4 M$$

gesetzt worden. Die Zahlenwerthe dieser Constanten sind:

$$\log \varrho' = 4.3845449 - 10$$
$$\log \mu = 7.9297528 - 20$$
$$\log 4\mu = 8.5318128 - 20$$
$$\log \mu' = 5.22172 \quad - 30$$
$$\log 4\mu' = 5.82378 \quad - 30$$

$$\log 7\mu' = 6.0668 \quad -30$$
$$\log 8\mu' = 6.1248 \quad -30$$
$$\log 30\mu' = 6.6988 \quad -30$$
$$\log 96\mu' = 7.2040 \quad -30$$
$$\log 112\mu' = 7.2709 \quad -30$$
$$\log 176\mu' = 7.4672 \quad -30$$

Lässt man in den vorstehenden Ausdrücken die Glieder der höchsten Ordnungen weg, so gehen sie in die folgenden einfacheren über,

$$\log \theta = \log \theta_0 - 2\mu\eta_0^2$$
$$\log \eta = \log \eta_0 + 4\mu\theta_0^2$$
$$\log \tau = \log \varrho'\theta\eta + \mu\eta^2 + \mu\theta^2$$
$$\log \omega = \log \omega_0 - 4\mu\gamma_0^2$$
$$\log \gamma = \log \gamma_0 - 2\mu\gamma_0^2 - 2\mu\omega_0^2$$
$$\log v = \log \varrho'\theta\gamma + \mu\omega^2$$

von welchen die für θ, η, ω, γ bis auf Grössen der fünften, und die für τ und v bis auf Grössen der sechsten Ordnung genau sind.

Wenn irgend eine oder mehrere der Grössen θ_0, η_0, ω_0, γ_0 negativ werden, so werden diese Ausdrücke sowohl wie die vorhergehenden, vollständigeren dadurch nicht im Geringsten geändert, nur werden die betreffenden Unbekannten θ, η, etc. auch negativ.

Ich bemerke hiezu noch, dass bei der Anwendung dieses Dreiecks, oder der obigen daraus folgenden Reihenentwickelungen, die Berechnung der Bögen Ω' und Ω'', die in den Artt. 22 und 25 verlangt wurde, überflüssig wird.

32.

In Bezug auf die oben entwickelte genäherte Auflösung des schiefwinklichen, sphärischen Dreiecks ist noch Folgendes zu bemerken. Wenn alle im vor. Art. angesetzte Glieder merklich werden, so erfordert die genäherte Auflösung das Aufschlagen und Niederschreiben von einer grösseren Anzahl von Zahlen, wie die strenge Auflösung, aber die Rechnung ist bequemer, namentlich in dem Falle, wo man die Genauigkeit so weit treiben will, wie die Anwendung von Logarithmen von zehn Stellen es erlaubt, und auch schon bei Anwendung von siebenstelligen

Logarithmen möchte ich sie der strengen Auflösung vorziehen. Sie giebt in den Fällen, in welchen sie überhaupt anwendbar ist, bei Anwendung von gleichziffrichen Logarithmen die letzte Decimale der Secunde genauer wie jene. Ueber die Grenze ihrer Anwendbarkeit lässt sich nur so viel sagen dass sie, wenn man die Hunderttheile von Secunden richtig haben will, nicht mehr angewandt werden darf, wenn die Bögen θ, η, ω, γ die Grösse von 10^0 wesentlich übersteigen, indem alsdann die höheren, nicht hinzugezogenen Glieder merklich werden können. Will man im Resultat eine grössere Anzahl von Decimalen richtig erhalten, so darf man selbstverständlich nicht bis zu der eben genannten Grenze gehen. Ich will hier das folgende Beispiel zur Erläuterung einschalten. Sei

$$\chi = 10^0, \quad \beta' = 40^0, \quad \alpha' = 140^0$$

dann giebt die durch die Gleichungen (29) und (30) ausgeführte, strenge Auflösung

$$\eta = -7^0\,41'\,33'',47\,; \qquad \omega = 9^0\,28'\,24'',96$$
$$\mu = 140\;\;25\;\;52,72\,; \qquad \alpha'' = 133\;\;26\;\;22,93$$
$$\beta'' = 47\;\;18\;\;\;2,60$$

und die genäherte

$$\begin{aligned} \log\theta_0 &= 4.3643700 \\ &- 0.0012939 \\ &- 0.0000008 \\ &- 0.0000065 \\ \log\theta &= 4.3630688 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log\eta_0 &= 4.4405565n \\ &+ 0.0018220 \\ &+ 0.0000054 \\ &- 0.0000065 \\ \log\eta &= 4.4423774n \end{aligned}$$

(Den Bogen θ braucht man nicht.)

$$\eta = -7^0\,41'\,33'',47$$
$$\beta'-\eta = 47\;\;41\;\;33,47$$

$$\begin{aligned} \log\varrho'\theta\eta &= 3.1899911n \\ &+ 0.0006524 \\ &+ 0.0004528 \\ &+ 0.0000007 \\ &- 0.0000020 \\ &+ 0.0000003 \\ \log\tau &= 3.1910953n \\ \tau &= -\,0^0\,25'\,52'',73 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log\omega_0 &= 4.5349843 \\ &- 0.0021863 \\ &+ 0.0000077 \\ &+ 0.0000121 \\ \log\omega &= 4.5328178 \\ \omega &= 9^0\,28'\,24'',98 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log \gamma_0 &= 4.4039486 \\ &- 0.0010932 \\ &- 0.0019987 \\ &+ 0.0000028 \\ &+ 0.0000221 \\ &- 0.0000018 \\ \hline \log \gamma &= 4.4008798 \\ \gamma &= 6^0\, 59'\, 29'',80\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\log \varrho'\theta\gamma &= 3.1484933 \\ &+ 0.0009894 \\ &+ 0.0000016 \\ &- 0.0000005 \\ &+ 0.0000003 \\ \hline \log v &= 3.1494841 \\ v &= 0^0\, 23'\, 30'',86\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha'' &= 133^0\, 26'\, 22'',93 \\ \beta'' &= 47\;\; 18\;\;\; 2,61\end{aligned}$$

mit dem Ergebniss der strengen Auflösung übereinstimmend. Hier hätte ich in der Berechnung der Bögen τ und v die Glieder sechster Ordnung weglassen können, da man leicht erkennt, dass sie auf das Resultat ohne Einfluss sind.

Bei gleichen Werthen von χ ist in Bezug auf die Anwendbarkeit der genäherten Auflösung, namentlich zur Bestimmung von ω, die Lage der geodätischen Linie auf der Erdoberfläche in Betracht zu ziehen, da bei gleichen sonstigen Umständen der Bogen ω desto grösser wird, je näher die geodätische Linie einem der Pole liegt. Um die Wirkung hievon anschaulich zu machen, will ich im obigen Beispiel $\beta' = 60^0$ setzen, während die beiden anderen Data unverändert gelassen werden sollen. Hierauf behalten η, θ, μ ihre vorigen Werthe, und für die anderen Bögen giebt die strenge Auflösung

$$\begin{aligned}\omega &= 16^0\, 29'\;\; 2'',80 \\ \alpha'' &= 125\;\; 12\;\; 43,31 \\ \beta'' &= 66\;\; 50\;\;\; 8,02\end{aligned}$$

während die genäherte

$$\begin{aligned}\omega &= 16^0\, 29'\;\; 5'',05 \\ \alpha'' &= 125\;\; 12\;\; 43,33 \\ \beta'' &= 66\;\; 50\;\;\; 8,01\end{aligned}$$

giebt. Die letztere reicht also hier zur Bestimmung von ω nicht aus, während sie immer noch alle übrigen Bögen genau giebt.

Die abgekürzten Formeln des vor. Art. gewähren eine sehr einfache und bequeme Rechnung, aber es versteht sich von selbst, dass ihre Anwendung weit mehr beschränkt ist, wie die der vollständigeren. Man darf sie, wenn die obige Genauigkeit erreicht werden soll, bei

Bögen, die 2^0 merklich übersteigen, nicht mehr anwenden, und die Grenze ihrer Anwendbarkeit wird noch kleiner, wenn man eine grössere Genauigkeit in die Resultate legen will.

33.

Es sind noch mehrere Nebenaufgaben zu erörtern, die sich als specielle Fälle der eben gelösten Hauptaufgabe darstellen. Zuerst nehme ich an, dass bei beliebigem s das Azimuth α' klein sei. Es kann zwar in diesem Falle die obige Auflösung der Hauptaufgabe für einen beliebigen Werth von s wieder unverändert angewandt werden, es giebt aber derselbe Anlass zu besonderen Reihenentwickelungen, die hier abgeleitet werden sollen. Statt der Gleichungen (21) des Art. 22 kann eine Reihenentwickelung derselben angewandt werden. Setzt man

$$(32) \quad \varphi' = 90^0 - \beta' - \pi' \; ; \quad \Omega' = 90^0 - \varepsilon' \; ; \quad \beta_0 = 90^0 - \zeta$$

so geben sie

$$\operatorname{tg}(\beta' + \pi') = \frac{\operatorname{tg}\beta'}{\cos\alpha'}$$
$$\operatorname{tg}\varepsilon' = \sin\beta' \operatorname{tg}\alpha'$$
$$\sin\zeta = \cos\beta' \sin\alpha'$$

und diese werden mit den im Art. 28 entwickelten Gleichungen identisch, wenn man in den letzteren

$$\begin{array}{ccccc} \theta, & \eta, & \chi, & \alpha', & \tau \text{ bez. in} \\ \zeta, & \varepsilon', & \alpha', & 90^0 - \beta', & \pi' \end{array}$$

verwandelt. Die Ausdrücke des Art. 31 geben daher sogleich

$$(33) \quad \begin{cases} \varepsilon_0' = \alpha' \sin\beta' \\ \zeta_0 = \alpha' \cos\beta' \\ \log\varepsilon' = \log\varepsilon_0' + 4\mu\zeta_0^2 + 112\mu'\zeta_0^4 - 96\mu'\varepsilon_0'^2\zeta_0^2 \\ \log\zeta = \log\zeta_0 - 2\mu\varepsilon_0'^2 - 8\mu'\varepsilon_0'^4 - 96\mu'\varepsilon_0'^2\zeta_0^2 \\ \log\pi' = \log\varrho'\zeta\varepsilon' + \mu\varepsilon'^2 + \mu\zeta^2 + 7\mu'\varepsilon'^4 - 30\mu'\varepsilon'^2\zeta^2 + 7\mu'\zeta^4 \end{cases}$$

wo ϱ', μ, μ' dieselben sind wie im Art. 31. Die (32) geben hierauf φ', Ω', β_0, die aber nicht besonders berechnet zu werden brauchen. Denn man erhält sogleich

$$(34) \quad . \quad \log\mu = \log(b\cos^2\zeta) - c\cos^2\zeta + c'\cos^4\zeta - c''\cos^6\zeta$$

wo μ, b, c, c', c'' dieselbe Bedeutung haben wie im Art. 22, und rechnet

man hierauf durch die betreffenden Ausdrücke des Art. 23, S, B_1, C_1, so wird statt der (22)

$$x = -B_1 \cos\{2(\beta'+\pi') - (S-x)\} \sin(S-x) \quad . \quad . \quad (35)$$
$$- C_1 \cos 2\{2(\beta'+\pi') - (S-x)\} \sin 2(S-x)$$

oder statt der (23)

$$x = -B_1 \cos(2(\beta'+\pi')-S) \sin S - C_1 \cos 2(2(\beta'+\pi')-S) \sin 2S \quad (36)$$
$$- \frac{B_1^2}{r} \cos 2(\beta'+\pi'-S) \cos(2(\beta'+\pi')-S) \sin S$$

worauf sich wieder

$$\chi = S - x$$

und statt der (25)

$$\Delta\omega = mE\chi \sin\zeta + E' \sin\zeta \cos(2(\beta'+\pi')-\chi) \sin\chi \quad . \quad (37)$$

ergiebt, wo m, E, E' dieselben Werthe haben wie im Art. 23. Setzt man nun in den Gleichungen (27) des Art. 25

$$\Omega'' = 90^0 - \varepsilon'' \; ; \quad \beta'' = 90^0 - \varphi'' - \pi'' = \beta' + \pi' - \chi - \pi''$$

so geben sie

$$\operatorname{tg} \alpha'' = \frac{\operatorname{tg} \zeta}{\cos(\beta'+\pi'-\chi)}$$
$$\operatorname{tg} \varepsilon'' = \sin\zeta \operatorname{tg}(\beta'+\pi'-\chi)$$
$$\operatorname{tg}(\beta'+\pi'-\chi-\pi'') = \operatorname{tg}(\beta'+\pi'-\chi) \cos\alpha''$$

und vergleicht man diese mit den im Art. 29 entwickelten Gleichungen, so zeigt sich, dass die Identität hergestellt wird, wenn man

$$\omega\,,\quad \gamma\,,\quad \theta\,,\quad \beta-\eta\,,\qquad v \quad \text{bez. in}$$
$$\alpha''\,,\quad \varepsilon''\,,\quad \zeta\,,\quad \beta'+\pi'-\chi\,,\quad \pi''$$

verwandelt. Die Ausdrücke des Art. 31 geben daher sogleich

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0'' &= \frac{\zeta}{\cos(\beta'+\pi'-\chi)} \\
\varepsilon_0'' &= \zeta \operatorname{tg}(\beta'+\pi'-\chi) \\
\log\alpha'' &= \log\alpha_0'' - 4\mu\varepsilon_0''^2 + 112\mu'\varepsilon_0''^4 + 96\mu'\varepsilon_0''^2\alpha_0''^2 \\
\log\varepsilon'' &= \log\varepsilon_0'' - 2\mu\varepsilon_0''^2 - 2\mu\alpha_0''^2 - 8\mu'\alpha_0''^4 + 176\mu'\alpha_0''^2\varepsilon_0''^2 + 40\mu'\varepsilon_0''^4 \\
\log\pi'' &= \log\varrho'\zeta\varepsilon'' + \mu\alpha''^2 + 7\mu'\alpha''^4 - 4\mu'\alpha''^2\varepsilon''^2 + 4\mu'\varepsilon''^4
\end{aligned}\right\} . \quad (38)$$

und hierauf wird schliesslich

$$\beta'' = \beta' + \pi' - \chi - \pi''$$
$$\lambda = \varepsilon' - \varepsilon'' - \Delta\omega$$

Man kann diese Reihen auch anwenden, wenn ausser α' auch ε klein ist, nur wird man alsdann χ und $\Delta\omega$ aus den Ausdrücken des Art. 24

berechnen, in welche man auch ζ und $\beta'+\pi'$ statt β_0 und φ' einführen kann. Die betreffenden Ausdrücke werden hiemit

$$(39)\quad \begin{cases} \log\psi = \log\sigma' - f\mu\sin^2(\beta'+\pi') - g\mu^2\sin^2 2(\beta'+\pi') \\ \log\chi = \log\psi + h\psi\mu\sin 2(\beta'+\pi') - k\psi^2\mu\cos 2(\beta'+\pi') \\ \qquad\qquad + h\psi\mu^2\sin 4(\beta'+\pi') - l\psi^3\mu\sin 2(\beta'+\pi') \\ \log\varDelta\omega = \log m\chi\sin\zeta - \frac{1}{2}f\mu\sin^2(\beta'+\pi') + \frac{1}{2}h\psi\mu\sin 2(\beta'+\pi') \end{cases}$$

wo σ', f, g, etc. dieselben sind wie im Art. 24.

Wenn α' nahe $= 180^0$ ist, dann sei

$$180^0 - \alpha' = \alpha_1'$$

und

$$\varepsilon_0' = -\alpha_1'\sin\beta'$$
$$\zeta_0 = +\alpha_1'\cos\beta'$$

worauf alle anderen Ausdrücke wieder unverändert angewandt werden können.

34.

Betrachten wir ausserdem die beiden speciellen Fälle $\alpha' = 0$ und $\alpha' = 180^0$, in welchen die geodätische Linie einen Theil eines Meridians bildet, im ersten Falle sich vom Anfangspunkt nach Süden, und im zweiten sich nach Norden erstreckt. Die Gleichungen (21) und (27) geben nun, wenn man immer $\beta_0 = 90^0$ setzt, welches statthaft ist,

$$\varphi' = 90^0 \mp \beta' \;;\quad \varphi'' = 90^0 \mp \beta''$$

wo die oberen Zeichen für den ersten, und die unteren für den zweiten Fall gelten, gleichwie im Folgenden auch der Fall sein wird. Aus dem Art. 22 erhält man hierauf

$$\log\mu = \log b - c + c' - c''$$

oder

$$\log\mu = 7.2238036$$

und substituirt man den obigen Ausdruck für φ', und setzt

$$\chi = S + x'$$

so werden die Ausdrücke des Art. 23

$$x' = B_1\cos(2\beta' \mp (S+x'))\sin(S+x') + C_1\cos 2(2\beta' \mp (S+x'))\sin 2(S+x')$$

oder

$$x' = B_1 \cos(2\beta' \mp S) \sin S + C_1 \cos 2(2\beta' \mp S) \sin 2S$$
$$+ \frac{B_1^2}{r} \cos 2(\beta' \mp S) \cos(2\beta' \mp S) \sin S$$

und die des Art. 24

$$\log\psi = \log\sigma' - f\mu \sin^2\beta' - g\mu^2 \sin^2 2\beta'$$
$$\log\chi = \log\psi \pm h\psi\mu \sin 2\beta' - k\psi^2\mu \cos 2\beta'$$
$$\pm h\psi\mu^2 \sin 4\beta' \mp l\psi^3\mu \sin 2\beta'$$

und hierauf erhält man

$$\beta'' = \beta' \mp \chi$$

Der Längenunterschied λ ist hier selbstverständlich gleich Null.

35.

Es ist noch der specielle Fall $\alpha' = 90^0$ besonders zu betrachten, mit anderen Worten die Aufgabe zu lösen: »wenn von einem gegebenen »Punkt eines Meridians an eine gegebene geodätische Linie senkrecht ge»zogen wird, die geographische Lage des Endpunkts dieser Linie, nebst »dem Azimuth an demselben, zu finden«.

Sei wieder B' die Polhöhe des Anfangspunkts der auf dem Meridian senkrecht gezogenen geodätischen Linie s, und β' die reducirte Breite dieses Punkts, dann geben die Gleichungen (21)

$$\varphi' = 0 \ , \quad \beta_0 = \beta' \ , \quad \Omega' = 0$$

und folglich wird

$$\log\mu = \log(b \sin^2\beta') - c \sin^2\beta' + c' \sin^4\beta' \quad . \quad . \quad (40)$$

Die Gleichungen des Art. 23 geben, wenn wie früher

$$\chi = S - x$$

gesetzt wird,

$$x = \tfrac{1}{2} B_1 \sin 2(S-x) - \tfrac{1}{2} C_1 \sin 4(S-x) \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

oder

$$x = \tfrac{1}{2} B_1 \sin 2S - \tfrac{1}{2} C_1 \sin 4S - \frac{B_1^2}{4r} \sin 4S$$

$$\varDelta\omega = mE\chi \cos\beta' - \tfrac{1}{2} E' \cos\beta' \sin 2\chi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

und die des Art. 24

$$\left.\begin{aligned} \log\psi &= \log\sigma' - f\mu \\ \log\chi &= \log\psi + k\psi^2\mu \\ \varDelta\omega &= \log m\chi\cos\beta' - \tfrac{1}{2} f\mu \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

worauf man durch den Art. 25

$$(44) \quad \ldots \quad \begin{cases} \cos\beta''\sin\alpha'' = \cos\beta' \\ \cos\beta''\cos\alpha'' = \sin\beta'\sin\chi \\ \cos\beta''\sin\Omega'' = \sin\chi \\ \cos\beta''\cos\Omega'' = \cos\beta'\cos\chi \\ \sin\beta'' = \sin\beta'\cos\chi \\ \lambda = \Omega'' - \Delta\omega \end{cases}$$

erhält, welche α'', β'', λ geben.

Der Fall $\alpha' = 270^0$ braucht nicht besonders aufgestellt zu werden, denn es ist klar, dass wenn man in demselben die vorstehenden Ausdrücke unverändert anwendet, das Resultat von dem des Falles $\alpha' = 90^0$ nur darin verschieden ausfällt, dass α'' und λ in entgegen gesetzter Richtung zu zählen sind.

36.

Es ist dienlich die im Vorhergehenden gelöste Aufgabe durch einige Beispiele zu erläutern, und es soll zuerst ein solches gewählt werden, in welchem die geodätische Linie eine beträchtliche Länge hat. Die gegebenen Stücke sollen die folgenden sein:

$$B' = 51^0\,12'$$
$$\alpha' = 119\;\;9\;\;18'',20$$
$$s = 2361641,92 \text{ Toisen}$$

Wendet man diese Werthe auf die Ausdrücke des Art. 22 an, so bekommt man

$$\beta' = 51^0\,6'\,22'',60\;; \qquad \log\sin\beta' = 9.8911537$$
$$\log\cos\beta' = 9.7978751$$
$$\varphi' = -\,21^0\,27'\,19'',58\;; \qquad \Omega' = -\,35^0\,37'\,54'',31$$
$$\log\sin\beta_0 = 9.9223429\;; \qquad \log\mu = 7.0689261$$
$$\log\cos\beta_0 = 9.7390408\;;$$

Der Bogen β_0 selbst wird nicht gebraucht, und braucht daher nicht aufgeschlagen zu werden. Die Ausdrücke des Art. 23 gaben hierauf

$$\sigma = 41^0\,21'\,12'',898$$
$$\log K' = 7.0705078$$
$$S = 41^0\,26'\,37'',10$$
$$\log B_1 = 2.38336$$
$$\log C_1 = 8.5492$$

und die Gleichungen (22) und (24)

$$x = +\ 2'\ 39'',77\ ;\quad \varphi'' = 19^0\ 56'\ 37'',75$$

worauf sich durch die (25)

$$\Delta\omega = +\ 4'\ 32'',87$$

ergab. Durch die Gleichungen (27) fand sich nun

$$\alpha'' = 62^0\ 30'\ 57'',30\ ;\quad \Omega'' = 33^0\ 29'\ 41'',55$$
$$\log\sin\beta'' = 9.8954835$$
$$\log\cos\beta'' = 9.7910491$$

worauf

$$B'' = 51^0\ 55'\ \ 0'',00$$
$$\lambda = 69\quad 2\ \ 59.99$$

gefunden wurde. Die hier zu Grunde gelegte Polhöhe ist mit Weglassung der Secunden die von Orsk, und das Resultat giebt auch mit Weglassung der Secunden die Polhöhe und die Länge von Valentia. Wie ich die hier als gegeben betrachteten Grössen α' und s erhalten habe wird weiter unten bei der Auflösung der entgegengesetzten Aufgabe gezeigt werden.

37.

Als zweites Beispiel soll eine kurze geodätische Linie angenommen werden. Gegeben seien:

$$B' = 20^0\ ;\quad \alpha' = 30^0\ ;\quad \sigma = 2^0$$

wo ich sogleich den in Bogentheilen ausgedrückten Werth von $\frac{s}{a}$ statt s selbst angenommen habe, weil die Berechnung desselben aus s so einfach ist, und eben so ausgeführt wird wie im vorigen Beispiel. Aus B' bekommt man zuerst

$$\beta' = 19^0\ 56'\ 18'',3135\qquad \log\sin\beta' = 9.5327671$$
$$\log\cos\beta' = 9.9731554$$

bei welcher Berechnung ich mich der Reihe des Art. 25 bedient habe. Die Gleichungen des Art. 22 geben nun

$$\varphi' = 67^0\ 16'\ 21'',24\ ;\quad \log\sin\beta_0 = 9.9457887$$
$$\log\cos\beta_0 = 9.6721254$$
$$\log\mu = 7.1157020$$

Der Bogen Ω' wurde hier nicht berechnet, weil es bei kleinen Werthen

von s zweckmässiger ist die Reihenentwickelung des Dreiecks des Art. 27 anzuwenden.

Die Gleichungen des Art. 24 gaben hierauf

$$\log\psi = 3.8586171\ ; \qquad \log\chi = 3.8586308{,}8$$
$$\chi = 2^0\,0'\,21'',558\ ; \qquad \varDelta\omega = +\ 11'',3445$$

Wendet man nun zur weiteren Berechnung die Ausdrücke des Art. 31 an, so findet man

$$\log\theta_0 = 3.5576008{,}8\ ; \qquad \log\eta_0 = 3.7961614{,}8$$
$$\log\theta\ = 3.5575343{,}3\ ; \qquad \log\eta = 3.7962058{,}3$$
$$\eta = 1^0\,44'\,14'',690$$
$$\log\tau = 1.738328\ ; \qquad \tau = 54{,}743$$
$$\log\omega_0 = 3.5798259\ ; \qquad \log\gamma_0 = 3.0744697$$
$$\log\omega\ = 3.5798211\ ; \qquad \log\gamma = 3.0744427$$
$$\omega = 1^0\ \ 3'\,20'',328\ ; \qquad \gamma = 19'\,46'',978$$
$$\beta'' = 18\ \ 11\ \ 53{,}236\ ; \qquad \alpha'' = 29^0\,39\ \ 18{,}279$$

und hieraus

$$\lambda = 1^0\,3'\,8'',983\ ; \qquad B'' = 18^0\,15'\,18'',417$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

38.

Um auch den speciellen Fall des Art. 33 durch ein Beispiel zu erläutern seien gegeben:

$$B' = 59^0\,55'\ ; \quad \alpha' = 5^0\,34'\,56'',12\ ; \quad \sigma = 21^0\,50'\,33'',91$$

Hiemit wird zuerst

$$\beta' = 59^0\,50'\,0'',189\ ; \quad \log\sin\beta' = 9.9367990$$
$$\log\cos\beta' = 9.7011501$$

Die Ausdrücke (33) gaben hierauf

$$\varepsilon' = 4^0\,49'\,48'',333\ ; \quad \zeta = 2^0\,48'\,6'',667$$
$$\pi' = 7\ \ 5{,}495$$

Ferner die (34)

$$\log\mu = 7.2227682$$

Durch die bez. Ausdrücke des Art. 23 wurde hierauf gefunden

$$\log K' = 7.2244031$$

woraus sich

$$S = 21^0\,52'\,45'',817$$

ergab. Durch die Ausdrücke des Art. 23 erhielt ich ferner

$$\log B_1 = 2.53720\,; \quad \log C_1 = 8.8568$$
$$\log E = -\,0.00036\,; \quad \log E' = 9.7596$$

worauf die Ausdrücke (36) und 37)

$$x = +\,17'',974\,; \quad \Delta\omega = +\,12'',856$$

gaben. Es wird folglich

$$\chi = 21^0\,52'\,27'',843$$

wodurch alles gegeben ist, welches für die Ausdrücke (38) erforderlich ist. Diese geben hierauf

$$\alpha'' = 3^0\,33'\,27'',42\,; \quad \varepsilon'' = 2^0\,11'\,35'',471$$
$$\pi'' = 3\;\;13,113$$

woraus man

$$\beta'' = 38^0\;\;1'\,24'',728$$
$$\lambda = 2\;\;38\;\;0,006$$
$$B'' = 38\;\;7\;\;0,000$$

erhält, womit die Aufgabe gelöst ist. Die zu Grunde gelegte Polhöhe ist die von Christiania in Norwegen, und die Länge und Polhöhe des Resultats ist die von Palermo, in welchen Bögen jedoch die Secunden weggelassen wurden. Es wird sich weiter unten zeigen, wie die hier als gegeben betrachteten Stücke α' und s' erlangt worden sind.

39.

Von dem speciellen Falle des Art. 34 wird es wohl nicht nöthig sein ein Beispiel zu geben, da er so einfach ist. Dagegen sollen von dem im Art. 35 erörterten Falle zwei Beispiele hier eingeschaltet werden. Sei erstens auf irgend einem Meridiane

$$B' = -\,64^0\,45'\,2'',59$$

die Polhöhe des Punktes, von welchem aus in senkrechter Richtung die geodätische Linie

$$\sigma = 52^0\,28'\,49'',75$$

gezogen, und die Lage des Endpunkts dieser bestimmt werden sollen. Da β' jedenfalls gebraucht wird, so kann man diesen Bogen zuerst berechnen. Man findet

$$\beta' = -\,64^0\,40'\,35'',84\,; \quad \log\sin\beta' = 9.9561242n$$
$$\log\cos\beta' = 9.6311664$$

Man findet nun ferner durch die Gleichung (40)

$$\log \mu = 7{,}1363178$$

und hierauf durch die bez. Ausdrücke des Art. 23

$$\log K' = 7.1379202 \; ; \qquad \log B_1 = 2.4507422$$

$$\log C_1 = 8.6839$$

$$\log E = -\ 0.0002975 \; ; \quad \log E' = 9.6731$$

worauf

$$S = 52^0\ 35'\ 3'',87$$

wird. Die Gleichung (41) giebt hierauf

$$x = +\ 2'\ 16'',30\ , \quad \text{also} \quad \chi = 52^0\ 32'\ 47'',57$$

und die (42)

$$\varDelta\omega = +\ 4'\ 30'',19\ .$$

Wäre σ ein kleiner Bogen, so würde man sich statt der im Vorhergehenden angezogenen Ausdrücke der (43) bedient haben.

Aus den (44) folgt nun

$$\alpha'' = 149^0\ 12'\ 5'',95\ ; \quad \Omega'' = 71^0\ 55'\ 30'',18$$

$$\log \sin \beta'' = 9.7401112n$$

$$\log \cos \beta'' = 9.9218811$$

und hieraus ohne von β'' Kenntniss zu nehmen

$$B'' = -\ 33^0\ 25'\ 59'',98$$

$$\lambda = \quad 71\ \ 46\ \ 59{,}99$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Sei zweitens:

$$B' = +\ 64^0\ 26'\ 46'',61$$

der Punkt irgend eines Meridians von welchem aus senkrecht die geodätische Linie

$$\sigma = 127^0\ 16'\ 27'',86$$

gezogen werden soll, nach deren Endpunkt gefragt wird. Da die Rechnung genau eben so geführt worden ist, wie im vorigen Beispiel, so darf ich mich begnügen die erhaltenen Stücke ohne weitere Erklärung der Reihe nach anzuführen,

$$\beta' = 64^0\ 22'\ 17'',56\ ; \quad \log \sin \beta' = 9.9550225$$

$$\log \cos \beta' = 9.6360198$$

$$\log \mu = 7.1341203$$

$$\log K' = 7.1357212\ ; \qquad \log B_1 = 2.4485449$$

$$\log C_1 = 8.6795$$

$\log E = -0.0002960$; $\log E' = 9.6709$
$S = 127^{0}\,31'\,38'',34$; $x = -\quad 2'\,15'',76$
$\chi = 127\;\;33\;\;54,10$; $\varDelta\omega = +\quad 11\;\;3,64$
$\alpha'' = \;\;31\;\;10\;\;58,58$; $\Omega'' = 108^{0}\;\;24\;\;3,64$
$\lambda = 108\;\;13\;\;\;0,00$; $B'' = -33\;\;26\;\;0,00$

Man sieht sogleich aus den Resultaten dieser beiden Beispiele, dass auch sie vorbereitet sind, denn die Polhöhe der Endpunkte der beiden angenommenen geodätischen Linien ist dieselbe, und die Summe der Längenunterschiede der Endpunkte vom ersten Meridian ist 180^{0}. Die Polhöhe $-33^{0}26'$ ist mit Weglassung der Secunden die von Santiago in Chili, und der Längenunterschied $108^{0}13'$ ist, ebenfalls mit Weglassung der Secunden, der zwischen Santiago und Moskau. Legt man also auf dem Meridian von Moskau, und zwar auf der Hälfte desselben, von Pol zu Pol gerechnet, wo Moskau liegt, unter der Polhöhe von $64^{0}26'46'',61$ eine sich nach Westen erstreckende, senkrechte geodätische Linie an, deren Länge in Theilen des Erdäquators $127^{0}16'27'',86$ beträgt, so liegt der Endpunkt dieser in Santiago, und trifft diesen Punkt unter dem Azimuth $211^{0}10'58'',58$ von Süden nach Westen gezählt. Legt man dagegen auch auf dem Meridian von Moskau, aber auf der Hälfte desselben, wo Moskau nicht liegt, unter der Polhöhe von $-64^{0}45'2'',59$ eine sich nach Osten erstreckende, senkrechte geodätische Linie an, deren Länge in Theilen des Erdäquators $52^{0}28'49'',75$ beträgt, so liegt der Endpunkt derselben auch in Santiago, und trifft diesen Punkt unter dem Azimuth $329^{0}12'5'',95$, welches aber jetzt von Süden nach Osten gezählt werden muss.

Das Verfahren, wodurch diese beiden Beispiele vorbereitet worden sind, wird sich weiter unten bei der Auflösung der entgegengesetzten Aufgabe ergeben.

Zweiter Abschnitt.

40.

Es soll jetzt eine Aufgabe gelöst werden, die in gewisser Beziehung das Entgegengesetzte der im vorigen Abschnitte gelösten bildet, und in der practischen Geodäsie vielfache Anwendung findet. Diese Aufgabe besteht darin: aus der gegebenen geographischen Lage irgend

zweier Punkte auf dem Erdellipsoid die geodätische Linie, die zwischen diesen Punkten statt findet, nebst deren Azimuthen zu finden.

Betrachtet man diese Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit, so kann sie strenge genommen nur auf indirecte Weise gelöst werden, und nur für den Fall, in welchem die zu bestimmende geodätische Linie so klein ist, dass sie als eine kleine Grösse erster Ordnung betrachtet werden kann, lässt sich eine directe Auflösung durch Reihenentwickelungen herstellen. Ich gebe in diesem Abschnitte nicht nur eine solche, auf kleine Werthe von s beschränkte, sondern auch eine allgemeine Auflösung, die für jeden Werth von s angewandt werden kann, und die Eigenschaft besitzt, dass sie gemeiniglich schon in der ersten Annäherung die gesuchten Grössen auf Hunderttheile der Secunde genau giebt, und daher ein directes Verfahren bildet. Wenn in einzelnen Fällen das Resultat der ersten Annäherung nicht so genau wird, so ist jedenfalls der übrig gebliebene Fehler sehr klein, und kann durch die einfachen Differentialformeln, die ich zugleich angebe, mit aller wünschenswerthen Genauigkeit berichtigt werden*).

Das Mittel, wodurch ich diese Auflösung erlangt habe, besteht in der Einführung der astronomischen Azimuthe als Hülfsgrössen, statt der geodätischen. Es ist bekannt, dass die auf den Dreieckspunkten, oder Stationen, durch Messungen mit dem Theodoliten, oder irgend einem anderen, dazu dienlichen, Instrumente erlangten Winkel nicht die Winkel sind, die die vom Stationspunkt nach den eingestellten Punkten gezogenen geodätischen Linien mit einander bilden, also auch nicht die Azimuthe der geodätischen Linien, wenn der eine eingestellte Punkt im Meridian des Beobachtungsortes liegt. Das Azimuth, welches man durch die Beobachtungen, oder Winkelmessungen, unmittelbar bekommt, und welches ich das astronomische Azimuth nennen will, ist der Winkel, den eine durch die Normale des Beobachtungsortes und den eingestellten Punkt gelegte Ebene mit dem Meridian macht, und von dem Azimuth der geodätischen Linie, welches ich zur Unterscheidung das geodätische Azimuth nennen will, verschieden. Wenn die geodätische Linie kurz ist, dann ist der Unterschied zwischen dem geodätischen und dem

---

*) Puissant hat in seinem *Traité de Géodésie* diese Aufgabe für sehr kleine Werthe von s gelöst, seine Auflösung ist aber ganz verschieden von der, welche hier gegeben werden wird.

astronomischen Azimuth zwar sehr klein, aber wenn jene Linie lang ist, dann kann er beträchtlich werden. Man wird aus den hier angehängten Beispielen sehen, dass er unter Umständen eine Anzahl von Minuten betragen kann. Man hat zu verschiedenen Zeiten den Versuch gemacht das astronomische Azimuth und den auf dem Ellipsoid in der oben erklärten Ebene liegenden elliptischen Bogen statt des geodätischen Azimuths und der geodätischen Linie in die Geodäsie einzuführen, früher hat es Duséjour gethan, und in neuerer Zeit sind diese Grössen bei der englischen Ordnance Survey angewandt worden, und der Staatsrath Andrae hat darüber Abhandlungen geschrieben. Aber dieses Verfahren kann nicht empfohlen werden, da es abgesehen von anderen Uebelständen zu einer Duplicität in den Dreiecken und ihren Bestandtheilen führt; überdiess werden bei gleichen Graden der Genauigkeit die sich auf die geodätischen Linien und Azimuthe beziehenden Formeln einfacher wie jene.

Denkt man sich ausser dem einen Pole des Ellipsoids irgend zwei auf demselben liegende Punkte A und B, sieht man die Polhöhe von A, das astronomische Azimuth von B im Punkte A, und den elliptischen Bogen zwischen A und B als gegeben an, und berechnet hieraus den Winkel in B, so ist dieser weder das astronomische noch das geodätische Azimuth von A in B, sondern ein anderer Winkel. Sieht man umgekehrt das astronomische Azimuth von A in B als gegeben an, so bekommt man in A einen Winkel, welcher weder das astronomische noch das geodätische Azimuth von B in A ist. Auch die elliptischen Bögen zwischen A und B, von welchen der eine dem astronomischen Azimuth in A, und der andere dem in B entspricht, sind von einander verschieden. Betrachtet man ein allgemeines Dreieck auf dem Ellipsoid, von welchem keine Ecke in einem der beiden Pole liegt, so vervielfältigt sich diese Dupplicität. Man wird also bei der Einführung der astronomischen Azimuthe statt der geodätischen in die Geodäsie auf Zweideutigkeiten gerathen, während durch die Anwendung des geodätischen Azimuths und der geodätischen Linie diese durchaus nicht stattfinden. Die Anwendung der letzteren ist auch schon dadurch wissenschaftlich geboten, dass sich die sphäroidische Trigonometrie an die sphärische und die ebene vollständig anschliesst, in welchen die Seiten der Figuren, die man betrachtet, auch kürzeste Linien auf der Kugel und der Ebene sind. Bei grösseren Dreiecken treten die genannten Uebelstände selbstver-

ständlich mehr hervor wie bei kleinen *), aber auch bei diesen verhält es sich je nach der Lage derselben auf dem Ellipsoid anders. Es kommt hiebei auf den Werth der Azimuthe an, und wenn bei einer kleinen geodätischen, gegebenen Linie in einem gewissen Falle die durch Hülfe der astronomischen Azimuthe geführte Rechnung von der mit geodätischen geführten im Resultat nur sehr wenig abweicht, so lässt sich daraus nicht schliessen. dass dieses in jedem Falle bei Zugrundelegung einer geodätischen Linie derselben Länge statt finden wird. Die astronomischen Azimuthe fallen nemlich bei 0, 180°, und nahe 90°, 270° mit den geodätischen zusammen, und die grössten Unterschiede finden celeris paribus in den Octanten statt. Ein Beispiel daher mit kleinem Azimuth auf beide Arten berechnet, muss grössere Uebereinstimmung zeigen, wie der Fall sein würde, wenn das Azimuth einem Octanten nahe gleich wäre.

Es werden in diesem Abschnitte, wie schon oben erwähnt die astronomischen Azimuthe, die man durch endliche Ausdrücke berechnen kann, nur als Hülfsgrössen angewandt, und vor dem Ende der Rechnung in die geodätischen umgewandelt.

Unter den Nebenaufgaben die in diesem Abschnitt gelöst werden nenne ich hier die: Von einem gegebenen Punkt der Erdoberfläche aus eine geodätische Linie so auf einen gegebenen Meridian zu ziehen, dass sie diesen rechtwinklich schneidet. Auch diese Aufgabe wird unbeschränkt so gelöst, dass in der Regel die erste Annäherung schon ein genaues Resultat giebt. Schliesslich mache ich darauf aufmerksam, dass man durch die Verbindung der hier behandelten Aufgabe mit der des vorhergehenden Abschnittes eine Anzahl von Aufgaben der sphäroidischen Trigonometrie lösen kann, und führe den Fall aus, wo in einem allgemeinen sphäroidischen Dreieck zwei Seiten mit dem zwischen liegenden Winkel, nebst der Lage desselben auf dem Ellipsoid gegeben sind.

41.

Wir wollen jetzt als Vorbereitung zur Auflösung unserer Aufgabe die astronomischen Azimuthe einer besondern Betrachtung unterwerfen,

---

*) Man wird aus den dieser Abhandlung hinzugefügten Beispielen sehen, dass für die geodätische Linie zwischen Orsk und Valentia die Unterschiede zwischen den geodätischen und den astronomischen Azimuthen auf 11″ steigen, und dass sie für die geodätische Linie zwischen Moskau und Santiago sogar auf $10\frac{1}{2}$ Minuten gehen.

und die Relationen ableiten, in welchen sie zu anderen, bekannten oder unbekannten, Grössen stehen.

Um diese Relationen zu erhalten wollen wir zuerst durch die Normale irgend eines Punkts (A) auf dem Erdellipsoid eine Ebene legen, die zugleich durch irgend einen anderen Punkt (B) derselben Oberfläche geht. Man kann den Punkt (A) als Beobachtungsort, und den Punkt (B) als einen in dem, im Punkt (A) aufgestellten, Winkelmessinstrument eingestellten Dreieckspunkt betrachten. Bezeichnet man die Polhöhe des Punkts (A) mit B', und legt von den rechtwinklichen Coordinaten x, y, z die Ebene der Achsen der xz, von welchen die der x im Aequator, und die der z wieder in der Umdrehungsachse des Erdellipsoids liegen soll, durch den Meridian von (A), so sind die Gleichungen der Normale am Punkt (A)

$$x \sin\beta' - z\sqrt{1-e^2} \, . \cos\beta' = ae^2 \sin\beta' \cos\beta'$$
$$y = 0$$

wenn wieder β' die zur Polhöhe B' gehörige reducirte Breite bedeutet.

Die reducirte Breite des Punkts (B) sei β'', und λ dessen Längenunterschied vom Punkt (A), dann sind die Coordinaten von (B)

$$x = a\cos\beta''\cos\lambda \; ; \quad y = a\cos\beta''\sin\lambda \; ; \quad z = a\sqrt{1-e^2} \, . \sin\beta''$$

Stellt man nun die Gleichung der Ebene, die sowohl den eben aufgestellten Gleichungen der Normale, wie den letztgenannten Coordinaten gnügt, unter der Form

$$Ax + By + Cz = D$$

auf, und berücksichtigt zuerst die Gleichungen der Normale, so wird

$$A = E\sin\beta'$$
$$C = E\sqrt{1-e^2} \, . \cos\beta'$$
$$D = Eae^2\sin\beta'\cos\beta'$$

wo E ein willkührlicher Factor ist. Substituirt man hierauf sowohl diese Werthe wie die Ausdrücke der Coordinaten des Punkts (B), so ergiebt sich die Gleichung

$$B\cos\beta''\sin\lambda$$
$$= E\{(1-e^2)\cos\beta'\sin\beta'' - \sin\beta'\cos\beta''\cos\lambda + e^2\sin\beta'\cos\beta'\}$$

und bestimmt man jetzt E so, dass die Coefficienten A, B, C, D von Nennern befreit werden, durch welche Bedingung man $E = \cos\beta''\sin\lambda$ erhält, so werden

$$A = \sin\beta'\cos\beta''\sin\lambda$$
$$B = (1-e^2)\cos\beta'\sin\beta'' - \sin\beta'\cos\beta''\cos\lambda + e^2\sin\beta'\cos\beta'$$
$$C = -\sqrt{1-e^2}\,.\cos\beta'\cos\beta''\sin\lambda$$
$$D = ae^2\sin\beta'\cos\beta'\cos\beta''\sin\lambda$$

die, wenn sie in die Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz = D$$

substituirt werden, diese völlig bestimmen.

12.

Die beiden Ebenen der Meridiane von (A) und (B) nebst der dritten, eben bestimmten Ebene bilden einen körperlichen Winkel, und legt man darüber eine Kugeloberfläche von beliebigem Halbmesser, die ihren Mittelpunkt im Scheitel des körperlichen Winkels hat, so bekommt man ein sphärisches Dreieck, in welchem der Winkel zwischen den beiden Kreisbögen, oder Dreieckseiten, die die beiden Meridiane darstellen, λ, der Winkel zwischen dem Meridian von (A) und der dritten Ebene, oder den Dreieckseiten, die diese darstellen, $180^0-\alpha_0'$, wenn α_0' das astronomische Azimuth des Punkts (B) von (A) aus bedeutet, und die zwischen diesen beiden Winkeln liegende Seite $90^0-B'$ sind. Der dritte Winkel dieses Dreiecks soll mit γ' und die beiden anderen Seiten sollen mit χ_0 und $90^0-\Gamma$ bezeichnet werden, dergestalt, dass den Winkeln

$$\lambda\,,\quad 180^0-\alpha_0'\,,\quad \gamma \quad \text{bez. die Seiten}$$
$$\chi_0\,,\quad 90^0-\Gamma\,,\quad 90^0-B'$$

gegenüber liegen. Die sphärische Trigonometrie giebt daher

$$(45)\quad \begin{cases} \sin\chi_0\sin\alpha_0' = \cos\Gamma\sin\lambda \\ \sin\chi_0\cos\alpha_0' = -\cos B'\sin\Gamma + \sin B'\cos\Gamma\cos\lambda \\ \sin\chi_0\sin\gamma = \cos B'\sin\lambda \\ \sin\chi_0\cos\gamma = \sin B'\cos\Gamma - \cos B'\sin\Gamma\cos\lambda \\ \cos\chi_0 = \sin B'\sin\Gamma + \cos B'\cos\Gamma\cos\lambda \end{cases}$$

für welche noch der Ausdruck für Γ zu ermitteln ist. In Bezug darauf ist zu bemerken, dass die Seite $90^0-\Gamma$ in der Ebene des Meridians von (B) liegt, und dem Winkel gleich ist, den die Durchschnittslinie zwischen der Ebene dieses Meridians und der dritten, im vor. Art. be-

stimmten, Ebene mit der Achse der z macht. Man findet leicht, dass die Gleichung der Ebene dieses Meridians

$$x \sin\lambda - y\cos\lambda = 0$$

ist, und diese nebst der Gleichung

$$Ax + By + Cz = D$$

sind also die Gleichungen der eben genannten Durchschnittslinie, die man leicht auf die folgende Form bringen kann,

$$\begin{aligned} x(A\cos\lambda + B\sin\lambda) + zC\cos\lambda &= D\cos\lambda \\ y(A\cos\lambda + B\sin\lambda) + zC\sin\lambda &= D\sin\lambda \end{aligned}$$

Die analytische Geometrie zeigt aber, dass wenn

$$\begin{aligned} ax + bz &= k \\ ay + cz &= l \end{aligned}$$

die Gleichungen irgend einer Graden sind, die mit der Achse der z den Winkel θ macht, man

$$\cos\theta = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

hat. Die Substitution der vorstehenden Gleichungen giebt daher

$$\sin\Gamma = \frac{A\cos\lambda + B\sin\lambda}{\sqrt{(A\cos\lambda + B\sin\lambda)^2 + C^2}}$$

oder durch Hülfe der Ausdrücke von A, B, C, des vor. Art.

$$\sin\Gamma = \frac{1}{p}\left(\sqrt{1-e^2}\,.\sin\beta'' + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin\beta'\right) \quad . \quad . \quad (46)$$

wenn zur Abkürzung

$$p^2 = \cos^2\beta'' + \left(\sqrt{1-e^2}\,.\sin\beta'' + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin\beta'\right)^2 \quad . \quad (47)$$

gesetzt wird. Es folgt hieraus

$$\cos\Gamma = \frac{1}{p}\cos\beta'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

$$\operatorname{tg}\Gamma = \left(\sqrt{1-e^2} + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\sin\beta'}{\sin\beta''}\right)\operatorname{tg}\beta'' \quad . \quad . \quad (49)$$

Aus den Gleichungen (45) verbunden mit der (49) lässt sich nun α_0', γ, χ_0 berechnen, wenn β', β'', λ gegeben sind. Das im Art. 27 betrachtete Dreieck giebt ausserdem

$$\left.\begin{aligned} \sin\chi\sin\alpha' &= \cos\beta''\sin\omega \\ \sin\chi\cos\alpha' &= -\cos\beta'\sin\beta'' + \sin\beta'\cos\beta''\cos\omega \\ \sin\chi\sin\alpha'' &= \cos\beta'\sin\omega \\ \sin\chi\cos\alpha'' &= \sin\beta'\cos\beta'' - \cos\beta'\sin\beta''\cos\omega \\ \cos\chi &= \sin\beta'\sin\beta'' + \cos\beta'\cos\beta''\cos\omega \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

die den (45) vollkommen ähnlich sind. Verbindet man nun die (50) mit den vorhergehenden Gleichungen, so kann man die Unterschiede $\alpha'-\alpha_0'$, $\alpha''-\gamma$, $\chi-\chi_0$ ermitteln.

Ich bemerke hiezu, dass die Gleichungen (45) in Verbindung mit den (46), (47), (48) zu erkennen geben, dass der Winkel γ nicht das astronomische Azimuth des Punkts (A) vom Punkt (B) aus ist. Denn hiefür müssten die Gleichungen (45) für α_0' in die für γ übergehen, wenn man darin β' und β'' mit einander vertauscht, und dass dieses nicht der Fall ist, lehrt der Augenschein. Ebenso bekommt die Seite χ_0 verschiedene Werthe, je nachdem man sie aus den unveränderten (45), oder aus denselben nach der Vertauschung von β' und β'' mit einander berechnet. Das hier betrachtete Dreieck, von welchem zwei Seiten Meridianbögen sind, bekommt also verschiedene Seiten und Winkel, je nachdem man von dem astronomischen Azimuth am einen oder anderen Eckpunkt ausgeht; nur der Winkel λ bleibt in diesen beiden Fällen derselbe. Wenn nun in einem auf dem Erdellipsoid betrachteten Dreieck keine Seite mit einem Meridian zusammen fällt, so müssen in diesem alle Seiten und Winkel verschieden ausfallen, je nachdem man das eine oder das andere astronomische Azimuth an dessen Eckpunkten zu Grunde legt.

43.

Durch Hülfe der eben entwickelten Gleichungen kann man die Unterschiede $\alpha_0'-\alpha'$, $\gamma-\alpha''$, $\chi_0-\chi$ in unendliche Reihen entwickeln, die nach den graden und positiven Potenzen von e fortschreiten. Sei zu dem Ende

$$B' = \beta' + c\,; \quad \Gamma = \beta'' + f\,; \quad \lambda = \omega - \varDelta\omega$$

dann wird zuerst

$$\sin B' = \sin\beta' + c\cos\beta' - \tfrac{1}{2}c^2\sin\beta' + \ldots$$

$$\cos B' = \cos\beta' - c\sin\beta' - \tfrac{1}{2}c^2\cos\beta' + \ldots$$

$$\sin\Gamma = \sin\beta'' + f\cos\beta'' - \tfrac{1}{2}f^2\sin\beta'' + \ldots$$

$$\cos\Gamma = \cos\beta'' - f\sin\beta'' - \tfrac{1}{2}f^2\cos\beta'' + \ldots$$

$$\sin\lambda = \sin\omega - \varDelta\omega\cos\omega - \tfrac{1}{2}\varDelta\omega^2\sin\omega + \ldots$$

$$\cos\lambda = \cos\omega + \varDelta\omega\sin\omega - \tfrac{1}{2}\varDelta\omega^2\cos\omega + \ldots$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die beiden ersten (45), und bleibt

bei den ersten Potenzen von c, f, $\Delta\omega$ stehen, welches für unsern Zweck ausreicht, so bekommt man mit Zuziehung der (50)

$$\sin\chi_0 \sin\alpha_0' = \sin\chi \sin\alpha' - f\sin\beta''\sin\omega - \Delta\omega\cos\beta''\cos\omega$$
$$\sin\chi_0\cos\alpha_0' = \sin\chi\cos\alpha' + c\cos\chi - f(\cos\beta'\cos\beta'' + \sin\beta'\sin\beta''\cos\omega) + \Delta\omega\sin\beta'\cos\beta''\sin\omega$$

und multiplicirt man die erste dieser mit $\cos\alpha'$, die zweite mit $-\sin\alpha'$, und addirt, so ergiebt sich leicht, wenn man erwägt, dass das Dreieck des Art. 27 auch

$$\sin\alpha''\sin\beta'' = -\cos\alpha'\sin\omega + \sin\alpha'\cos\omega\sin\beta'$$
$$\cos\alpha'' = \cos\alpha'\cos\omega + \sin\alpha'\sin\omega\sin\beta'$$

giebt, und dass man jetzt $\sin\chi$ statt $\sin\chi_0$, und $\alpha_0'-\alpha'$ statt $\sin(\alpha_0'-\alpha')$ setzen darf,

$$\alpha_0' - \alpha' = -c\sin\alpha'\frac{\cos\chi}{\sin\chi} + f\frac{\sin\alpha''}{\sin\chi} - \Delta\omega\frac{\cos\beta''\cos\alpha''}{\sin\chi}$$

Die Anwendung desselben Verfahrens auf die dritte und vierte der (45), oder die blose Vertauschung von c mit f, β' und α' mit β'' und α'', α_0' und α' mit $180^0-\gamma$ und $180^0-\alpha''$ in der vorstehenden Gleichung giebt ausserdem

$$\gamma - \alpha'' = -c\frac{\sin\alpha'}{\sin\chi} + f\sin\alpha''\frac{\cos\chi}{\sin\chi} - \Delta\omega\frac{\cos\beta'\cos\alpha'}{\sin\chi}$$

Substituirt man ferner die obigen Ausdrücke in die letzte (45), so ergiebt sich durch Hülfe der (50)

$$\cos\chi_0 = \cos\chi - c\sin\chi\cos\alpha' + f\sin\chi\cos\alpha'' + \Delta\omega\sin\chi\cos\beta'\sin\alpha'$$

oder da man hier $\cos\chi_0 - \cos\chi = (\chi-\chi_0)\sin\chi$ setzen darf,

$$\chi - \chi_0 = -c\cos\alpha' + f\cos\alpha'' + \Delta\omega\cos\beta'\sin\alpha'$$

wo nur noch die Ausdrücke für c, f, $\Delta\omega$ zu substituiren sind.

44.

Wenn man die mit e^4 multiplicirten Glieder mit aufnimmt, so bekommt man leicht aus der Reihe für B des Art. 25, und der Gleichung $B' = \beta' + c$,

$$c = \tfrac{1}{2}e^2\sin\beta'\cos\beta' + \tfrac{1}{8}e^4(\sin\beta'\cos\beta' + 2\sin\beta'\cos^3\beta')$$

Um den Ausdruck für f zu erhalten giebt die (49)

$$\operatorname{tg}(\beta''+f) = \left(\sqrt{1-e^2} + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\sin\beta'}{\sin\beta''}\right)\operatorname{tg}\beta''$$

und setzt man

$$i = -\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\frac{\sin\beta'}{\sin\beta''}$$

so bekommt man hieraus auf ähnliche Weise wie im Art. 28

$$(51) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \operatorname{tg} f = \frac{i\sin\beta''\cos\beta''}{1 + i\sin^2\beta''}$$

und nach der Entwickelung

$$f = i\sin\beta''\cos\beta'' - i^2\sin^3\beta''\cos\beta''$$

oder nach der Substitution des Werthes von i,

$$f = e^2\left(\sin\beta' - \frac{1}{2}\sin\beta''\right)\cos\beta''$$

$$+ e^4\left\{\sin\beta'\sin\beta''(\sin\beta'' - \sin\beta') + \frac{1}{2}\sin\beta' - \frac{1}{8}\sin\beta'' - \frac{1}{4}\sin^3\beta''\right\}\cos\beta''$$

Endlich geben die Gleichungen (15) und (20) nach der Substitution der Werthe der in der letzteren eingeführten Hülfsgrössen,

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}e^2\chi\cos\beta'\sin\alpha'$$

$$+ \frac{1}{16}e^4\{\chi\cos\beta'\sin\alpha' + \chi\cos^3\beta'\sin^3\alpha'$$

$$-(\sin^2\beta' - \cos^2\beta'\cos^2\alpha')\cos\beta'\sin\alpha'\sin\chi\cos\chi + 2\sin\beta'\cos^2\beta'\sin\alpha'\cos\alpha'\sin^2\chi\}$$

Substituirt man diese Ausdrücke von c, f, $\Delta\omega$ in die des vor. Art., und nimmt dabei nur auf die mit e^2 multiplicirten Glieder Rücksicht, so ergiebt sich nach einer leichten Reduction

$$(52)\begin{cases} \alpha_0' = \alpha' + \frac{1}{2}e^2\cos\beta'\sin\alpha'\left\{\cos\beta'\cos\alpha'\left(1 - \frac{\chi}{\operatorname{tg}\chi}\right) + \sin\beta'\left(2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi - \chi\right)\right\} \\ \gamma = \alpha'' - \frac{1}{2}e^2\cos\beta'\sin\alpha'\left\{\cos\beta'\cos\alpha'\left(\frac{\chi}{\sin\chi} - \cos\chi\right) + 2\sin\beta'\frac{\sin^2\frac{1}{2}\chi}{\cos\frac{1}{2}\chi}\right\} \\ \chi_0 = \chi - \frac{1}{2}e^2\left\{\sin\chi\cos\chi + \cos^2\beta'\sin^2\alpha'(\chi - \sin\chi\cos\chi) \right. \\ \qquad\qquad \left. + 4\sin\beta'\cos\beta''\cos\alpha''\sin^2\frac{1}{2}\chi\right\} \end{cases}$$

Diese Ausdrücke gelten für jeden beliebigen Werth von χ, sieht man aber χ als eine kleine Grösse erster Ordnung an, und entwickelt bis auf Grössen sechster Ordnung, so vereinfachen sie sich und gehen über in

$$(53)\begin{cases} \alpha_0' = \alpha' + \frac{1}{6}e^2\chi^2\cos^2\beta'\sin\alpha'\cos\alpha' + \frac{1}{24}e^2\chi^3\sin\beta'\cos\beta'\sin\alpha' \\ \gamma = \alpha'' - \frac{1}{3}e^2\chi^2\cos^2\beta'\sin\alpha'\cos\alpha' - \frac{1}{8}e^2\chi^3\sin\beta'\cos\beta'\sin\alpha' \\ \chi_0 = \chi - \frac{1}{2}e^2\chi - \frac{1}{2}e^2\chi^2\sin\beta'\cos\beta''\cos\alpha'' + \frac{1}{8}e^2\chi^3(1 - \cos^2\beta'\sin^2\alpha') \end{cases}$$

45.

Die beiden für α_0' und γ eben erhaltenen Ausdrücke sind für unseren Zweck hinreichend genau, aber mit dem für χ_0 verhält es sich nicht so, da in demselben das mit $e^4\chi$ multiplicirte Glied fünfter Ordnung noch fehlt. Dieses soll jetzt entwickelt werden.

Setzt man die vollständigen Ausdrücke des Art. 43 für $\sin B'$, $\cos B'$, etc. in die letzte Gleichung (45), so ergiebt sich

$$\begin{aligned}(\chi-\chi_0)\sin\tfrac{1}{2}(\chi+\chi_0) = &-c\sin\chi\cos\alpha'+f\sin\chi\cos\alpha''+\varDelta\omega\sin\chi\cos\beta'\sin\alpha'\\ &-\tfrac{1}{2}(c^2+f^2)\cos\chi+cf\{\sin\alpha'\sin\alpha''+\cos\alpha'\cos\alpha''\cos\chi\}\\ &-c\varDelta\omega\sin\chi\sin\beta'\sin\alpha'-f\varDelta\omega\sin\chi\sin\beta''\sin\alpha''\\ &-\tfrac{1}{2}\varDelta\omega^2\{\cos\chi-\sin\beta'\sin\beta''\}\end{aligned}$$

indem das Dreieck des Art. 27 auch

$$\begin{aligned}&\cos\beta'\cos\beta''+\sin\beta'\sin\beta''\cos\omega=\\ &\sin\alpha'\sin\alpha''+\cos\alpha'\cos\alpha''\cos\chi\end{aligned}$$

giebt. Es ist ferner $\frac{1}{2}(\chi+\chi_0)=\chi-\frac{1}{2}(\chi-\chi_0)$, und daher

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\chi+\chi_0)} &= \frac{1}{\sin\chi}+\frac{\cos\chi}{2\sin^2\chi}(\chi-\chi_0)\\ &=\frac{1}{\sin\chi}-\frac{1}{2}c\frac{\cos\chi}{\sin^2\chi}\cos\alpha'+\frac{1}{2}f\frac{\cos\chi}{\sin^2\chi}\cos\alpha''+\frac{1}{2}\varDelta\omega\frac{\cos\chi}{\sin^2\chi}\cos\beta'\sin\alpha'\end{aligned}$$

Multiplicirt man daher die vorstehende Gleichung Seite für Seite mit dieser, so bekommt man

$$\left.\begin{aligned}\chi-\chi_0 = &-c\cos\alpha'+f\cos\alpha''+\varDelta\omega\cos\beta'\sin\alpha'\\ &-\tfrac{1}{2}c^2\frac{\cos\chi}{\sin\chi}\sin^2\alpha'+\frac{cf}{\sin\chi}\sin\alpha'\sin\alpha''-\frac{c\varDelta\omega}{\sin\chi}\cos\beta''\cos\alpha''\sin\alpha'\\ &-\tfrac{1}{2}f^2\frac{\cos\chi}{\sin\chi}\sin^2\alpha''+\frac{f\varDelta\omega}{\sin\chi}\cos\beta'\cos\alpha'\sin\alpha''-\frac{\varDelta\omega^2}{2\sin\chi}\cos\beta'\cos\alpha'\cos\beta''\cos\alpha''\end{aligned}\right\}(54)$$

Mit Uebergehung der höheren Potenzen von χ erhält man aus der letzten Gleichung (28)

$$\sin\beta''=\sin\beta'-\chi\cos\beta'\cos\alpha'-\tfrac{1}{2}\chi^2\sin\beta'$$

eliminirt man hiemit $\sin\beta''$ und $\sin^3\beta''$ aus dem Ausdruck für f des vor. Art., und bleibt in den mit e^4 multiplicirten Gliedern bei der ersten Potenz von χ stehen, so erhält man

$$f = \frac{1}{2} e^2 \left\{ \sin\beta' + \chi \cos\beta' \cos\alpha' + \frac{1}{2}\chi^2 \sin\beta' \right\} \cos\beta''$$
$$+ \frac{1}{8} e^4 \{ 3\sin\beta' - 2\sin^3\beta' + \chi\cos\beta'\cos\alpha' - 2\chi\sin^2\beta'\cos\beta'\cos\alpha' \} \cos\beta''$$

Der Ausdruck für $\Delta\omega$ giebt, wenn χ^2 übergangen wird,

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} e^2\chi\cos\beta'\sin\alpha' + \frac{1}{8} e^4\chi\cos^3\beta'\sin\alpha'$$

Der Ausdruck von c bleibt unverändert

$$c = \frac{1}{2} e^2\sin\beta'\cos\beta' + \frac{1}{8} e^4(\sin\beta'\cos\beta' + 2\sin\beta'\cos^3\beta')$$

Aus diesen Ausdrücken ergiebt sich

$$c^2 = \frac{1}{4} e^4\sin^2\beta'\cos^2\beta'$$
$$cf = \frac{1}{4} e^4 \left\{ \sin^2\beta'\cos\beta' + \chi\sin\beta'\cos^2\beta'\cos\alpha' + \frac{1}{2}\chi^2\sin^2\beta'\cos\beta' \right\} \cos\beta''$$
$$c\Delta\omega = \frac{1}{4} e^2\chi\sin\beta'\cos^2\beta'\sin\alpha'$$
$$f^2 = \frac{1}{4} e^4\{ \sin^2\beta' + 2\chi\sin\beta'\cos\beta'\cos\alpha' + \chi^2\sin^2\beta' + \chi^2\cos^2\beta'\cos^2\alpha' \} \cos^2\beta''$$
$$f\Delta\omega = \frac{1}{4} e^4\{ \chi\sin\beta'\cos\beta'\sin\alpha' + \chi^2\cos^2\beta'\sin\alpha'\cos\alpha' \} \cos\beta''$$
$$\Delta\omega^2 = \frac{1}{4} e^4\chi^2\cos^2\beta'\sin^2\alpha'$$

Substituirt man diese Ausdrücke in den obigen Ausdruck für $\chi - \chi_0$, und nimmt dabei nur auf die mit e^4 multiplicirten Glieder Rücksicht, so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} e^4 \Big\{ & -(\sin\beta'\cos\beta' + 2\sin\beta'\cos^3\beta')\cos\alpha' \\
& + (3\sin\beta' - 2\sin^3\beta' + \chi\cos\beta'\cos\alpha' - 2\chi\sin^2\beta'\cos\beta'\cos\alpha')\cos\beta''\cos\alpha'' \\
& + \chi\cos^4\beta'\sin^2\alpha' \\
& - \frac{1 - \frac{1}{3}\chi^2}{\chi} \sin^2\beta'\cos^2\beta'\sin^2\alpha' \\
& + 2\,\frac{1 + \frac{1}{6}\chi^2}{\chi} (\sin^2\beta'\cos\beta'\sin\alpha' + \chi\sin\beta'\cos^2\beta'\sin\alpha'\cos\alpha' \\
& \qquad\qquad + \frac{1}{2}\chi^2\sin^2\beta'\cos\beta'\sin\alpha')\cos\beta''\sin\alpha'' \\
& - 2\sin\beta'\cos^2\beta'\sin^2\alpha'\cos\beta''\cos\alpha'' \\
& - \frac{1 - \frac{1}{3}\chi^2}{\chi} (\sin^2\beta' + 2\chi\sin\beta'\cos\beta'\cos\alpha' + \chi^2\sin^2\beta' \\
& \qquad\qquad + \chi^2\cos^2\beta'\cos^2\alpha')\cos^2\beta''\sin^2\alpha'' \\
& + 2(\sin\beta'\cos^2\beta'\sin\alpha'\cos\alpha' + \chi\cos^3\beta'\sin\alpha'\cos^2\alpha')\cos\beta''\sin\alpha'' \\
& - \chi\cos^3\beta'\sin^2\alpha'\cos\alpha'\cos\beta''\cos\alpha'' \Big\}
\end{aligned}$$

Eliminirt man hierauf β'' und α'' durch die Gleichungen

$$\cos\beta''\sin\alpha'' = \cos\beta'\sin\alpha'$$
$$\cos\beta''\cos\alpha'' = \cos\beta'\cos\alpha' + \chi\sin\beta'$$

so zieht er sich in $\frac{1}{8}e^4\chi$ zusammen. Es wird daher bis auf Grössen sechster Ordnung vollständig

$$\chi_0 = \chi - \frac{1}{2}e^2\left(1+\frac{1}{4}e^2\right)\chi - \frac{1}{2}e^2\chi^2\sin\beta'\cos\beta''\cos\alpha''$$
$$+\frac{1}{8}e^2\chi^3(1-\cos^2\beta'\sin^2\alpha')$$

Man kann hieraus leicht den Ausdruck von χ durch χ_0 erhalten, zu welchem Ende blos $\chi = \chi_0 + \frac{1}{2}e^2\chi_0$ zu substituiren ist. Hiemit wird

$$\chi = \chi_0 + \frac{1}{2}e^2\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\chi_0 + \frac{1}{2}e^2\chi_0{}^2\sin\beta'\cos\beta''\cos\alpha'' \tag{55}$$
$$-\frac{1}{8}e^2\chi_0{}^3(1-\cos^2\beta'\sin^2\alpha')$$

die uns weiter unten nützlich sein wird.

46.

Um das gegenwärtige Thema vollständig auszuführen ist noch erforderlich, dass der Ausdruck des in der Ebene von χ_0 liegenden Bogens auf dem Ellipsoid ermittelt werde, der die Endpunkte (A) und (B) hat, die mit den Endpunkten der im Vorhergehenden betrachteten geodätischen Linie identificirt werden sollen; dieses soll jetzt vorgenommen werden.

Nehmen wir die im Art. 41 eingeführte Ebene vor, deren Gleichung

$$Ax + By + Cz = D$$

ist. Die Elimination von B' und Γ durch die Gleichungen

$$\sin B' = \frac{\sin\beta'}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta'}}\ ;\quad \cos B' = \frac{\cos\beta'\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta'}}$$

nebst den (46) und (48) verwandelt die beiden ersten (45) in

$$p\sin\chi_0\sin\alpha_0' = \cos\beta''\sin\lambda$$
$$p\sin\chi_0\cos\alpha_0' = \frac{-(1-e^2)\cos\beta'\sin\beta''+\sin\beta'\cos\beta''\cos\lambda - e^2\sin\beta'\cos\beta'}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta'}}$$

hiemit geben die Ausdrücke von A, B, etc. des Art. 41 in die folgenden über,

$$A = \quad p \sin \chi_0 \sin \alpha_0' \sin \beta'$$
$$B = -p \sin \chi_0 \cos \alpha_0' \sqrt{1-e^2 \cos^2\beta'}$$
$$C = -p \sin \chi_0 \sin \alpha_0' \sqrt{1-e^2} \,.\, \cos \beta'$$
$$D = \quad p \sin \chi_0 \sin \alpha_0' \,.\, ae^2 \sin \beta' \cos \beta'$$

und die Gleichung der Ebene wird

$$x \sin \beta' \sin \alpha_0' - y \sqrt{1-e^2\cos^2\beta'} \,.\, \cos \alpha_0' - z \sqrt{1-e^2} \,.\, \cos \beta' \sin \alpha_0' = ae^2 \sin \beta' \cos \beta' \sin \alpha_0'$$

Dreht man hierauf die Achsen der x und y um den Winkel $\varDelta$ in entgegengesetzter Richtung der wachsenden Längen, und nennt die neuen Coordinaten x' und y', so wird

$$x = \quad x' \cos \varDelta + y' \sin \varDelta$$
$$y = -x' \sin \varDelta + y' \cos \varDelta$$

und setzt man zugleich

$$z = z' - ae^2 \frac{\sin \beta'}{\sqrt{1-e^2}}$$

und substituirt diese Ausdrücke in die Gleichung der Ebene, so geht diese über in

$$x' (\cos \varDelta \sin \beta' \sin \alpha_0' + \sin \varDelta \sqrt{1-e^2\cos^2\beta'} \,.\, \cos \alpha_0')$$
$$+ y' (\sin \varDelta \sin \beta' \sin \alpha_0' - \cos \varDelta \sqrt{1-e^2\cos^2\beta'} \,.\, \cos \alpha_0')$$
$$- z' \sqrt{1-e^2} \,.\, \cos \beta' \sin \alpha_0' = 0$$

woraus hervorgeht, dass der Anfangspunkt der Coordinaten jetzt in unserer Ebene liegt, während er immer noch in der Umdrehungsachse des Ellipsoids liegen bleibt. Er liegt jetzt im Scheitel des oben erklärten körperlichen Winkels. Setzt man hierauf in dieser Gleichung den Coefficienten von y', nemlich

$$\sin \varDelta \sin \beta' \sin \alpha_0' - \cos \varDelta \sqrt{1-e^2\cos^2\beta'} \,.\, \cos \alpha_0' = 0$$

so wird bewirkt, dass unsere Ebene senkrecht auf der Ebene der $x'z'$ steht. Es folgt hieraus

$$(56) \quad \ldots \quad \operatorname{tg} \varDelta = \frac{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta'}}{\sin \beta'} \operatorname{cotg} \alpha_0'$$

und die Gleichung der Ebene wird

$$(57) \quad \ldots \quad z' = x' \operatorname{tg} U$$

wenn ausserdem

$$(58) \quad \ldots \quad \operatorname{tg} U = \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\cos \varDelta \sqrt{1-e^2}}$$

gesetzt wird. Die Ebene der $x'z'$ ist nun die Meridianebene des Ellipsoids, welche von unserer eingelegten Ebene rechtwinklich geschnitten wird, und die Lage dieser Meridianebene wird durch die Bögen $\varDelta$ und U bestimmt. Es ergiebt sich leicht, dass ihr Längenunterschied von der Meridianebene des Punkts (A) rückwärts gezählt $\varDelta$ ist, und dass ihre Durchschnittslinie mit derselben Ebene mit der Ebene des Aequators den Winkel U bildet.

47.

Die Einführung der Coordinaten x', y', z' in die Gleichung

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

des Ellipsoids giebt

$$(x'^2+y'^2)(1-e^2)+z'^2-2z'ae^2\frac{\sin\beta'}{\sqrt{1-e^2}}+a^2e^4\frac{\sin^2\beta'}{1-e^2}-a^2(1-e^2)=0$$

Führt man hierauf die Substitution

$$x'=\xi\cos U-\zeta\sin U$$
$$z'=\xi\sin U+\zeta\cos U$$

in die Gleichung (57) der Ebene ein, so erhält man $\zeta=0$, woraus hervorgeht, dass die Coordinaten ξ und y in dieser Ebene liegen. Setzt man daher

$$x'=\xi\cos U\,;\quad y'=\eta\,;\quad z'=\xi\sin U$$

in die Gleichung des Ellipsoids, so wird

$$\xi^2(1-e^2\cos^2U)+\eta^2(1-e^2)-2\xi ae^2\frac{\sin U\sin\beta'}{\sqrt{1-e^2}}$$
$$-a^2\frac{1-2e^2+e^4\cos^2\beta'}{1-e^2}=0$$

die Gleichung der Ellipse, unter welcher unsere eingelegte Ebene das Ellipsoid schneidet. Man kann auf bekannte Weise diese Ellipse auf ihre Achsen hinführen, aber da dieses für den hier zu verfolgenden Zweck überflüssig ist, so unterlasse ich es, und führe blos an, dass die grosse Achse dieser Ellipse immer in der Richtung der η, die kleine Achse hingegen in der Richtung der ξ liegt. Ihre Excentricität ist ferner immer kleiner, oder wenigstens nie grösser, wie die des Ellipsoids.

48.

Es soll nun der Bogen der eben erhaltenen Ellipse bestimmt werden, welcher sich auf dem Ellipsoid von dem Punkt (A) bis zum Punkt (B) erstreckt, und zu dem Ende führe ich die Polarcoordinaten r und θ durch die folgenden Gleichungen ein,

$$\xi = r\cos\theta$$
$$\eta = r\sin\theta$$

Setzt man zur Abkürzung ausserdem

$$A = 1 - e^2\cos^2 U$$
$$B = 1 - e^2$$
$$C = ae^2\frac{\sin\beta'\sin U}{\sqrt{1-e^2}}$$
$$D = a^2\frac{1-2e^2+e^4\cos^2\beta'}{1-e^2}$$

so bekommt man für die Gleichung der Ellipse

$$r^2(B+(A-B)\cos^2\theta) - 2rC\cos\theta - D = 0$$

Da nun die Differentialrechnung für jede ebene, stetige Linie, wenn S irgend einen unbestimmten Bogen derselben bezeichnet,

$$dS = d\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

und die Gleichung unserer Ellipse

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{(rA\cos\theta - C) - rB\cos\theta}{(rA\cos\theta - C)\cos\theta + rB\sin^2\theta}r\sin\theta$$

giebt, so bekommt irgend ein unbestimmter Bogen der letzteren den Ausdruck

$$S = \int r d\theta\frac{\sqrt{(rA\cos\theta - C)^2 + r^2B^2\sin^2\theta}}{(rA\cos\theta - C)\cos\theta + rB\sin^2\theta}$$

Die Gleichung der Ellipse giebt

$$r = \frac{K + C\cos\theta}{B + (A-B)\cos^2\theta}$$

wenn

$$K = \sqrt{BD + \{(A-B)D + C^2\}\cos^2\theta}$$

gesetzt wird. Man findet hieraus

$$rA\cos\theta - C = \frac{AK\cos\theta - BC\sin^2\theta}{B+(A-B)\cos^2\theta}$$
$$rB\sin\theta = \frac{BK\sin\theta + BC\sin\theta\cos\theta}{B+(A-B)\cos^2\theta}$$
$$K = (rA\cos\theta - C)\cos\theta + rB\sin^2\theta$$

hiemit, und da identisch

$$A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta = \{B + (A-B)\cos^2\theta\}^2 + (A-B)^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

ist, lässt sich der obige Ausdruck für S leicht auf die folgende Form bringen,

$$S = \int r d\theta \sqrt{1 + \frac{(K(A-B)\cos\theta - BC)^2\sin^2\theta}{K^2(B + (A-B)\cos^2\theta)^2}}$$

welche zur Anwendung geeigneter ist wie jene. Um die Integration auszuführen muss das Differential, wie man es auch umformen möchte, in eine unendliche Reihe aufgelöst werden, da die Rectification der Ellipse zu den unauflösbaren Aufgaben gehört. In der Reihenentwickelung des vorstehenden Ausdrucks reicht es aus, bei den Gliedern vierter Ordnung stehen zu bleiben, und hiedurch kürzt er sich schon wesentlich ab. Die obigen Ausdrücke für A, B, etc. zeigen, dass $A-B$ und C Grössen der zweiten Ordnung sind, und es ist daher die Grösse unter dem Wurzelzeichen im obigen Integral von der Eins nur um eine Grösse der vierten Ordnung verschieden. Berücksichtigt man diesen Umstand, so wird sogleich, bis auf Grössen sechster Ordnung genau,

$$S = \int d\theta \frac{K + C\cos\theta}{B + (A-B)\cos^2\theta} + \frac{1}{2a}\int d\theta (K(A-B)\cos\theta - BC)^2\sin^2\theta$$

49.

Die obigen Ausdrücke der Coefficienten geben

$$BD = a^2(1 - 2e^2 + e^4\cos^2\beta')$$
$$(A-B)D + C^2 = a^2(e^2 - e^4\cos^2\beta')\sin^2 U$$

woraus

$$K = a\Big\{1 - e^2 + \frac{1}{2}e^2\sin^2 U\cos^2\theta$$
$$- \frac{1}{2}e^4\sin^2\beta' + \frac{1}{2}e^4\sin^2\beta'\sin^2 U\cos^2\theta - \frac{1}{8}e^4\sin^4 U\cos^4\theta\Big\}$$

sich ergiebt. Ferner wird

$$C\cos\theta = a\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\sin\beta'\sin U\cos\theta$$
$$B + (A-B)\cos^2\theta = 1 - e^2 + e^2\sin^2 U\cos^2\theta$$
$$(K(A-B)\cos\theta - BC)^2\sin^2\theta = a^2e^4\{\sin^2\beta'\sin^2 U - 2\sin\beta'\sin^3 U\cos\theta$$
$$+ (\sin^4 U - 2\sin^2\beta'\sin^2 U)\cos^2\theta$$
$$+ 2\sin\beta'\sin^3 U\cos^3\theta - \sin^4 U\cos^4\theta\}$$

und hieraus bekommt man leicht

$$S = a\int d\theta \left\{1 - \tfrac{1}{2}e^4 \sin^2\beta' \cos^2 U + e^2\left[1 + \tfrac{3}{2}e^2 - e^2 \sin^2 U\right] \sin\beta' \sin U \cos\theta \right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{2}e^2(1 + e^2\cos^2 U)\sin^2 U \cos^2\theta - \tfrac{1}{8}e^4 \sin^4 U \cos^4\theta \right\}$$

und nach der Ausführung der Integration

$$S = a\left\{\left[1 - \left(\tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{4}e^4\right)\sin^2 U - \tfrac{1}{2}e^4 \sin^2\beta' \cos^2 U + \tfrac{13}{64}e^4 \sin^4 U\right]\theta \right.$$
$$+ e^2\left(1 + \tfrac{3}{2}e^2 - e^2 \sin^2 U\right) \sin\beta' \sin U \sin\theta$$
$$\left. - \tfrac{1}{8}e^2\left(1 + e^2 - \tfrac{3}{4}e^2 \sin^2 U\right)\sin^2 U \sin 2\theta - \tfrac{1}{256}e^4 \sin^4 U \sin 4\theta\right\}$$
$$+ \text{const.}$$

in welchem Ausdruck noch die Grenzen zu berücksichtigen sind.

50.

Um die Grenzen zu bestimmen, innerhalb welcher in unserer Aufgabe das vorstehende Integral genommen werden muss, bemerke ich, dass die Gleichungen (56) und (58), welche A und U bestimmen, auf die folgende Form gebracht werden können,

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{cotg} \alpha_0'}{\sin B'}\,; \quad \operatorname{tg} U = \frac{\operatorname{tg} B'}{\cos A}$$

Hieraus giebt sich zu erkennen, dass $90^0 - B'$ die Hypotenuse, und $90^0 - U$ die eine Cathete, so wie α_0' und A die beiden nicht rechtwinklichen Winkel eines rechtwinklichen, sphärischen Dreiecks sind, in welchem A von den beiden genannten Seiten eingeschlossen ist. Es ist nun leicht einzusehen, dass die unbestimmt verlängerte zweite Cathete dieses Dreiecks den Bogen θ bildet, und dass die Ebene, in welcher dieser liegt, auf der Oberfläche des Ellipsoids durch die beiden Punkte (A) und (B) geht, die den Anfangs- und den Endpunkt sowohl der jetzt betrachteten ebenen krummen Linie wie der im Vorhergehenden betrachteten geodätischen Linie bilden. Bezeichnet man für den Punkt (A) diese Cathete mit θ', dann ist ihre Verlängerung bis zum Punkte (B) dem oben eingeführten Bogen χ_0 gleich, gleichwie oben der Unterschied zwischen φ'' und φ' dem Bogen χ gleich war. Das Integral des vor. Art. muss daher

$$\text{von } \theta = \theta' \text{ bis } \theta = \theta' + \chi_0$$

genommen werden, und hiemit wird es

$$
\begin{aligned}
S = a \Big\{ & \Big[1 - \tfrac{1}{4} e^2 (1 + e^2) \sin^2 U - \tfrac{1}{2} e^4 \sin^2 \beta' \cos^2 U + \tfrac{18}{64} e^4 \sin^4 U \Big] \chi_0 \\
& + 2e^2 \Big(1 + \tfrac{3}{2} e^2 - e^2 \sin^2 U\Big) \sin \beta' \sin U \cos \Big(\theta' + \tfrac{1}{2} \chi_0\Big) \sin \tfrac{1}{2} \chi_0 \\
& - \tfrac{1}{4} e^2 \Big(1 + e^2 - \tfrac{3}{4} e^2 \sin^2 U\Big) \sin^2 U \cos (2\theta' + \chi_0) \sin \chi_0 \\
& - \tfrac{1}{128} e^4 \sin^4 U \cos (4\theta' + 2\chi_0) \sin 2\chi_0 \Big\}
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung von U und θ' giebt das oben erklärte Dreieck, ausser den schon angeführten Relationen,

$$
\begin{aligned}
\sin U \sin \theta' &= \cos B' \cos \alpha_0' \\
\sin U \cos \theta' &= \sin B' \\
\cos U &= \cos B' \sin \alpha_0'
\end{aligned}
$$

womit der gesuchte elliptische Bogen bis auf Grössen sechster Ordnung vollständig bestimmt ist.

51.

Die vorhergehenden Entwickelungen fassen die Auflösung unserer zweiten geodätischen Hauptaufgabe in sich, nemlich:

»Wenn die astronomische Lage zweier Punkte auf dem Erdellip- »soid gegeben ist, die geodätische Linie zu finden, die diese Punkte »mit einander verbindet, so wie die Azimuthe der letzteren an diesen »beiden Endpunkten.«

Wenn die geodätische Linie kurz ist, so ist die Auflösung, die das Vorhergehende giebt, direct, aber wenn die geodätische Linie lang ist, so wird sie strenge genommen indirect, die erste Annäherung giebt jedoch schon ein so genaues Resultat, dass kaum eine Verbesserung übrig bleibt, und wenn sie nöthig wird so klein ist, dass sie durch einfache Differentialformeln ausgeführt werden kann, und daher die Durchführung einer zweiten Annäherung überflüssig wird.

52.

Die gegebenen Stücke sind hier B', B'', λ, und die erste Arbeit besteht darin, dass man entweder durch die strenge allgemeine Gleichung

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} B \sqrt{1 - e^2}$$

oder durch die Reihenentwickelungen derselben, die im Art. 25 eingeführt

wurden, die reducirten Breiten β' und β'' rechnet. Hierauf sind durch die Gleichungen (49) Γ, und die (45) α_0', γ, χ_0 zu berechnen, die aber zu diesem Zweck zusammen gezogen, und auf einfachere Formen hingeführt werden können. Durch ein, dem im Art. 27 angewandten, ganz ähnliches Verfahren vermeidet man die besondere Berechnung von Γ, und kommt auf die folgenden Ausdrücke

$$(59) \quad \begin{cases} p \cos n \sin m = \sqrt{1-e^2}\,.\sin\beta'' + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin\beta' \\ p \cos n \cos m = \cos\beta'' \cos\lambda \\ p \sin n = \cos\beta'' \sin\lambda \\ \cos n \sin q = \frac{1}{p}\left\{\sqrt{1-e^2}\,.\sin\beta'' + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin\beta'\right\}\sin\lambda \\ \cos n \cos q = \cos\lambda \end{cases}$$

Nachdem hiedurch m, n, q berechnet worden sind, wobei die Controlle statt findet, dass die beiden Werthe von $\cos n$, die aus den drei ersten, und den beiden letzten hervorgehen, mit einander übereinstimmen müssen, erhält man

$$(60) \quad . \quad . \quad \begin{cases} \sin\chi_0 \sin\alpha_0' = \sin n \\ \sin\chi_0 \cos\alpha_0' = \cos n \sin(B'-m) \\ \sin\chi_0 \sin(\gamma+q) = \sin n \cos(B'-m) \\ \sin\chi_0 \cos(\gamma+q) = \sin(B'-m) \\ \cos\chi_0 = \cos n \cos(B'-m) \end{cases}$$

welche α_0', γ, χ_0 geben, und bei deren Anwendung ausser einer der vorhin genannten, ähnlichen Controlle, auch die statt findet, dass die erhaltenen numerischen Werthe für $\cos\chi_0$ und $\sin\chi_0$ einem und demselben Bogen angehören müssen.

Setzt man nun den Fall, dass s klein ist, so geben die Gleichungen (53) und (55), nemlich

$$(61) \quad \begin{cases} \alpha' = \alpha_0' - \frac{e^2}{6r}\chi_0^2 \cos^2\beta' \sin\alpha_0' \cos\alpha_0' - \frac{e^2}{24r^2}\chi_0^3 \sin\beta' \cos\beta' \sin\alpha_0' \\ \alpha'' = \gamma + \frac{e^2}{8r}\chi_0^2 \cos^2\beta' \sin\alpha_0' \cos\alpha_0' + \frac{e^2}{8r^2}\chi_0^3 \sin\beta' \cos\beta' \sin\alpha_0' \\ \chi = \chi_0 + \frac{1}{2}e^2\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)\chi_0 + \frac{e^2}{2r}\chi_0^2 \sin\beta' \cos\beta'' \cos\gamma \\ \qquad - \frac{e^2}{3r^2}\chi_0^3 (1 - \cos^2\beta' \sin^2\alpha_0' \end{cases}$$

mit aller wünschenswerthen Genauigkeit α', α'', χ, worauf die (17), nachdem β_0, μ, φ' berechnet worden sind, s giebt. Hiemit ist also in

dem Falle, wo s klein ist, eine directe Auflösung unserer Aufgabe erlangt, wie oben angekündigt wurde. Die Gleichung (17) wird weiter unten auf die zur Anwendung geeigneteste Form gebracht werden. Die Logarithmen der Constanten der vorstehenden Ausdrücke sind

$$\log\sqrt{1-e^2} = 9.9985458\,, \qquad \log\frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} = 7.8258646-10$$

$$\log\frac{e^2}{6r} = 1.73183-10\,, \qquad \log\frac{e^2}{24r^2} = 5.8154\ -20$$

$$\log\frac{e^2}{3r} = 2.03286-10\,, \qquad \log\frac{e^2}{8r^2} = 6.2925\ -20$$

$$\log\tfrac{1}{2}e^2\left(1+\tfrac{3}{4}e^2\right) = 7.52555-10\,, \qquad \log\frac{e^2}{2r} = 2.20895-10$$

$$\log\frac{e^2}{3r^2} = 6{:}7185-20$$

und setzen voraus, dass in allen Gliedern der Ausdrücke (61) χ_0 in Secunden ausgedrückt substituirt werde.

53.

Da die im vor. Art. vorgetragene Auflösung unserer Aufgabe sich nur auf kleine Werthe von s erstreckt, und in Folge dessen mehrere Bögen der Gleichungen (59) und (60) auch klein werden, so kann man statt der strengen Formeln wieder eine Reihenentwickelung anwenden, die jetzt abgeleitet werden soll.

Durch Zuziehung der Gleichungen (46), (47) (48) geben die (59)

$$\operatorname{tg} m = \frac{\operatorname{tg}(\beta''+f)}{\cos\lambda}$$

$$\sin n = \cos(\beta''+f)\sin\lambda$$

$$\operatorname{tg} q = \sin(\beta''+f)\operatorname{tg}\lambda$$

wo wieder $\Gamma = \beta''+f$ gesetzt worden ist. Setzt man ferner

$$K = \tfrac{1}{2}(\alpha_0'+\gamma+q)\ ;\quad L = \tfrac{1}{2}(\alpha_0'-\gamma-q)$$

so bekommt man aus den (60)

$$\operatorname{tg} K = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}n}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}N}$$

$$\operatorname{tg} L = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}n\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}N$$

wenn überdies $N = B'-m$ gesetzt wird.

Sei wieder

$$i = \sqrt{1-e^2}-1+\frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\sin\beta'}{\sin\beta''} \quad .\ .\ .\ . \quad (62)$$

wo i in Secunden auszudrücken ist, und daher

$$\sqrt{1-e^2}-1 = -689'',4962 \; ; \quad \log\frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} = 3,1402897$$

wird. Die Gleichung (51) giebt hierauf

$$(63) \quad \ldots \quad \begin{aligned} \log f &= \log . i \sin\beta'' \cos\beta'' - \nu i \sin^2\beta'' \\ \log\nu &= 4.32336 \end{aligned}$$

womit f gegeben ist. Die Gleichungen für n, q, m können ebenso behandelt werden wie die des Art. 28 für θ, η, τ. Denn verwandelt man, nachdem $m = \beta'' + f + g$ gesetzt worden ist,

$$\begin{matrix} & \theta, & \eta, & \alpha', & \chi, & \tau \\ \text{bez. in} & n, & q, & 90^0 - \beta'' - f, & \lambda, & g \end{matrix}$$

so werden die ursprünglichen Gleichungen des Art. 28 mit den obigen identisch. Die Ausdrücke des Art. 31 geben daher sogleich

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} q_0 &= \lambda\sin(\beta''+f) \\ n_0 &= \lambda\cos(\beta''+f) \\ \log q &= \log q_0 + 4\mu n_0^2 + 112\mu' n_0^4 - 96\mu' n_0^2 q_0^2 \\ \log n &= \log n_0 - 2\mu q_0^2 - 8\mu' q_0^4 - 96\mu' n_0^2 q_0^2 \\ \log g &= \log\varrho' nq + \mu q^2 + \mu n^2 + 7\mu' q^4 - 30\mu' q^2 n^2 + 7\mu' n^4 \end{aligned} \right.$$

wo ϱ, μ, μ' dieselben Werthe haben wie im Art. 31. Hierauf wird

$$N = B' - \beta'' - f - g$$

Die übrigen Bögen müssen auf andere Art entwickelt werden. Setzt man

$$(65) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} h &= \mu n^2 + 7\mu' n^4 \\ H &= \mu N^2 + 7\mu' N^4 \end{aligned} \right.$$

so erhält man

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}n = \log\tfrac{1}{2}n + h$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}N = \log\tfrac{1}{2}N + H$$

und hierauf

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} \log\operatorname{tg} K &= \log\frac{n}{N} + h - H \\ \log L &= \log\tfrac{1}{2}\varrho' nN + h + H - 30\mu n^2 N^2 \end{aligned} \right.$$

worauf sich

$$(67) \quad \ldots \quad \alpha_0' = K + L\,, \quad \gamma = K - L - q$$

ergiebt. Zur Entwickelung von χ_0 giebt die letzte (60) zuerst

$$\chi_0^2 - \frac{1}{12}\chi_0^4 + \frac{1}{360}\chi_0^6$$
$$= n^2 + N^2 - \frac{1}{12}n^4 - \frac{1}{2}n^2N^2 - \frac{1}{12}N^4 + \frac{1}{360}n^6 + \frac{1}{24}n^4N^2 + \frac{1}{24}n^2N^4 + \frac{1}{360}N^6$$

woraus mit hinreichender Annäherung

$$\chi_0^4 = n^4 + 2n^2N^2 + N^4 - \frac{2}{3}n^4N^2 - \frac{2}{3}n^2N^4$$
$$\chi_0^6 = n^6 + 3n^4N^2 + 3n^2N^4 + N^6$$

hervorgehen. Es wird daher

$$\chi_0^2 = n^2 + N^2 - \frac{1}{3}n^2N^2 - \frac{1}{45}n^4N^2 - \frac{1}{45}n^2N^4$$

Sei nun

$$\left.\begin{aligned} t\sin T &= n \\ t\cos T &= N \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

wodurch

$$\chi_0^2 = t^2 - \frac{1}{3}t^4\sin^2 T\cos^2 T - \frac{1}{45}t^6\sin^2 T\cos^2 T$$

wird, so bekommt man leicht

$$\log\chi_0 = \log t - 2\mu\frac{n^2N^2}{t^2} - 16\mu' n^2N^2 - \mu''\left(2\mu\frac{n^2N^2}{t^2}\right)^2 \quad . \quad (69)$$

wo

$$\log\mu'' = \log 10\frac{\mu'}{\mu^2} = 0,3622$$

ist, und μ und μ' wieder dieselben sind wie im Art. 31. Hiemit ist die Entwickelung ausgeführt. Es darf nicht befremden, dass hier K durch den Quotienten zweier kleinen Zahlen bestimmt wird, da mit der Natur der Aufgabe unzertrennlich verbunden ist, dass wenn s klein ist, eine kleine Aenderung in B' oder B'' eine grosse Aenderung der Azimuthe nach sich zieht, wenn nicht etwa diese auch klein, oder nahe gleich 180° sind. In diesem Falle giebt der Ausdruck für K diesen Bogen mit derselben Genauigkeit, mit welcher die anderen Bögen erhalten werden, wenn aber diese Bedingung hinsichtlich der Azimuthe nicht statt findet, so muss man, um K eben so genau zu erhalten wie die übrigen Bögen, dafür Logarithmen von einer grösseren Anzahl von Decimalen anwenden.

54.

Wenn s beliebig ist, so muss das eben gegebene Verfahren eine Aenderung erleiden, weil dann nicht angenommen werden kann, dass die Gleichungen (52), und viel weniger die (53) oder (61) genaue Werthe

der Unterschiede $\alpha'-\alpha_0'$, $\alpha''-\gamma$, $\chi-\chi_0$ geben. Man rechne jetzt aus den Gleichungen

$$(70)\quad \begin{cases} p\cos n\sin m = \sqrt{1-e^2}\,.\sin\beta'' + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin\beta' \\ p\cos n\cos m = \cos\beta''\cos\lambda \\ p\sin n \quad\;\; = \cos\beta''\sin\lambda \end{cases}$$

m und n, und dann aus den folgenden

$$(71)\;\ldots\quad \begin{cases} \sin\chi_0\sin\alpha_0' = \sin n \\ \sin\chi_0\cos\alpha_0' = \cos n\sin(B'-m) \\ \cos\chi_0 \quad\;\; = \cos n\cos(B'-m) \end{cases}$$

α_0' und χ_0. Die Bögen q und γ, so wie p, werden nicht gebraucht, und brauchen daher nicht berechnet zu wérden, will man aber p einestheils aus den vorstehenden Gleichungen mit berechnen, und anderntheils aus der (47), die zu diesem Zweck wie folgt gestellt werden kann,

$$(72)\;.\quad p = \sqrt{1-e^2\sin^2\beta'' + 2e^2\sin\beta'\sin\beta'' + \frac{e^4}{1-e^2}\sin^2\beta'}$$

so bekommt man eine Controlle der Rechnung mehr. Ich wiederhole hier

$$\log\sqrt{1-e^2} = 9.9985458\,,\quad \log\frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} = 7.8258646$$

55.

Hierauf sind durch die Ausdrücke (52) genäherte Werthe von α' und χ zu berechnen, die ich um auszudrücken, dass sie nicht die genauen Werthe sind, mit (α') und (χ) bezeichnen werde. Ohne den Grad der Genauigkeit zu verletzen können diese Gleichungen wie folgt geschrieben werden,

$$(73)\begin{cases} (\alpha') = \alpha_0' - \frac{1}{2}re^2\cos\beta'\sin\alpha_0'\left\{\cos\beta'\cos\alpha_0'\left(1-\frac{\chi_0}{r\,\mathrm{tg}\,\chi_0}\right)+\sin\beta'\left(2\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\chi_0-\frac{\chi_0}{r}\right)\right\} \\ (\chi) = \chi_0 + \frac{1}{2}re^2\left\{\sin\chi_0\cos\chi_0 + \cos^2\beta'\sin^2\alpha_0'\left(\frac{\chi_0}{r}-\sin\chi_0\cos\chi_0\right)\right. \\ \qquad\left. + 4\sin^2\beta'\sin\chi_0\sin^2\frac{1}{2}\chi_0 + 4\sin\beta'\cos\beta'\cos\alpha_0'\cos\chi_0\sin^2\frac{1}{2}\chi_0\right\} \end{cases}$$

wo wieder $r = 206265''$ ist. Der Logarithmus der Constante ist hier

$$\log\frac{1}{2}re^2 = 2.83781$$

56.

Durch Hülfe der eben erhaltenen Werthe von (α') und (χ) kann man nun genäherte Werthe von φ', β_0, μ, $\Delta\omega$ berechnen, die ich wieder, um anzudeuten, dass sie nicht genau sind, mit den in Klammern eingeschlossenen Buchstaben bezeichnen werde. Dem Vorhergehenden zufolge erhält man jetzt

$$\left.\begin{aligned} \sin(\beta_0)\sin(\varphi') &= \cos\beta'\cos(\alpha') \\ \sin(\beta_0)\cos(\varphi') &= \sin\beta' \\ \cos(\beta_0) &= \cos\beta'\sin(\alpha') \\ \log(\mu) = \log(b\sin^2(\beta_0)) - c\sin^2(\beta_0) &+ c'\sin^4(\beta_0) - c''\sin^6(\beta_0) \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

wo wie im Art. 22

$$\log b = 7.2252588-10$$

$\log c = 7.164073-10$; $\log c' = 4.6002-10$; $\log c'' = 2.198-10$

und darauf der Gleichung (25) analog

$$(\Delta\omega) = mE(\chi)\cos(\beta_0) - E'\cos(\beta_0)\cos(2(\varphi') + (\chi))\sin(\chi) \quad (75)$$

*) Man erkennt leicht, dass der Fehler in $(\Delta\omega)$ weit kleiner sein muss wie der in (α'). Um Alles beisammen zu haben führe ich auch hier aus dem Art. 23 die Ausdrücke der Coefficienten an

$$\log E = -\varepsilon(\mu) - \zeta(\mu)^2$$
$$\log E' = \log\eta(\mu)$$

$\log m = 7.5241068-10$; $\log\varepsilon = 9.3367543-10$

$\log\zeta = 9.2118-10$; $\log\eta = 2.53678$

Hierauf bekommt man

$$(\omega) = \lambda + (\Delta\omega)$$

und es werden genauere Werthe von α', α'', χ durch Anwendung der Gleichungen (50) erlangt, in welche (ω) statt ω zu setzen ist.

57.

Durch nochmalige Anwendung einer, der im Art. 27 ausgeführten, analogen Transformation, verändert man die genannten Gleichungen in die folgenden. Nachdem aus

*) Ich habe hier E und E' statt (E) und (E') gesetzt, weil die Werthe dieser Grössen sogleich so genau erhalten werden, dass eine Verbesserung derselben überflüssig wird.

$$\begin{aligned}
\cos n' \sin m' &= \sin \beta'' \\
\cos n' \cos m' &= \cos \beta'' \cos (\omega) \\
\cos n' \sin q' &= \sin \beta'' \sin (\omega) \\
\cos n' \cos q' &= \cos (\omega) \\
\sin n' &= \cos \beta'' \sin (\omega)
\end{aligned}$$

die Bögen m', q', n' berechnet worden sind, geben die folgenden

$$\begin{aligned}
\sin \chi \sin \alpha' &= \sin n' \\
\sin \chi \cos \alpha' &= \cos n' \sin (\beta' - m') \\
\sin \chi \sin (\alpha'' + q') &= \sin n' \cos (\beta' - m') \\
\sin \chi \cos (\alpha'' + q') &= \sin (\beta' - m') \\
\cos \chi &= \cos n' \cos (\beta' - m')
\end{aligned}$$

die Bögen α', α'', χ, und zwar sind die Werthe dieser, die hieraus hervorgehen, schon sehr genau, und können überhaupt nur in Folge der Anwendung von (ω) statt ω mit einem Fehler behaftet sein. Da dieser jedenfalls sehr klein ist, so kann er durch die Anwendung von einfachen Differentialformeln berichtigt werden.

58.

Setzt man

$$\delta\alpha' = \alpha' - (\alpha')\ ; \quad \delta\chi = \chi - (\chi)\ ; \quad \text{etc.}$$

so geben die Gleichungen des vorvor. Art.

$$\delta\beta_0 = -\sin (\varphi')\,\delta\alpha'\ ; \quad \delta\varphi' = -\frac{\cos (\varphi')}{\operatorname{tg} (\beta_0)}\,\delta\alpha'$$

Die Gleichung

$$\mu = \tfrac{1}{4}\,\varepsilon \sin {}^2\beta_0 \mp \ldots$$

des Art. 17 giebt ferner hinreichend genau

$$\delta \log \mu = \frac{2M}{r} \operatorname{cotg} (\beta_0)\,\delta\beta_0$$

wo M den Modul der Briggischen Logarithmen bezeichnet, und daher

$$\log \frac{2M}{r} = 4{,}6244 - 10$$

ist, wenn $\delta\beta_0$ in Secunden ausgedrückt wird. Die Gleichung

$$E = 1 - \tfrac{1}{2}\mu + \ldots.$$

giebt ausserdem

$$\delta E = -\tfrac{1}{4} e^2 \sin(\beta_0)\cos(\beta_0)\,\delta\beta_0$$

die aber nicht beachtet zu werden braucht, da sie von einer höheren Ordnung ist wie die übrigen Gleichungen*). Die Gleichung für $(\varDelta\omega)$ giebt nach diesem

$$\delta\varDelta\omega = \frac{(\varDelta\omega)}{(\chi)}\delta\chi - \frac{(\varDelta\omega)}{r}\operatorname{tg}(\beta_0)\,\delta\beta_0$$

und sollte der hieraus hervorgehende Werth von $\delta\varDelta\omega$ merklich sein, so werden die Verbesserungen der durch die Gleichungen des vor. Art. erhaltenen Werthe von χ, α', α'' die folgenden

$$\begin{aligned}
\varDelta\chi &= \cos\beta''\sin\alpha''\,\delta\varDelta\omega\\
\varDelta\alpha' &= \frac{\cos\beta''\cos\alpha''}{\sin\chi}\,\delta\varDelta\omega\\
\varDelta\alpha'' &= \frac{\cos\beta'\cos\alpha'}{\sin\chi}\,\delta\varDelta\omega
\end{aligned}$$

worauf man die genauen Werthe

$$\chi + \varDelta\chi\,;\quad \alpha' + \varDelta\alpha'\,;\quad \alpha'' + \varDelta\alpha''$$

erhält. Die Werthe von $\delta\varphi'$ und $\delta.\log\mu$ werden zwar hier nicht gebraucht, aber sie finden ihre Anwendung bei der Berechnung von s aus χ, φ', μ.

59.

Es ist hier noch eine besondere Klasse von Fällen zu betrachten. Das Verfahren des Art. 52 u. f. kann nur bei sehr kleinen Werthen von s angewandt werden, indem die Ausdrücke (61) bei wachsendem s bald aufhören die Hunderttheile von Secunden richtig zu geben. Wenn daher s etwa 2° übersteigt, so verfährt man sicherer, wenn man sich des Verfahrens des Art. 54 u. f. bedient. Wenn aber s die eben beiläufig bezeichnete Grenze nicht viel übersteigt, so kann man sich statt der strengen Formeln des Art. 57 einer Reihenentwickelung derselben bedienen, die der des Art. 53 vollkommen analog ist, und ohne Weiteres durch Veränderung der Bezeichnungen aus dieser erhalten wird. Da jetzt $f=0$, und β' für B', n' für n, u. s. w. zu setzen ist, so führt die Reihenentwickelung der Formeln des Art. 57 auf die folgenden zu berechnenden Ausdrücke:

*) S. die Anmerkung zu Art. 56.

$$q_0' = (\omega)\sin\beta''$$
$$n_0' = (\omega)\cos\beta''$$
$$\log q' = \log q_0' + 4\mu n_0'^2 + 112\mu' n_0'^4 - 96\mu' n_0'^2 q_0'^2$$
$$\log n' = \log n_0' - 2\mu q_0'^2 - 8\mu' q_0'^4 - 96\mu' n_0'^2 q_0'^2$$
$$\log g' = \log \varrho' n' q' + \mu q'^2 + \mu n'^2 + 7\mu' q'^4 - 30\mu' q'^2 n'^2 + 7\mu' n'^4$$

worauf

$$N' = \beta' - \beta'' - g$$

wird. Ferner

$$h' = \mu n'^2 + 7\mu' n'^4$$
$$H' = \mu N'^2 + 7\mu' N'^4$$
$$\log \operatorname{tg} K' = \log \frac{n'}{N'} + h' - H'$$
$$\log L' = \log \tfrac{1}{2}\varrho' n' N' + h' + H' - 30\mu' n'^2 N'^2$$

worauf sich

$$\alpha' = K' + L' \; ; \quad \alpha'' = K' - L' - q'$$

ergiebt. Ferner

$$t' \sin T' = n'$$
$$t' \cos T' = N'$$

worauf man

$$\log\chi = -2\mu\frac{n'^2 N'^2}{t'^2} - 16\mu' n'^2 N'^2 - \mu''\left(2\mu\frac{n'^2 N'^2}{t'^2}\right)^2$$

wo

$$\log\mu'' = 0.3622$$

erhält, und die Entwickelung ausgeführt ist. Die Bemerkungen die der Entwickelung im Art. 53 hinzugefügt wurden, haben hier dieselbe Geltung. Um einer Verwechselung vorzubeugen führe ich hier wieder an, dass ϱ', μ, μ' dieselben sind wie im Art. 31.

60.

Betrachten wir jetzt den Fall des Art. 33 in Bezug auf die gegenwärtige Aufgabe, nemlich den Fall, wo bei einem grossen Werthe von s die Azimuthe klein, oder nahe gleich 180° sind. Bei den jetzt gegebenen Stücken wird sich dieser Fall dadurch zu erkennen geben, dass λ klein, und die Polhöhen sehr von einander verschieden sind. Obgleich jetzt wieder die Methode des Art. 54 u. f. unverändert angewandt werden könnte, so ist doch die besondere Betrachtung dieses Falles von Interesse, weil in demselben Reihenentwickelungen angewandt werden können, die von den vorhergehenden etwas verschieden sind. Da hier

λ ein kleiner Bogen ist, so haben zwar die betreffenden Reihen des Art. 53 für q, n, g wieder Geltung, aber da q jetzt nicht weiter gebraucht wird wie zur Berechnung von g, so kann man die Gleichung für q weglassen, und im Ausdruck für g statt q die Hülfsgrösse q_0 einführen. Lässt man überdies die Glieder sechster Ordnung weg, die hier nie Merkliches geben können, so werden diese Formeln einfach, und die anzuwendenden Ausdrücke werden die folgenden,

$$\log f = \log . i \sin \beta'' \cos \beta'' - \nu i \sin^2 \beta''$$

wo i und ν dieselben sind wie im Art. 53. Ferner

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= \lambda \sin (\beta'' + f) \\ n_0 &= \lambda \cos (\beta'' + f) \\ \log n &= \log n_0 - 2\mu q_0^2 - 8\mu' q_0^4 - 96\mu' n_0^2 q_0^2 \\ \log g &= \log \varrho' n q_0 + \mu q_0^2 + 5\mu n^2 \\ N &= B' - \beta'' - f - g \end{aligned}\right\} \quad . \quad (76)$$

Die Entwickelung der Gleichungen (60) wird jetzt anders wie vorher, da N nicht mehr klein ist. Diese Gleichungen geben

$$\operatorname{tg} \alpha_0' = \frac{\operatorname{tg} n}{\sin N}; \quad \operatorname{tg} \chi_0 = \frac{\operatorname{tg} N}{\cos \alpha_0'}$$

Setzt man nun $\chi_0 = N + u$, und verwandelt man in den Gleichungen des Art. 29

$$\begin{array}{cccccc} \omega, & \theta, & \beta' - \eta, & v & \text{bez. in} \\ \alpha_0', & n, & 90^0 - N, & u & \end{array}$$

so werden zwei derselben mit den vorstehenden identisch. Man bekommt daher

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{n}{\sin N} \\ b_0 &= \frac{n}{\operatorname{tg} N} \\ \log \alpha_0' &= \log a_0 - 4\mu b_0^2 + 112\mu' a_0^4 + 96\mu' a_0^2 b_0^2 \\ \log u &= \log \varrho' n b_0 - \mu \alpha_0'^2 - 2\mu b_0^2 \\ \chi_0 &= N + u \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

61.

Nachdem nun α_0' und χ_0 berechnet worden sind, müssen wieder aus den Ausdrücken (73) (α') und (χ) berechnet werden, worauf die Gleichungen des Art. 56 zur Berechnung von (φ'), (β_0), (μ), $(\varDelta\omega)$ verwandt werden können. Statt dieser ist es aber angemessen, die betref-

fenden Reihenentwickelungen des Art. 33 zu gebrauchen, von welchen die für $\log \varepsilon'$ jetzt ausgeschlossen werden kann. Schliesst man wieder die Unbekannten in Klammern ein, um anzudeuten, dass sie nicht die genauen Werthe sind, so ist zu berechnen,

$$(78)\quad \begin{cases} \varepsilon_0' = (\alpha')\sin\beta' \\ \zeta_0 = (\alpha')\cos\beta' \\ \log(\zeta) = \log\zeta_0 - 2\mu\varepsilon_0'^2 - 8\mu'\varepsilon_0'^4 - 96\mu'\varepsilon_0'^2\zeta_0^2 \\ \log(\pi') = \log\varrho'(\zeta)\varepsilon_0' + \mu\varepsilon_0'^2 + 5\mu(\zeta)^2 \end{cases}$$

Ferner

$$(79)\quad \begin{cases} \log(\mu) = \log.b\cos^2(\zeta) - c\cos^2(\zeta) + c'\cos^4(\zeta) - c''\cos^6(\zeta) \\ (\varDelta\omega) = mE(\chi)\sin(\zeta) + E'\sin(\zeta)\cos(2(\beta' + (\pi')) - (\chi))\sin(\chi) \\ (\omega) = \lambda + (\varDelta\omega) \end{cases}$$

wo die Coefficienten b, c, d, E, E' die früher angegebenen Werthe haben.

62.

Für die Gleichungen des Art. 57 ist wieder eine Reihenentwickelung zulässig, die der vorigen ähnlich ist, und von welcher ich daher das Resultat ohne Weiteres sogleich ansetzen werde.

$$(80)\quad \begin{cases} q_0' = (\omega)\sin\beta'' \\ n_0' = (\omega)\cos\beta'' \\ \log q' = \log q_0' + 4\mu n_0'^2 + 112\mu' n_0'^4 - 96\mu' n_0'^2 q_0'^2 \\ \log n' = \log n_0' - 2\mu q_0'^2 - 8\mu' q_0'^4 - 96\mu' n_0'^2 q_0'^2 \\ \log g' = \log\varrho' q' n' + \mu q'^2 + \mu n'^2 + 7\mu' q'^4 - 30\mu' q'^2 n'^2 + 7\mu' n'^4 \\ N' = \beta' - \beta'' - g' \end{cases}$$

und nachdem $\gamma' = \alpha'' + q'$, und $\chi = N' + u'$ gesetzt worden sind,

$$(81)\quad \begin{cases} a_0' = \dfrac{n'}{\sin N'} \\ \gamma_0' = \dfrac{n'}{\operatorname{tg} N'} \\ \log\alpha' = \log a_0' - 4\mu\gamma_0'^2 + 112\mu'\gamma_0'^4 + 96\mu'\gamma_0'^2 a_0'^2 \\ \log\gamma' = \log\gamma_0' - 2\mu\gamma_0'^2 - 2\mu a_0'^2 + 40\mu'\gamma_0'^4 + 176\mu'\gamma_0'^2 a_0^2 - 8\mu' a_0'^4 \\ \log u' = \log\varrho' n'\gamma' + \mu\alpha'^2 + 4\mu'\gamma'^4 - 4\mu'\alpha'^2\gamma'^2 + 7\mu'\alpha'^4 \\ \alpha'' = \gamma' - q' \\ \chi = N' + u' \end{cases}$$

Nachdem hieraus α', α'', χ berechnet worden sind, müssen wo nöthig

die Differentialformeln des Art. 58 angewandt werden, von welchen die ersten jetzt die folgende Form annehmen,

$$\delta\zeta = \cos(\beta' + \pi')\delta\alpha' \;;\quad \delta\pi' = \sin(\beta' + \pi')\operatorname{tg}\zeta\delta\alpha'$$

$$\delta.\log\mu = -\frac{2M}{r}\operatorname{tg}\zeta\delta\zeta$$

$$\delta\varDelta\omega = \frac{(\varDelta\omega)}{(\chi)}\delta\chi + \frac{(\varDelta\omega)}{r}\operatorname{cotg}\zeta\delta\zeta$$

Der Fall, in welchem die Azimuthe nahe $= 180^0$ sind, braucht hier nicht besonders betrachtet zu werden, da man ihn immer dadurch vermeiden kann, dass man von den beiden gegebenen Polhöhen die nördlichere mit B' bezeichnet.

63.

Der Fall $\lambda = 0$, den man auch damit bezeichnen kann, dass die Länge des Meridianbogens zu bestimmen ist, der von zwei gegebenen Punkten, deren Polhöhe B' und B'' sind, eingeschlossen ist, und der den Gegensatz zu dem im Art. 34 betrachteten Falle bildet, kann kurz erörtert werden. Es wird vor Allem, wie a. a. O.,

$$\log\mu = 7.2238036$$

und da auch $\omega = 0$ ist, so geben die Gleichungen des Art. 34 sogleich

$$\chi = \pm(\beta' - \beta'')\;,\quad \varphi' = 90 \mp \beta'$$

wo die oberen Zeichen gelten wenn $\beta' > \beta''$ und die unteren wenn $\beta' < \beta''$ ist.

Aus χ wird, wie vorher, durch die weiter unten zu entwickelnden Ausdrücke σ berechnet.

64.

Der specielle Fall der vorhergehenden Hauptaufgabe, welcher im Art. 35 behandelt wurde, bildet in seinem Gegensatze eine besondere Aufgabe, deren Auflösung für sich betrachtet werden muss, und die folgender Maassen ausgesprochen werden kann:

»Die Lage irgend eines Punkts auf dem Erdellipsoid sei durch des»sen Polhöhe und Längenunterschied von einem gewissen anderen Me»ridian, den ich den ersten Meridian nennen will, gegeben; man fragt

»nach der geodätischen Linie, die durch den gegebenen Punkt geht und »den ersten Meridian unter einem rechten Winkel schneidet, nach der »Polhöhe, unter welcher der erste Meridian von derselben geschnitten »wird, und nach dem Azimuth derselben am gegebenen Punkt.«

Die gegebenen Stücke sind hier B' und λ, wozu die Bedingungsgleichung $\alpha''=90^0$ kommt. Diese letztere bewirkt, dass $\gamma=90^0$ ein genäherter Werth von γ ist, nehmen wir zuerst diesen an, und bezeichnen die Werthe von Γ und χ_0, die daraus hervorgehen, mit (Γ) und (χ_0), so geben die Gleichungen (45) leicht

$$(82) \quad \ldots \quad \begin{cases} \cos(\chi_0)\sin(\Gamma) = \sin B' \\ \cos(\chi_0)\cos(\Gamma) = \cos B'\cos\lambda \\ \sin(\chi_0) \qquad\quad = \cos B'\sin\lambda \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben zu erkennen, dass die vorliegende Aufgabe immer zwei Auflösungen hat. Da B' immer zwischen den Grenzen -90^0 und $+90^0$ liegt, und λ immer zwischen 0 und 180^0 angenommen werden kann, so zeigt die letzte Gleichung, dass (χ_0) auch immer zwischen 0 und 180^0 liegt. In den beiden ersten Gleichungen kann man aber $\cos(\chi_0)$ sowohl positiv wie negativ nehmen, und da beide Annahmen immer zulässig sind, so entstehen immer zwei Auflösungen, eine in welcher $(\chi_0) < 90^0$, und eine andere, in welcher $(\chi_0) > 90^0$ ist. Bei der einen Auflösung ergiebt sich (Γ) innerhalb seiner natürlichen Grenzen -90^0 und $+90^0$, aber bei der anderen übersteigt (Γ) diese Grenzen. Es wird hiedurch angezeigt, dass die geodätische Linie vom gegebenen Punkt aus sich auf die entgegengesetzte Seite des Meridians desselben erstreckt, und der Länge $\lambda-180^0$ vom ersten Meridian, oder der zweiten Hälfte desselben, von Pol zu Pol gezählt, entspricht; in diesem Falle ist in den ferneren Rechnungen nicht nur $180^0-\lambda$, sondern auch $180^0-(\Gamma)$ anzuwenden.

Setzt man nun in jedem Falle $\gamma=90^0+\delta\gamma$, so wird bis auf Grössen von der Ordnung $\delta\gamma^3$

$$\cos\gamma = -\delta\gamma\,; \quad \sin\gamma = 1 - \tfrac{1}{2}\delta\gamma^2$$

und die Werthe von Γ und χ_0, die diesem Werthe von γ entsprechen, erhält man leicht aus den (45) in folgender Form,

$$(83) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \Gamma = (\Gamma) + \operatorname{tg}(\chi_0)\,\delta\gamma \\ \chi_0 = (\chi_0) + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}(\chi_0)\,\delta\gamma^2 \end{cases}$$

die ebenfalls bis auf Grössen von der Ordnung $\delta\gamma^3$ genau sind. Die Gleichungen (28) geben leicht, wenn man $\alpha''=90^0$ macht,

$$\begin{aligned}\cos\beta' \sin\alpha' &= \cos\beta'' \\ \cos\beta' \cos\alpha' &= -\sin\beta'' \sin\chi \\ \sin\beta' &= \sin\beta'' \cos\chi\end{aligned}$$

und hiemit werden die beiden letzten (52)

$$\gamma = 90^0 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin\beta'' \cos\beta'' \left(\chi - 2\cos\chi \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\chi\right)$$

$$\chi_0 = \chi - \tfrac{1}{2} e^2 \{\chi \cos^2\beta'' + \sin\chi \cos\chi \sin^2\beta''\}$$

Da wir nun hier ohne den Grad der Genauigkeit zu verletzen (Γ) statt β'', und (χ_0) statt χ setzen dürfen, so bekommen wir

$$\delta\gamma = \tfrac{1}{2} r e^2 \sin(\Gamma) \cos(\Gamma) \left\{\frac{(\chi_0)}{r} - 2\cos(\chi_0) \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\chi_0)\right\} \quad . \quad (84)$$

welcher Ausdruck zur Anwendung in den (83) dient, und dafür hinreichend genau ist.

65.

Wegen $\alpha''=90^0$ wird hier $\beta''=\beta_0$, und wenn daher $\beta_0=\Gamma-f_0$ gesetzt wird, so verwandelt sich die Gleichung (49) in

$$\operatorname{tg}\Gamma = \sqrt{1-e^2} \,.\, \operatorname{tg}(\Gamma - f_0) + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\sin\beta'}{\cos(\Gamma - f_0)}$$

die leicht in die folgende umgeformt werden kann,

$$\{1-(1-\sqrt{1-e^2})\cos^2\Gamma\}\sin f_0 =$$
$$-(1-\sqrt{1-e^2})\sin\Gamma\cos\Gamma\cos f_0 + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin\beta'\cos\Gamma$$

übergeht man nun die mit e^6 multiplicirten Glieder, so erhält man hieraus

$$\log f_0 = \log . i_0 \sin\Gamma\cos\Gamma + M(1-\sqrt{1-e^2})\cos^2\Gamma \quad . \quad (85)$$

wo

$$i_0 = -(1-\sqrt{1-e^2}) + \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\sin\beta'}{\sin\Gamma} \quad . \; . \; . \; . \quad (86)$$

gesetzt ist, und Γ den Bogen bedeutet, welcher sich aus der ersten (83) ergiebt. Hierauf wird

$$(\beta_0) = \Gamma - f_0$$

wo ich (β_0) statt β_0 geschrieben habe, weil der Werth von Γ nicht strenge genau ist. Da die Coefficienten des Ausdrucks für i_0 in Secunden ausgedrückt werden müssen, so wird wie im Art. 53

$$-(1-\sqrt{1-e^2}) = -689'',4962$$

$$\log\frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}} = 3.1402897$$

und ausserdem

$$(87) \quad . \quad . \quad \log M(1-\sqrt{1-e^2}) = 7.16189-10$$

Den im vor. Art. erhaltenen Ausdruck für χ_0 kann man nun ohne den Grad der Genauigkeit, den er besitzt, zu verringern, in den folgenden abändern,

$$(88) \quad . \quad (\chi) = \chi_0 + \tfrac{1}{2} re^2 \left\{ \frac{\chi_0}{r} \cos^2(\beta_0) + \sin\chi_0 \cos\chi_0 \sin^2(\beta_0) \right\}$$

worin der aus der zweiten Gleichung (83) folgende Werth von χ_0 anzuwenden ist. Die auf diese Art erhaltenen Werthe von (β_0) und (χ) werden nur mit kleinen Fehlern behaftet sein, und der aus denselben auf die im Art. 56 angegebene Weise folgende Werth von $(\Delta\omega)$ wird viel genauer sein. Da hier $\varphi''=0$ ist, woraus $\varphi' = -\chi$ folgt, so wird der letzt erwähnte Ausdruck im gegenwärtigen Falle

$$(89) \quad . \quad (\Delta\omega) = mE(\chi)\cos(\beta_0) - E'\cos(\beta_0)\sin(\chi)\cos(\chi)$$

wo die Coefficienten durch die im Art. 56 gegebenen Ausdrücke zu berechnen sind, und wieder $(\omega) = \lambda + (\Delta\omega)$ wird.

66.

Führt man nun die Bedingung $\alpha'' = 90^0$ in die Gleichungen (50) ein, so ergiebt sich leicht

$$\begin{aligned}
\cos\chi \sin\beta_0 &= \sin\beta' \\
\cos\chi \cos\beta_0 &= \cos\beta' \cos(\omega) \\
\cos\chi \sin\alpha' &= \cos(\omega) \\
\cos\chi \cos\alpha' &= -\sin\beta' \sin(\omega) \\
\sin\chi &= \cos\beta' \sin(\omega)
\end{aligned}$$

und die Werthe von β_0, α', χ die sich hieraus ergeben, werden kaum eine Verbesserung nöthig haben, die, wenn sie nicht unmerklich sein sollte, wieder durch Anwendung von einfachen Differentialformeln bewirkt werden kann.

Da hier beides

$$\delta\beta_0 = \beta_0 - (\beta_0) \text{ und } \delta\chi = \chi - (\chi)$$

unmittelbar gegeben sind, so kann man ohne Vorbereitung durch die Ausdrücke des Art. 58 $\delta.\log\mu$ und $\delta\varDelta\omega$ berechnen, und hierauf wird

$$\varDelta\chi = \cos\beta_0\,\delta\varDelta\omega$$
$$\varDelta\beta_0 = \sin\beta_0\,\mathrm{tg}\,\chi\,\delta\varDelta\omega$$
$$\varDelta\alpha' = \frac{\sin\beta_0}{\cos\chi}\,\delta\varDelta\omega$$

und man erhält die genauen Werthe

$$\chi + \varDelta\chi\,; \quad \beta_0 + \varDelta\beta_0\,; \quad \alpha' + \varDelta\alpha'$$

Der Werth von $\delta.\log\mu$ wird wieder bei der Berechnung von s aus χ gebraucht, aber $\delta\varphi'$ fällt hier ganz weg.

Es ist bei dieser Aufgabe zu bemerken, dass die Unbekannten mit geringerer Genauigkeit erhalten werden, wie in den anderen Fällen, wenn λ nahe $= 90^0$, aber dieses ist nicht zu vermeiden, da die Aufgabe selbst es mit sich bringt. Denn wenn $\lambda = 90^0$, so wird auch $\beta_0 = 90^0$ und $\alpha' = 0$, oder die gesuchte geodätische Linie ist der Meridianbogen, welcher sich vom Punkte B' bis zum Pole erstreckt.

67.

Die in der vorhergehenden Auflösung der zweiten Hauptaufgabe vorbehaltene Berechnung von s aus χ, μ, φ' soll hier vorgenommen werden, und es wird dazu, s mag gross oder klein sein, am Zweckmässigsten der Ausdruck (17) verwandt, nachdem er auf die für diesen Zweck angemessenste Form gebracht sein wird. Diesem zufolge ist, wenn wieder $\sigma = r\frac{s}{a}$ gesetzt wird,

$$\sigma = A_1\chi + B_1\cos(2\varphi' + \chi)\sin\chi - C_1\cos(4\varphi' + 2\chi)\sin 2\chi + D_1\cos(6\varphi' + 3\chi)\sin 3\chi \tag{90}$$

wo

$$A_1 = \left(1 + \tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{13}{64}k^4 + \tfrac{45}{256}k^6\right)\sqrt{1-e^2}$$
$$B_1 = r\left(\tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{3}{16}k^4 + \tfrac{79}{512}k^6\right)\sqrt{1-e^2}$$
$$C_1 = r\left(\tfrac{1}{128}k^4 + \tfrac{5}{512}k^6\right)\sqrt{1-e^2}$$
$$D_1 = \tfrac{r}{1536}k^6\sqrt{1-e^2}$$

Führt man hier μ statt k durch die Gleichung (19) ein, so erhält man

$$A_1 = \left(1 + \mu + \tfrac{5}{4}\mu^2 + \mu^3\right)\sqrt{1-e^2}$$
$$B_1 = r\left(\mu + \mu^2 + \tfrac{5}{8}\mu^3\right)\sqrt{1-e^2}$$
$$C_1 = r\left(\tfrac{1}{8}\mu^2 + \tfrac{1}{8}\mu^3\right)\sqrt{1-e^2}$$
$$D_1 = \tfrac{r}{24}\mu^3$$

Setzt man

$$A_1' = \left(\mu + \tfrac{5}{4}\mu^2 + \mu^3\right)\sqrt{1-e^2};$$
$$A_1'' = 1 - \sqrt{1-e^2}$$

dann wird

$$(91)\quad \sigma = \chi + A_1'\chi - A_1''\chi + B_1\cos(2\varphi' + \chi)\sin\chi - C_1\cos 2(2\varphi' + \chi)\sin 2\chi + D_1\cos 3(2\varphi' + \chi)\sin 3\chi$$

in welcher Form dieser Ausdruck sich leichter berechnen lässt. Geht man zu den Logarithmen der Coefficienten über, so findet man

$$\log.\text{nat}\, A_1' = \log.\text{nat}\, \mu\sqrt{1-e^2} + \tfrac{5}{4}\mu + \tfrac{7}{32}\mu^2$$
$$\log\,\text{nat}\, B_1 = \log.\text{nat}\, r\mu\sqrt{1-e^2} + \mu + \tfrac{1}{8}\mu^2$$
$$\log.\text{nat}\, C_1 = \log.\text{nat}\tfrac{r}{8}\mu^2\sqrt{1-e^2} + \mu$$
$$\log D_1 = \log\tfrac{r\mu^3}{24}$$

Für die Briggischen Logarithmen ergiebt sich hieraus

$$(92)\;\ldots\;\begin{cases}\log A_1' = \log a\mu + b\mu + c\mu^2\\ \log B_1 = \log d\mu + f\mu + g\mu^2\\ \log C_1 = \log h\mu^2 + k\mu\end{cases}$$

wo

$$\log a = 9.9985458-10$$
$$\log b = 9.73469\quad -10$$
$$\log c = 8.9778\quad -10$$
$$\log d = 5.3129709$$
$$\log f = 9.63778\quad -10$$
$$\log g = 8.7347\quad -10$$
$$\log h = 4.40988$$
$$\log k = 9.6378\quad -10$$

und ausserdem

$$\log A_1'' = 7.5241069-10$$

ist. Da hier die genauen Werthe zu substituiren sind, so sind im Sinne des Art. 58

$$\varphi' = (\varphi') + \delta\varphi \; ; \quad \log\mu = \log(\mu) + \delta.\log\mu$$

nebst $\chi + \Delta\chi$ anzuwenden. Für die Aufgabe der Artt. 60 u. f. geht der obige Ausdruck für σ in den folgenden über

$$\begin{aligned}\sigma = \chi + A_1'\chi - A_1''\chi - B_1 \cos(2(\beta' + \pi') - \chi) \sin\chi \\ - C_1 \cos 2(2(\beta' + \pi') - \chi) \sin 2\chi - D_1 \cos 3(2(\beta' + \pi') - \chi) \sin 3\chi \quad (93)\end{aligned}$$

wo ebenfalls $\pi' = (\pi') + \delta\pi'$, etc. zu substituiren sind. Für die Aufgabe der Artt. 64 u. f. ergiebt sich

$$\sigma = \chi + A_1'\chi - A_1''\chi + \tfrac{1}{2} B_1 \sin 2\chi - \tfrac{1}{2} C_1 \sin 4\chi + \tfrac{1}{2} D_1 \sin 6\chi \quad (94)$$

wo wieder die eben bezeichneten Werthe von χ und $\log\mu$ zu substituiren sind. Zum Ueberfluss bemerke ich, dass hierauf $s = \sigma\frac{a}{r}$ wird.

Hiemit ist die zweite Hauptaufgabe vollständig gelöst. Will man ausserdem noch den elliptischen Bogen S kennen lernen, so dienen dazu die Ausdrücke des Art. 50, es kann jedoch kaum je ein Interesse haben diesen kennen zu lernen, dessen Unterschied von s nur eine Grösse von der Ordnung e^4 ist.

68.

Um auch die eben gelöste Aufgabe durch einige Beispiele zu erläutern, will ich zuerst die geodätische Linie, nebst den Azimuthen an ihren Endpunkten, berechnen, die Orsk in Russland und Valentia in Irland mit einander verbindet. Es sind diese Oerter bekanntlich die Endpunkte der grossen Längengradmessung, die jetzt in Ausführung begriffen ist. Da die astronomischen Positionen dieser beiden Oerter jetzt noch nicht endgültig festgesetzt sind, so muss ich mich damit begnügen sie aus einem Verzeichniss geographischer Ortsbestimmungen zu entnehmen, und werde hiebei, eben weil diese Angaben nur als vorläufig zu betrachten sind, die Secunden weglassen. Ich nehme daher an

Orsk Valentia

$$B' = 51^\circ 12' \; ; \quad B'' = 51^\circ 55' \; ; \quad \lambda = 69^\circ 3'$$

Aus diesen Werthen von B' und B'' ergab sich zuerst

$$\begin{aligned}\beta' &= 51^\circ 6' 22'',60 \; ; & \beta'' &= 51^\circ 49' 24'',54 \\ \log\sin\beta' &= 9.8911537 \; ; & \log\sin\beta'' &= 9.8954835 \\ \log\cos\beta' &= 9.7978751 \; ; & \log\cos\beta'' &= 9.7910491\end{aligned}$$

Hierauf erhielt ich durch die (70)

$$m = 74^\circ\, 20'\, 48'',10\ , \quad n = 35^\circ\, 10'\, 24'',84$$

$\log p = 0.0008820$, und die (72) gab diesen Werth von $\log p$ ohne Unterschied wieder. Die (71) gaben hierauf

$$\alpha_0' = 119^\circ\, 9'\, 7'',16\ ; \quad \chi_0 = 41^\circ\, 16'\, 11'',76$$

Ich habe diese Rechnungen mit Logarithmen von sieben Decimalen ausgeführt, allein es wäre ausreichend gewesen dazu Logarithmen von fünf Stellen zu verwenden. Es geben hierauf die (73)

$$(\alpha') - \alpha_0' = +\ 11'',04\ ; \quad (\chi) - \chi_0 = +\ 7'\, 43'',18$$

und folglich wird

$$(\alpha') = 119^\circ\, 9'\, 18'',20\ ; \quad (\chi) = 41^\circ\, 23'\, 54'',94$$

Hiemit gaben die Gleichungen (74) mit Anwendung von Logarithmen von fünf Decimalen

$$(\varphi') = -\ 21^\circ\, 27'\, 21''\ ; \quad \log \sin\,(\beta_0) = 9.92234$$
$$\log \cos\,(\beta_0) = 9.73905$$
$$\log\,(\mu) = 7.06893$$

Ausserdem wurden

$$\log E = -\ 0.00025\ ; \quad \log E' = 9.6057$$

gefunden, worauf durch die (75) sich

$$(\varDelta\omega) = +\ 4'\, 32'',86$$

folglich

$$(\omega) = 69^\circ\, 7'\, 32'',86$$

ergab. Durch Anwendung von Logarithmen von sieben Stellen geben nun die Gleichungen des Art. 57

$$m' = 74^\circ\, 20'\, 57'',74\ : \quad \log \sin n' = 9.7615657$$
$$q' = 64\quad 7\quad 18,07\ ; \quad \log \cos n' = 9.9118913$$
$$\alpha' = 119\quad 9\quad 18,20\ ; \quad \alpha'' = 62^\circ\, 30'\, 57'',27$$
$$\chi = 41^\circ\, 23'\, 57'',33$$

Die Vergleichung dieser Werthe von α' und χ mit denen von (α') und (χ) giebt

$$\delta\alpha' = 0'',00\ , \quad \delta\chi = +\ 2'',39$$

und die Anwendung der Differentialformeln des Art. 58 hierauf zeigt, dass die Verbesserungen der eben erhaltenen Werthe weit weniger wie 0'',01 betragen. Die eben erhaltenen Werthe von α', α'', χ sind also

schon so genau, wie man sie durch Anwendung von Logarithmen von nicht mehr wie sieben Decimalen erhalten kann. Da $\delta\alpha'$ Null ist, so werden auch die Verbesserungen von β_0, φ', μ, gleich Null, und es kann zur Berechnung von s geschritten werden.

Bevor ich diese vornehme, will ich in Betreff der Azimuthe noch die folgenden Bemerkungen einschalten. Da ich in der vorstehenden Berechnung Orsk als den Anfangspunkt betrachtet habe, und Valentia westlich von Orsk liegt, so sind die erhaltenen Azimuthe, nemlich α' an Orsk, und zufolge des Art. 10 $180^0+\alpha''$ an Valentia vom Südpunkt des Meridians an in der Richtung nach Westen zu zählen. Hätte ich im Gegentheil Valentia zum Anfangspunkt gewählt, welches ohne Aenderung der Formeln auch hätte geschehen können, und dabei wieder λ positiv angenommen, so würde die Rechnung die Azimuthe zwar wieder vom Südpunkt des Meridians an, aber von da in der Richtung nach Osten gezählt, gegeben haben.

Um nach den Ausdrücken des Art. 67 die geodätische Linie s zu berechnen, bekommt man zuerst durch die (92)

$$\log A_1' = 7.06812\ ;\quad \log B_1 = 2.38241$$
$$\log C_1 = 8.5483$$

worauf der Ausdruck (91)

$$\sigma = 41^0\, 21'\, 12'',90$$

giebt, aus welchem durch Anwendung des im Art. 23 angegebenen Werthes von a

$$s = 2361641{,}92 \text{ Toisen}$$

folgt.

Vergleicht man das im Art. 36 gegebene Beispiel mit dem vorstehenden, so sieht man sogleich, dass es diesem entnommen ist. Ausser dem gegebenen Stücke B', welches beiden Aufgaben gemeinschaftlich ist, habe ich dort die hier durch die Rechnung erhaltenen Werthe von α' und s als gegeben betrachtet, und daraus die hier als gegeben betrachteten Stücke B'' und λ nebst α'' berechnet. Die Uebereinstimmung ist so gut, wie sie durch Anwendung von Logarithmen von nicht mehr wie sieben Decimalen erwartet werden darf.

69.

Um zu zeigen in wie grosser Ausdehnung die vorhergehende Auflösung in ihrer ersten Annäherung immer noch die Hunderttheile von Secunden richtig giebt, habe ich auch das folgende Beispiel von weit grösseren Dimensionen gerechnet. Es soll die geodätische Linie zwischen Moskau und Santiago in Chili, nebst deren Azimuthen bestimmt werden. Zufolge der Verzeichnisse geographischer Ortsbestimmungen nehme ich als gegeben an,

Moskau Santiago

$$B' = 55^0\,45'\,;\quad B'' = -\,33^0\,26'\,;\quad \lambda = 108^0\,13'$$

woraus zuerst

$$\beta' = 55^0\,39'\,38'',49\,;\qquad \beta'' = -\,33^0\,20'\,42'',63$$
$$\log\sin\beta' = 9.9168283\,;\qquad \log\sin\beta'' = 9.7401112n$$
$$\log\cos\beta' = 9.7513505\,;\qquad \log\cos\beta'' = 9.9218811$$

folgt. Man erhält nun ebenso wie im vor. Art.

$$m = 244^0\,17'\,13'',98\,;\qquad \log\sin n = 9.9013043$$
$$\log\cos n = 9.7812898$$
$$\alpha_0' = 83^0\,34'\,30'',28\,;\qquad \chi_0 = 126^0\,42'\,7'',80$$
$$(\alpha') - \alpha_0' = -\,10'\,29'',70\,;\qquad (\chi) - \chi_0 = +\,23'\,5'',90$$
$$(\alpha') = 83^0\,24'\;\;0'',58\,;\qquad (\chi) = 127^0\,5'\,13'',70$$
$$(\varphi') = 4^0\,29'\,22'',67\,;\qquad \log\sin\,(\beta_0) = 9.9181630$$
$$\log\cos\,(\beta_0) = 9.7484629$$
$$\log\,(\mu) = 7.0605858$$
$$\log E = -\,0.0002499\,;\qquad \log E' = 9.59737$$
$$(\varDelta\omega) = +\;14'\,16'',62$$
$$(\omega) = 108^0\,27\;\;16,\,62$$
$$m' = 244^0\,18'\,31'',48\,;\qquad \log\sin n' = 9.8989527$$
$$q' = 238\;\;44\;\;16,\,19\,;\qquad \log\cos n' = 9.7853175$$
$$\alpha' = 83\;\;23\;\;51,\,20\,;\qquad \alpha'' = 42^0\,7'\,37'',98$$
$$\chi = 127^0\,5'\,18'',48$$

Es wird ferner

$$\delta\alpha' = -\,9'',38\,;\qquad \delta\chi = +\,4'',78$$

und hiemit geben die Ausdrücke des Art. 58

$$\delta\beta_0 = +\,0'',73\,;\qquad \delta\varphi' = +\,6'',33$$
$$\delta\log\mu = +\,0.0000022$$

woraus $\delta\Delta\omega = +0'',0044$, und

$$\Delta\chi = +0'',0025\ ;\qquad \Delta\alpha' = +0'',0035\ ;\qquad \Delta\alpha'' = +0'',0004$$

hervorgehen. Die erste Annäherung hat also wieder hier die Unbekannten schon so genau gegeben, wie man sie überhaupt durch Anwendung von Logarithmen von nicht mehr wie sieben Decimalen erhalten kann. Für die Berechnung von σ durch den Ausdruck (91) wird nun

$$\log\mu = 7{,}0605800$$
$$\varphi' = 4^0\,29'\,29'',00$$

und hiemit ergiebt sich

$$\log A_1' = 7.0597577\ ;\quad \log B_1 = 2.3740580\ ;\quad \log C_1 = 8.53156$$
$$\sigma = 126^0\,46'\,18'',17$$

welchen Werth man wie oben auf ein Linearmaass hinführen kann.

70.

Um auch ein Beispiel vom Falle zu geben, wo s klein ist, will ich nach dem Art. 37

$$B' = 20^0\ ;\quad B'' = 18^0\,15'\,18'',417\ ;\quad \lambda = 1^0\,3'\,8'',983$$

als gegeben annehmen, und mich der Reihen des Art. 53 bedienen. Durch die Ausdrücke (62) und (63) bekommt man zuerst

$$i = 818'',7757\ ;\quad f = 4'\,2'',8228$$

worauf die (64)

$$q = 19'\,47'',671\ ;\qquad \log n = 3.5560673.1$$
$$g = 10,\,3591\ ;\qquad N = 1^0\,43'\,53'',5821$$
$$\log N = 3.7947376.6$$

geben. Um die Azimuthe möglichst genau zu erhalten, habe ich in diesen Rechnungen bei den Interpolationen in den siebenstelligen Tafeln die achte Stelle mit berücksichtigt; ein Verfahren, welches ich in anderen Fällen auch angewandt habe, und durch welches man in den Summen und Differenzen mehrerer Logarithmen die siebente Stelle genauer erhält. Durch die (65) erhält man nun

$$h = 0.0000110.1$$
$$H = 0.0000330.5$$

worauf die (66)

$$K = 29^0\,59'\,32'',90\ ;\quad L = 27'',187$$

und die (67)

$$\alpha_0' = 30^0\,0'\,0'',087\ ;\quad \gamma = 29^0\,39'\,18'',041$$

geben. Die (68) und (69) geben hierauf

$$\chi_0 = 1^0\,59'\,57'',193$$

Nachdem ferner durch die (61)

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha_0' - \ \ 0'',107\\ \alpha'' &= \gamma\ + \ \ 0,215\\ \chi &= \chi_0 + 21,359\end{aligned}$$

gefunden worden war, erhielt ich

$$\begin{aligned}\alpha' &= 29^0\,59'\,59'',980\\ \alpha'' &= 29\ \ 39\ \ 18,256\\ \chi &= \ \ 2\ \ \ \ 0\ \ 21,552\end{aligned}$$

Vergleicht man diese Azimuthe mit denen des Beispiels des Art. 37, so wird man finden, dass sie 0",02 kleiner ausgefallen sind, aber weiter kann man im gegenwärtigen Falle die Uebereinstimmung nicht zu Wege bringen, wenn man nicht Logarithmen von mehr wie sieben Decimalen anwenden will. Der Unterschied der Azimuthe stimmt weit genauer mit dem des Art. 37 ein, und entfernt sich nur um 0",003 davon. Diese Ergebnisse sind mit der Natur der Aufgabe aufs Engste verbunden, und können nicht davon getrennt werden.

Um σ zu erhalten müssen zuerst durch die Ausdrücke des Art. 22 φ' und $\log\mu$ gerechnet werden, deren Werthe dieselben werden wie im Art. 37, nemlich,

$$\varphi' = 67^0\,16'\,21'',24\ ;\quad \log\mu = 7.1164109$$

Aus den Ausdrücken (92) erhält man

$$\begin{aligned}&\log A_1' = 7.11496\ ;\quad \log B_1 = 2.42924\\ &\log C_1 = 8.642\end{aligned}$$

worauf die (91)

$$\sigma = 1^0\,59'\,59'',996$$

giebt, welcher Werth von dem des Art. 37 nur um 0",004 verschieden ist.

71.

Für die Aufgabe des Art. 60 u. f. sollen Christiania in Norwegen und Palermo als Beispiel dienen, da diese Punkte in der mitteleuropäi-

schen Gradmessung voraussichtlich mit zu den wichtigeren gehören werden. Mit Weglassung der Secunden geben die Verzeichnisse

Christiania Palermo

$$B' = 59^0\,55'\,;\quad B'' = 38^0\,7'\,;\quad \lambda = 2^0\,38'.$$

woraus zuerst

$$\beta' = 59^0\,50'\,0'',189\,;\qquad \beta'' = 38^0\,1'\,24'',729$$
$$\log\sin\beta' = 9.9367990\,;\qquad \log\sin\beta'' = 9.7895703$$
$$\log\cos\beta' = 9.7011501\,;\qquad \log\cos\beta'' = 9.8963928$$

folgen. Durch die Ausdrücke (62) und (63) des Art. 52 ergab sich zuerst

$$i = 1249'',238\,;\quad f = +\,10'\,4'',798$$

worauf die Ausdrücke des Art. 60 u. f. in Anwendung gebracht wurden. Die (76) geben

$$\log n = 3.8721438\,;\quad g = 1'\,45'',915\,;\quad N = 21^0\,41'\,44'',558$$

und die (77)

$$\alpha_0' = 5^0\,34'\,57'',09\,;\quad u = 5'\,37'',41\,;\quad \chi_0 = 21^0\,47'\,21'',97$$

Da nun die (73)

$$(\alpha') = \alpha_0' - 0'',97\,;\quad (\chi) = \chi_0 + 5'\,4'',10$$

geben, so wurden

$$(\alpha') = 5^0\,34'\,56'',12\,;\quad (\chi) = 21^0\,52'\,26'',07$$

welche zur Berechnung von (ω) dienen. Zu diesem Ende geben die (78) zuerst

$$(\zeta) = 2^0\,48'\,6'',68\,;\quad (\pi') = 7'\,5'',494$$

Die erste (79) gab nun

$$\log(\mu) = 7.2227682$$

worauf die Ausdrücke des Art. 23, die im Art. 56 wiederholt sind

$$\log E = -\,0,0003632\,;\quad \log E' = 9.754$$

und die zweite und dritte (79)

$$(\varDelta\omega) = 12'',856\,;\quad (\omega) = 2^0\,38'\,12'',856$$

geben. Aus den (80) erhielt ich hierauf

$$q' = 1^0\,37'\,30'',022\,;\quad \log n' = 3.8737315$$
$$g' = \quad 1\;\;46,\,050$$

und aus den (81)

$$\alpha' = 5^0\,34'\,56'',120\,;\quad \gamma' = \;5^0\,10'\,57'',442$$
$$u' = \quad 5\;\;38,\,432$$
$$\alpha'' = 3\;\;33\;\;27,\,420\,;\quad \chi = 21\;\;52\;\;27,\,842$$

Vergleicht man diese Werthe von α' und χ mit denen von (α') und (χ), so findet man

$$\delta\alpha' = 0.00\,, \quad \delta\chi = +1'',772$$

Hiemit werden

$$\delta\zeta = 0\,, \quad \delta\pi' = 0\,, \quad \delta.\log\mu = 0\,, \quad \delta\varDelta\omega = +0'',0003$$

Dieser Werth von $\delta\varDelta\omega$ kann die eben erhaltenen Resultate nicht merklich ändern, die also die Endresultate sind. Für σ geben die (92)

$$\log A_1' = 7.2222206\,; \quad \log B_1 = 2.5364642$$
$$\log C_1 = 8.8561$$

worauf man durch die (93) ohne Weiteres

$$\sigma = 21^0\,50'\,33'',909$$

erhält. Die Daten des Beispiels des Art. 38 sind aus diesem Beispiel entnommen, und die Uebereinstimmung der Resultate lässt nichts zu wünschen übrig.

72.

Um auch die Aufgabe der Artt. 64 u. f. durch ein Beispiel zu erläutern, soll von Santiago aus eine geodätische Linie senkrecht auf den Meridian von Moskau gezogen werden. Die gegebenen Stücke sind hier

$$B' = -33^0\,26'\,; \quad \lambda = 108^0\,13'$$

woraus man wie im Art. 69 zuerst

$$\beta' = -33^0\,20'\,42'',63\,; \quad \log\sin\beta' = 9.7401112n$$
$$\log\cos\beta' = 9.9218811$$

findet. Es sind nun zuerst durch die Gleichungen (82) $(\varGamma)$ und (χ_0) zu berechnen, und nimmt man hiebei zuerst $\cos(\chi_0)$ positiv an, so bekommt man

$$(\varGamma) = 244^0\,39'\,44'',78\,; \quad (\chi_0) = 52^0\,26'\,19'',43$$

Nimmt man hingegen $\cos(\chi_0)$ negativ an, so ergiebt sich

$$(\varGamma) = +64^0\,39'\,44'',78\,; \quad (\chi_0) = 127^0\,33'\,40'',57$$

Für die erste Auflösung, die zuerst ausgeführt werden soll, muss zufolge des Art. 64 geschrieben werden,

$$(\varGamma) = -64^0\,39'\,44'',78\,; \quad \lambda = 71^0\,47'$$

und sie gehört der Hälfte des Moskauer Meridians an, auf welcher Moskau nicht liegt. Hiemit muss der Werth

$$(\chi_0) = 52^0\,26'\,19'',43$$

verbunden werden. Die nächste Arbeit ist nun aus der (84) $\delta\gamma$ zu rechnen, und hiefür findet man

$$\delta\gamma = -1'\,23'',80$$

welcher Werth in die (83) gesetzt,

$$\Gamma = -64^0\,41'\,33'',75$$
$$\chi_0 = \quad 52\;\;26\;\;19,45$$

giebt. Die (86) und (85) geben hierauf

$$i_0 = +150'',38\;;\quad f_0 = -58'',15$$

woraus sich

$$(\beta_0) = -64^0\,40'\,35'',60$$

ergiebt. Aus (88) wird jetzt

$$(\chi) = \chi_0 + 6'\,27'',05$$

folglich

$$(\chi) = 52^0\,32'\,46'',50$$

und nachdem durch die Ausdrücke des Art. 23 oder 56

$$\log(\mu) = 7.1363172\;;\quad \log E = -0.0002975$$
$$\log E' = 9.6731$$

gerechnet worden ist, giebt die (89)

$$(\varDelta\omega) = +4'\,30'',19\;;\quad (\omega) = 71^0\,51'\,30'',19$$

womit alle Vorbereitungen zur Anwendung der Gleichungen des Art. 66 gemacht sind. Diese Gleichungen geben nun

$$\beta_0 = -64^0\,40'\,35'',84$$
$$\alpha' = \quad 30\;\;47\;\;54,04$$
$$\chi = \quad 52\;\;32\;\;47,57$$

und vergleicht man diese mit den obigen Werthen von (β_0) und (χ), so findet man

$$\delta\beta_0 = -0'',24\;;\quad \delta\chi = +1'',07$$

Die Differentialformeln des Art. 58 geben hierauf

$$\delta.\log\mu = +0.0000005\;;\quad \delta\varDelta\omega = +0'',0008$$

welcher letztere durchaus keinen merklichen Einfluss auf die eben gefundenen Werthe von β_0, α', χ hat, die also die genauen Endresultate sind.

Aus den (92) findet man nun

$$\log A_1' = 7.13561\;;\quad \log B_1 = 2.44988\;;\quad \log C_1 = 8.683$$

und hiemit giebt die (94)

$$\sigma = 52^0\,28'\,49'',75$$

und aus dem obigen Werthe von β_0 erhält man

$$B_0 = -64^0\,45'\,2'',59$$

womit die Auflösung ausgeführt ist.

Nehmen wir nun den zweiten Fall vor, nemlich

$$(\Gamma) = +64^0\,39'\,44''78\ ;\quad \lambda = 108^0\,13'$$
$$(\chi_0) = 127\;\;33\;\;40,57$$

und behandeln ihn genau eben so wie den vorhergehenden, so bekommt man nach und nach die folgenden numerischen Werthe,

$$\delta\gamma = +20'\,51'',89$$
$$\Gamma = 64^0\,12'\,36'',9\ ;\quad \chi_0 = 127^0\,33'\,35'',63$$
$$i_0 = -1532'',76\ ;\quad f_0 = -10'\,0'',8$$
$$(\beta_0) = 64^0\,22'\,37'',7\ ;\quad (\chi) = \chi_0 + 16'',16$$
$$(\chi) = 127^0\,33'\,51'',79$$
$$\log(\mu) = 7.1341608\ ;\quad \log E = -0.0002960$$
$$\log E' = 9.6710$$
$$(\varDelta\omega) = 11'\,3'',50\ ;\quad (\omega) = 108^0\,24'\,3'',50$$
$$\beta_0 = 64^0\,22'\,17'',72$$
$$\alpha' = 148\;\;49\;\;1,63$$
$$\chi = 127\;\;33\;\;54,04$$

Vergleicht man diese mit den Werthen von (β_0) und (χ), so erhält man

$$\delta\beta_0 = -19'',98\ ;\quad \delta\chi = +2'',25$$

Hiemit geben die Differentialformeln des Art. 58

$$\delta.\log\mu = -0.0000404\ ;\quad \delta\varDelta\omega = +0''1372$$

und aus $\delta\varDelta\omega$ folgt durch die des Art. 66

$$\varDelta\chi = +0'',06\ ;\quad \varDelta\beta_0 = -0'',16\ ;\quad \varDelta\alpha' = -0'',20$$

die Endwerthe werden also

$$\beta_0 = 64^0\,22'\,17'',56$$
$$\alpha' = 148\;\;49\;\;1,43$$
$$\chi = 127\;\;33\;\;54,10$$

Mit dem berichtigten Werthe von μ, nemlich

$$\log\mu = 7.1341204$$

geben nun die (92)

$$\log A_1' = 7.1334057\ ;\quad \log B_1 = 2.4476828$$
$$\log C_1 = 8.6787$$

womit die (94)

$$\sigma = 127^0\,16'\,27'',86$$

giebt. Aus dem obigen Werthe von β_0 folgt

$$B_0 = 64^0\,26'\,46'',61$$

womit die Auflösung ausgeführt ist. Man erkennt sogleich, dass die beiden Beispiele des Art. 39 aus den vorstehenden entnommen sind; die Uebereinstimmung der Resultate ist so gut, wie man es wünschen kann.

73.

In den vorhergehenden Beispielen habe ich die Hülfsgrössen fast alle mit derselben Genauigkeit berechnet wie die schliesslichen Resultate, um zu zeigen wie klein ihre wahren Unterschiede sind, allein ich darf nicht unterlassen anzuführen, dass diese Genauigkeit keines Weges erforderlich ist. Wenn man die Resultate so genau erhalten will wie z. B. die Anwendung von Logarithmen von sieben Decimalen gestattet, so reicht man bei der Berechnung der Hülfsgrössen (α') und (χ), oder bez. (β_0) und (χ) mit Logarithmen von fünf, oder gar weniger Decimalen aus. Es ist blos dafür Sorge zu tragen, dass von (α') und (χ), oder bez. von (β_0) und (χ) an, die Rechnungen möglichst scharf ausgeführt werden. Ich werde dieses am zuletzt aufgestellten Beispiel zeigen. Statt der im vor. Art. erhaltenen Werthe von (β_0) und (χ) will ich annehmen, dass man

$$(\beta_0) = 64^0\,23'\,0'' \;;\quad (\chi) = 127^0\,34'\,20''$$

durch eine vorangegangene, minder genau ausgeführte Rechnung gefunden habe, und diese der weiteren Berechnung hier zu Grunde legen. Man bekommt damit durch dieselben Ausdrücke wie vorher

$$\log(\mu) = 7.1342059 \;;\quad \log E = -\,0.0002961$$
$$\log E' = 9.6710$$
$$(\Delta\omega) = 11'\,3'',39 \;;\qquad (\omega) = 108^0\,24'\,3''39$$
$$\beta_0 = \;\; 64^0\,22'\,17'',85$$
$$\alpha' = 148\;\;49\;\;\;1,79$$
$$\chi = 127\;\;33\;\;53,99$$

und es werden jetzt

$$\delta\beta_0 = -\,42'',15 \;;\quad \delta\chi = -\,26'',01$$

Hiemit geben nun die Differentialformeln

$$\delta.\log\mu = -\,0.0000851 \;;\quad \delta\Delta\omega = +\,0'',2451$$
$$\Delta\chi = +\,0'',11 \;;\quad \Delta\beta_0 = -\,0'',28 \;;\quad \Delta\alpha' = -\,0'',36$$

und folglich werden die Endresultate

$$\beta_0 = 64^0\,22'\,17'',57$$
$$\alpha' = 148\;\;49\;\;\;1,\,43$$
$$\chi = 127\;\;33\;\;54,\,10$$

mit denen des vor. Art. übereinstimmend, obgleich ich sehr grosse Aenderungen mit den Werthen von (β_0) und (χ) vorgenommen habe. Der hier hervorgehende Werth

$$\log\mu = 7.1341208$$

weicht 4 Einheiten in der siebenten Stelle von dem des vor. Art. ab, allein dieser Unterschied ist auf den daraus folgenden Werth von σ von so geringer Wirkung, dass er weniger wie 0",001 ausmacht.

74.

Durch die Verbindung der Aufgaben dieses Abschnittes mit denen des vorhergehenden kann man eine Anzahl von Aufgaben der sphäroidischen Trigonometrie lösen, von welchen ich jedoch, um diese Abhandlung nicht allzuweit auszudehnen, nur Eine erklären will.

»In irgend einem sphäroidischen Dreiecke seien zwei Seiten nebst »ihren Azimuthen und der Polhöhe ihres Durchschnittspunkts gege- »ben, die übrigen Stücke dieses Dreiecks zu finden.«

Man begreift sogleich, dass ein sphäroidisches Dreieck nicht durch blose drei Stücke, wie ein sphärisches Dreieck, gegeben ist, sondern dass zu den drei Stücken, die den in der sphärischen Trigonometrie verlangten analog sind, auch noch die Stücke hinzukommen müssen, die die Lage des Dreiecks auf dem Ellipsoid unzweideutig festsetzen. Die gegebenen Stücke der vorstehenden Aufgabe erfüllen diese Bedingungen. Ebenfalls ist die Auflösung des sphäroidischen Dreiecks damit nicht vollständig ausgeführt, dass man blos die Seiten und Winkel desselben berechnet, die nicht zu den gegebenen Stücken gehören, es muss vielmehr ausserdem auch die Lage jeder Ecke auf dem Ellipsoid bestimmt werden. In der vorstehenden Aufgabe sind also nicht blos die dritte Seite des Dreiecks und die beiden anliegenden Winkel, sondern auch die Polhöhe einer jeden der beiden anderen Ecken, und die Azimuthe der Dreiecksseiten an diesen beiden Ecken zu bestimmen.

75.

Die vorliegende Aufgabe lässt sich unmittelbar durch das Vorhergehende lösen, und bedarf keiner neuen Entwickelungen. Durch die Hauptaufgabe des ersten Abschnittes kann man abgesondert das Azimuth, die Polhöhe und den Längenunterschied der Endpunkte einer jeden der beiden gegebenen Dreiecksseiten berechnen. Da hierauf die Polhöhen und der Längenunterschied der beiden anderen Ecken des Dreiecks gegeben sind, so dient die zweite Hauptaufgabe dazu um daraus die dritte Dreiecksseite und deren Azimuthe zu berechnen, worauf alle Stücke des sphäroidischen Dreiecks bekannt sind.

Zufolge der Ausdehnung, die im Vorhergehenden den Entwickelungen gegeben worden ist, kann dieses Verfahren auf möglichst grosse sphäroidische Dreiecke angewandt werden, für einen davon weiter unten zu machenden Gebrauch will ich jedoch hier nur ein Dreieck von mässig grosser Ausdehnung als Beispiel wählen. Gegeben seien in Bogentheilen des Aequators die eine Dreiecksseite $=15^0$, mit dem Azimuth $=30^0$, und die andere Dreiecksseite $=17^0$ mit dem Azimuth $=108^0$, die reducirte Breite des Durchschnitts- oder Anfangspunkts dieser beiden Dreiecksseiten, welchem auch die Azimuthe angehören sei $=45^0$. Wendet man nun hierauf die Auflösung der Hauptaufgabe des ersten Abschnitts an, so ist in den dort angewandten Bezeichnungen gegeben,

$$1)\qquad \beta' = 45^0,\quad \alpha' = 30^0,\quad \sigma = 15^0$$

und hiemit findet man

$$\varphi' = 40^0 53' 36'',21,\quad \Omega' = 67^0 47' 32'',43,\quad \log\sin\beta_0 = 9.9710040$$
$$\log\cos\beta_0 = 9.5484550$$
$$\log\mu = 7.1659930$$
$$S = 15^0 1' 41'',68,\quad x = -9'',28,\quad \varphi'' = 55^0 55' 27'',17,\quad \Delta\omega = 1' 3'',91$$
$$\alpha'' = 24^0 31' 40'',54,\quad \Omega'' = 76^0 33' 0'',04,\quad \beta'' = 31^0 36' 28'',21$$
$$\lambda = 8^0 44' 23'',70,\quad \text{Azimuth des Endpunkts} = 204^0 31' 40'',54$$

Es ist ferner gegeben

$$2)\qquad \beta' = 45^0,\quad \alpha' = 108^0,\quad \sigma = 17^0$$

und hiemit findet man

$$\varphi' = -17^0 10' 19'',34,\quad \Omega' = -24^0 40' 44'',62,\quad \log\sin\beta_0 = 9.8692895$$
$$\log\cos\beta_0 = 9.8276913$$
$$\log\mu = 6.9630399$$

$S = 17^\circ\ 2'\,28'',855\,, \quad x = +\,52'',946$
$\varphi'' = -0^\circ\ 8'\,43'',43\,, \quad \Delta\omega = 2'\,17'',67$
$\alpha'' = 90^\circ\ 9'\,36'',04\,, \quad \Omega'' = -\,0^\circ 12'\,58'',34\,, \quad \beta'' = 47^\circ 44'\,22'',57$
$\lambda = 24^\circ 25'\,28'',61\,,$ Azimuth des Endpunkts $= 270^\circ 9'\,36'',04$

Es ist hierauf die Hauptaufgabe dieses Abschnittes auf die folgenden, durch die vorhergehende Rechnung gegebenen, Stücke anzuwenden,

$$\beta' = 31^\circ 36'\,28'',21\,, \quad \beta'' = 47^\circ 44'\,22'',57\,, \quad \lambda = 15^\circ 41'\,4'',91$$

wo λ der Unterschied aus den beiden eben gefundenen Werthen derselben Grösse ist. Man erhält nun

$$\alpha_0' = 147^\circ 57'\,16''\,, \qquad \chi_0 = 20^\circ 1'\,22''$$
$$(\alpha') - \alpha_0' = +\,8''\,, \qquad (\chi) - \chi_0 = +\,3'\,25''$$
$$(\alpha') = 147^\circ 57'\,24''\,, \qquad (\chi) = 20^\circ 4'\,47''$$
$$(\varphi') = -\,54^\circ 1'\,13'',1\,, \qquad \log\sin(\beta_0) = 9.950409$$
$$\log\cos(\beta_0) = 9.654999$$
$$\log(\mu) = 7.124919$$
$$(\Delta\omega) = 1'\,49'',11\,, \qquad (\omega) = 15^\circ 42'\,54'',02$$
$$\alpha' = 147^\circ 57'\,28'',19\,, \quad \alpha'' = 137^\circ 47'\,15'',63\,, \quad \chi = 20^\circ 4'\,46'',44$$

Azimuth des Endpunkts $= 317^\circ 47'\,15'',63$

Die Unterschiede

$$\delta\alpha' = +\,4'',19\,, \quad \delta\chi = -\,0'',56$$

geben

$$\Delta\chi = \Delta\alpha' = \Delta\alpha'' = 0\,, \quad \delta\varphi' = -\,1'',3\,, \quad \delta\log\mu = +\,0.000007$$

und hiemit wird schliesslich

$$\sigma = 20^\circ 2'\,24'',41$$

womit das sphäroidische Dreieck vollständig berechnet ist.

76.

Wenn man die eben erhaltenen Resultate übersichtlich zusammen stellen will, so muss man eine angemessene Bezeichnung einführen. Die reducirten Breiten der drei Ecken des Dreiecks sollen β, β', β'', die Winkel desselben bez. n, n', n'', und die gegenüber liegenden Seiten σ, σ', σ'' heissen. Die Azimuthe von σ' und σ'' in n sollen mit α' und α'', die von σ und σ'' in n' mit $\alpha_{,}$ und $\alpha_{,}''$, die von σ und σ' in n'' mit $\alpha_{,,}$ und $\alpha_{,,}'$, endlich der Längenunterschied von n und n' mit λ'', der von n und n'' mit λ', der von n' und n'' mit λ bezeichnet werden, und hiemit erhält

man die folgende Zusammenstellung, indem selbstverständlich die Dreieckswinkel den Unterschieden der bezüglichen Azimuthe gleich sind,

$\beta = 45^0$	$\beta' = 31^0\,36'\,28'',21$,	$\beta'' = 47^0\,44'\,22'',57$
$\alpha'' = 30$	$\alpha_{,}'' = 204\;\;31\;\;40,54$,	$\alpha_{,,}' = 270\;\;9\;\;36,04$
$\alpha' = 108$	$\alpha_{,} = 147\;\;57\;\;28,19$,	$\alpha_{,,} = 317\;\;47\;\;15,63$
$n = 78$	$n' = 56\;\;34\;\;12,35$,	$n'' = 47\;\;37\;\;39,59$
$\sigma = 20\;\;2'\,24'',41$,	$\sigma' = 17$	$\sigma'' = 15$
$\lambda = 15\;\;41\;\;4,91$,	$\lambda' = 24\;\;25\;\;28,61$,	$\lambda'' = 8\;\;44\;\;23,70$

Hiernach kann dieses Dreieck leicht construirt werden.

77.

Im soeben berechneten sphäroidischen Dreieck lagen beide gegebene Seiten auf derselben Seite des Meridians ihres Durchschnittspunkts, hier soll noch ein Beispiel gegeben werden, in welchem diese Dreiecksseiten auf verschiedenen Seiten des genannten Meridians liegen, um auf die Umstände aufmerksam zu machen die in diesem Falle vorkommen.

Gegeben seien die eine Dreiecksseite $= 4^0$ mit dem Azimuth $= 10^0$, die andere Dreiecksseite $= 3^0\,30'$ mit dem Azimuth $= 300^0$, nebst der reducirten Breite des Durchschnittspunkts $= 30^0$.

Mit den gegebenen Stücken

$$\beta' = 30^0\,, \quad \alpha' = 10^0\,, \quad \sigma = 4^0$$

und mit Anwendung von höchstens siebenstelligen Logarithmen, und den Reihen des Art. 31 giebt die Aufgabe des ersten Abschnittes

$$\beta'' = 26^0\,2'\,53'',621\,, \quad \alpha'' = 9^0\,38'\,9'',136\,, \quad \lambda = 0^0\,46'\,21'',058$$

Im zweiten Theile der Rechnung wende ich statt des Azimuths selbst die Ergänzung desselben zu 360^0 an, und stelle also die gegebenen Stücke wie folgt,

$$\beta' = 30^0\,, \quad \alpha' = 60^0\,, \quad \sigma = 3^0\,30'$$

womit auf dieselbe Weise wie vorher sich

$$\beta'' = 28^0\,12'\,2'',237\,, \quad \alpha'' = 58^0\,19'\,20'',909\,, \quad \lambda = 3^0\,26'\,21'',377$$

ergiebt. Es ist nun hiebei zur Verbindung dieses Resultats mit dem des ersten Theils der Rechnung nichts weiter zu bemerken als dass man die beiden Azimuthe und den Längenunterschied als negativ betrachten

muss; es wird daher namentlich das wahre Azimuth des Endpunkts der zweiten geodätischen Linie nicht $180^0+\alpha''$, sondern $180^0-\alpha''$, und für den dritten Theil der Rechnung müssen die beiden Längenunterschiede addirt werden. Stellt man für diesen die gegebenen Stücke wie folgt,

$$\beta' = 28^0 12' 2'',237\,, \quad \beta'' = 26^0 2' 53'',621\,, \quad \lambda = 4^0 12' 42'',435$$

so ist λ positiv zu nehmen, und man bekommt die Azimuthe in ihrer ursprünglichen Richtung. Die Aufgabe dieses Abschnitts giebt, mit Anwendung der Reihen des Art. 59

$$\alpha' = 61^0 10' 38'',279\,, \quad \alpha'' = 59^0 15' 3'',306\,, \quad \sigma = 4^0 19' 9'',248$$

Um den Bogen K' des eben angeführten Art. möglichst genau zu erhalten habe ich mich bei der Berechnung desselben zehnstelliger Logarithmen bedient. Der Unterschied in dem Werthe desselben, welcher durch Anwendung von siebenstelligen Logarithmen und Durchführung der achten Stelle in den Interpolationen ergiebt, beträgt jedoch nur 0'',008.

Die Zusammenstellung des jetzt berechneten sphäroidischen Dreiecks in der oben dafür eingeführten Bezeichnung giebt nun

$\beta =$	$28^0 12' 2'',237$,	$\beta' =$	30^0 ,	$\beta'' =$	$26^0 2' 53'',621$
$\alpha'' =$	121 40 39,091,	$\alpha_{,} =$	10 ,	$\alpha_{,,} =$	189 38 9,136
$\alpha' =$	61 10 38,279,	$\alpha_{,}'' =$	300 ,	$\alpha_{,,}' =$	239 15 3,306
$n =$	60 30 0,812,	$n' =$	70 ,	$n'' =$	49 36 54,170
$\sigma =$	4 ,	$\sigma' =$	4 19' 9'',248,	$\sigma'' =$	3 30
$\lambda =$	0 46 21,058,	$\lambda' =$	4 12 42,435,	$\lambda'' =$	3 26 21,377

Dritter Abschnitt.

78.

Da die in einem Dreiecksnetz beobachteten, oder gemessenen, Winkel, wenngleich mit der grössten Sorgfalt und Umsicht verfahren, und die besten Instrumente angewendet worden sind, dennoch keine absolute Genauigkeit besitzen, sondern mit kleinen Fehlern behaftet sind, so sind vor Allem diese Fehler auf eine angemessene Art auszugleichen, und dadurch das Dreiecksnetz zu weiterer Verarbeitung vorzubereiten. Die Grundsätze nach welchen diese Ausgleichung erfolgen muss, können zufolge des jetzigen Standes der Wissenschaft nur die folgenden sein:

1) müssen die Winkel so ausgeglichen werden, dass allen geometrischen (oder trigonometrischen) Bedingungen, die im Dreiecksnetze vorhanden sind, Gnüge geleistet werde, und ausserdem muss

2) diese Ausgleichung so beschaffen sein, dass die Summe der mit ihren bez. Gewichten multiplicirten Quadrate der Fehler der Winkelmessungen, die hierauf noch übrig bleiben, ein Minimum werde.

Diese Aufgabe ist immer bestimmt, und zuerst von Gauss und Bessel fast zu gleicher Zeit, von Gauss jedoch ausführlicher, gelöst. Es ist nicht meine Absicht hier näher auf die Auflösung dieser Aufgabe einzugehen, sondern es soll nur in Betracht gezogen werden, wie verfahren werden muss um den trigonometrischen Bedingungen des Dreiecksnetzes mit Sicherheit zu gnügen. Da die Dreieckswinkel auf der Oberfläche der Erde liegen, und die Grundlinien, die man misst um die absolute Länge der Dreiecksseiten zu erhalten, jedenfalls als geodätische Linien betrachtet werden können, so besteht jedes durch die Messungen erhaltene Dreiecksnetz aus sphäroidischen Dreiecken, und die trigonometrischen Bedingungen, die zur Ausgleichung erforderlich sind, müssen der sphäroidischen Trigonometrie entnommen werden.

Hiebei kommt der günstige Umstand in Betracht, dass alle Dreiecke, die unmittelbar gemessen werden können, in Bezug auf die Erdoberfläche und den Umkreis derselben sehr klein sind, und daher diese Dreiecksseiten als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden können. Dieser Umstand veranlasst, dass alle wirklich gemessenen Dreiecke auf einfache Weise vom Ellipsoid auf die Kugel, und von der Kugel auf die Ebene reducirt werden können. Diese Reductionen können auf viele verschiedene Arten ausgeführt werden, z. B. durch Projectionen, denen irgend ein Gesetz zu Grunde gelegt worden ist, aber unter allen möglichen Verfahrungsarten verdient dasjenige bei Weitem den Vorzug, welches die Seiten der sphäroidischen Dreiecke unverändert lässt, und alle erforderlichen Correctionsglieder auf die Winkel überträgt.

Im Art. 40 wurde gezeigt, dass man die geodätischen Azimuthe oder überhaupt Winkel nicht unmittelbar durch die Beobachtungen erhält, und es sind daher vor Allem die unmittelbar erhaltenen astronomischen Azimuthe und Winkel durch die erste Gleichung (53) auf die entsprechenden geodätischen hinzuführen. Die fernere Reduction vom

Ellipsoid auf die Kugel, und von dieser auf die Ebene wird in diesem Abschnitte entwickelt werden.

Nachdem durch dieses Verfahren die Winkel der sphäroidischen Dreiecke auf die Winkel ebener Dreiecke hingeführt worden sind, muss man sich zur Aufstellung und Anwendung der Bedingungen des Dreiecksnetzes der ebenen Trigonometrie bedienen, und nach ausgeführter Ausgleichung bringt man durch entgegengesetzte Anwendung der vorher schon angebrachten Correctionen die ausgeglichenen Winkel auf die sphäroidischen, oder geodätischen zurück.

Die Hinführung eines kleinen sphärischen Dreiecks auf ein ebenes von gleichen Seiten ist zuerst in ihrem grössten Theile von Legendre gegeben, und sein Resultat unter dem Namen des Legendre'schen Satzes Jedem bekannt. Später hat man diesen Satz weiter ausgeführt, und Glieder höherer Ordnung desselben entwickelt.

Ein Ausdruck für die Reduction eines aus geodätischen Linien geformten Dreieckes auf dem Revolutionsellipsoid auf eins von gleichen Seiten auf der Kugel ist von Bessel aufgestellt*), aber nie von ihm bewiesen worden; wenigstens habe ich in seinen Schriften keinen Beweis davon auffinden können, und es ist mir auch nicht bekannt, dass irgend ein Anderer eine Ableitung desselben veröffentlicht hätte. Dieser Bessel'sche Ausdruck, welcher übrigens durch einige Schreib- oder Druckfehler etwas entstellt ist, betrachtet die Seiten des Dreiecks nicht als kleine Grössen der ersten Ordnung, sondern als geodätische Linien von beliebiger Länge, übrigens enthält er nur die mit e^2 multiplicirten Glieder. Die zuletzt genannte Beschränkung ist, wie man weiter unten sehen wird, für die Anwendung von geringem Belang, wenn eine übrigens zweckmässige Anwendung davon gemacht wird, aber der Ausdruck ist so zusammengesetzt, dass man ihn schwerlich wird fortwährend anwenden können, und es scheint nicht, dass er sich ohne Beschränkung seiner Ausdehnung vereinfachen lassen könnte. Bessel hat a. a. O. eine Abkürzung desselben abgeleitet, die für Dreiecke von kleinen Seiten gelten soll, und ihn sehr vereinfacht, aber auch kaum eine sichere Anwendung zulässt. Wäre er bei dieser Abkürzung nur Einen Schritt weiter gegangen, und hätte auch die Glieder fünfter Ordnung berücksichtigt, während er nur die Glieder vierter Ordnung aufnimmt,

---

*) S. Schum. Astr. Nachr. No. 6.

so wäre er auf einen auch einfachen Ausdruck von sicherer Anwendbarkeit gekommen; dieses ist aber von ihm nicht geschehen. Es werden in diesem Abschnitt drei ähnliche Ausdrücke abgeleitet, und daraus für kleine sphäroidische Dreiecke drei einfache Ausdrücke erhalten, die bis auf Grössen sechster Ordnung richtig sind.

Die Verschiedenheit der astronomischen und der geodätischen Azimuthe und Winkel überhaupt ist schon längst erkannt worden, und man hat ihre Unterschiede mit grösserer oder geringerer Genauigkeit ausgedrückt. Bessel hat dieselben durch einen Ausdruck angegeben*), der mit der obigen ersten Gleichung (52) für identisch zu erachten ist, und von diesem Ausdruck hat er auch später eine Ableitung veröffentlicht**). Die zweite und dritte der Gleichungen (52) habe ich nirgends abgeleitet, oder angeführt gefunden, und dasselbe muss ich auch von den Fundamentalgleichungen sagen, aus welchen ich sie abgeleitet habe.

In seiner Theorie der krummen Oberflächen***) hat Gauss die Hinführung eines sphäroidischen Dreiecks auf ein ebenes, dessen Seiten dieselben Längen haben, mit weit grösserer Allgemeinheit ausgeführt, indem er zwar annimmt, dass die Dreiecksseiten kleine Grössen erster Ordnung seien, aber die Oberfläche, auf welcher das sphäroidische Dreieck gebildet ist, gänzlich unbestimmt lässt, so dass seine Auflösung auf jede beliebige Oberfläche angewandt werden kann. Diese Auflösung, so sinnreich und elegant sie auch ist, scheint mir dennoch etwas zu wünschen übrig zu lassen. Erstlich ist sie etwas complicirt, und dabei sind die Erklärungen so kurz gehalten, dass man nicht ohne Mühe zur vollständigen Einsicht in alle Theile derselben gelangt und zweitens möchte man wünschen, dass die Reihen weiter entwickelt worden wären, damit ihre Anwendung eine ausgedehntere würde, da die Gaussischen Endformeln doch nur auf sehr kleine Dreiecke angewandt werden können. Seine Entwickelungen gehen freilich alle eine Ordnung weiter wie seine Endformeln, aber wenn man diese Glieder zuziehen will, so stösst man drittens auf eine Lücke, denn man bedarf dazu der geometrischen Bedeutung der Coefficienten, die er mit f^0, f', f'', g^0, g', h^0 bezeichnet hat, und diese ist in der Abhandlung

*) Schum. Astr. Nachr. No. 3.

**) Schum. Astr. Nachr. B. XIV No. 330.

***) Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas. Göttingae 1828.

nicht gegeben; diese Coefficienten werden blos als die der Entwickelung der Function, die er mit n bezeichnet, nach den Potenzen von p und q definirt, und ihren Zusammenhang mit der Gleichung der Oberfläche lässt er unerörtert.

Durch diese Umstände veranlasst hielt ich nicht für überflüssig eine neue Herleitung der Ausdrücke, auf welche diese Aufgabe führt, zu versuchen, und die gefundene diesem Abschnitte einzuverleiben. Sie stellt die Endformeln alle durch Functionen dar, deren Coefficienten man unmittelbar durch gewisse Differentiationen aus der Gleichung der Oberfläche erhält, so dass die Anwendung auf jede beliebige Oberfläche ohne Weiteres ausgeführt werden kann. Die Anwendung meiner Endformeln auf das Revolutionsellipsoid von kleiner Excentricität ist beigefügt, und durch Beispiele erläutert.

Der Gang meiner Auflösung ist ein ganz anderer, wie der der Gaussischen. Ich wende um sie zu erhalten keine weiteren Grundgleichungen an, wie den schon im ersten Abschnitte abgeleiteten Ausdruck $dh^2 + m^2 dq^2$ des Quadrats des Linearelements auf irgend einer Oberfläche, und die dazu gehörige Bedingungsgleichung für die kürzeste Linie auf derselben Oberfläche, während Gauss zwei solcher Formen braucht, nämlich in seinen Bezeichnungen $dr^2 + m^2 d\varphi^2$ und $n^2 dp^2 + dq^2$ nebst den dazu gehörigen Bedingungsgleichungen der kürzesten Linie. Die Einführung des Krümmungsmaasses der Oberfläche, in dem Sinne, in welchem es Gauss in der genannten Abhandlung zuerst aufgestellt hat, ist auch in der ausgedehnteren, neuen Auflösung von wesentlichem Nutzen gewesen.

Es ist noch eines wichtigen Umstandes zu erwähnen, welcher in dieser Aufgabe, wenigstens bei ihrer Anwendung auf das Ellipsoid von kleiner Excentricität, und wahrscheinlich bei jeder Anwendung derselben mehr oder weniger, eintritt. Man wird weiter unten sehen, dass in den hier abgeleiteten Endformeln für das Revolutionsellipsoid von kleiner Excentricität nicht nur die Glieder vierter und fünfter, sondern auch zum Theil die sechster und siebenter Ordnung nicht von einander getrennt vorkommen, sondern in einander geflochten sind, indem sie sich auf verwandte Formen hinführen liessen. Jede dieser beiden Gruppen bilden Glieder, deren Werthe in der Regel bedeutend abnehmen, mit anderen Worten, die Summe der Glieder vierter und fünfter Ordnung ist gemeiniglich weit grösser wie die Summe der Glieder sechster und sie-

benter Ordnung, und es kann voraus gesehen werden, dass dieses bei den Gliedern höherer Ordnungen in ähnlicher Weise stattfinden wird, wenn nur nicht Dreiecke von allzugrossen Seiten gewählt werden. Anders verhält es sich aber mit den Gliedern, aus welchen jede dieser Gruppen bestehen, die Glieder fünfter Ordnung sind nicht unbedingt kleiner wie die Glieder vierter Ordnung, sie können vielmehr grösser werden wie diese, und ebenso können die Glieder siebenter Ordnung grösser werden wie die der sechsten. Besonders bemerklich ist, dass diese Glieder selbst wandelbare, aber ihre Summen feste, Werthe annehmen, und man kann ganz kleine Dreiecke angeben, für welche dieses schon der Fall ist. Es folgt hieraus, dass die Erweiterung der Gaussischen Endformeln, die bei ihrer Anwendung auf das Revolutionsellipsoid von kleiner Excentricität die Glieder der vierten und der fünften Ordnung enthalten würden, auf Glieder sechster Ordnung von gar keinem Nutzen gewesen wäre, sondern dass es nothwendig auch der Entwickelung der Glieder siebenter Ordnung bedurfte um Formeln zu erhalten, die wesentlich grössere Genauigkeit gewähren. Durch Ausdehnung der Entwickelungen bis auf diese Grenze gelangte ich zu Ausdrücken, die auf die Auflösung von sphäroidischen Dreiecken angewandt werden können, deren Seiten bis 20^0 lang sind.

Den vorstehenden Erklärungen zufolge bin ich also allenthalben in dieser Aufgabe Eine Ordnung weiter gegangen wie Gauss im Allgemeinen, und zwei Ordnungen weiter wie Gauss in seinen Endformeln. Meine allgemeinen Endformeln sind bis auf Grössen der sechsten Ordnung vollständig, und bei der Anwendung derselben auf das Revolutionsellipsoid von kleiner Excentricität folgen daraus Endformeln, die bis auf Grössen achter Ordnung vollständig sind.

79.

Nehmen wir zuerst die Reduction des sphärischen Dreiecks auf ein ebenes von gleichen Seiten vor. Die Seiten dieser beiden Dreiecke, die wir uns vorläufig in Theilen des Kugelhalbmessers ausgedrückt denken wollen, sollen mit a, b, c, die Winkel des sphärischen Dreiecks mit A, B, C, und die des ebenen Dreiecks mit $A+\Delta A$, $B+\Delta B$, $C+\Delta C$ bezeichnet werden. Die Trigonometrie giebt hierauf die beiden folgenden Gleichungen

$$(95) \quad . \quad . \quad \sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c$$

$$bc \cos(A + \varDelta A) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2$$

Die Entwickelung der zweiten in Bezug auf $\varDelta A$, und die Vergleichung derselben mit der ersten führt auf die folgende

$$\sin b \sin c \sin A . \varDelta A + \frac{1}{2} \sin b \sin c \cos A . \varDelta A^2 = K$$

wenn

$$K = \cos a - \cos b \cos c + (a^2 - b^2 - c^2) \frac{\sin b \sin c}{2bc}$$

gesetzt wird. Aus den Reihen

$$\sin a = a\left(1 - \frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{120}a^4 \mp \ldots\right)$$

$$\cos a = 1 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{24}a^4 - \frac{1}{720}a^6 \pm \ldots$$

folgt aber leicht, wenn man sie auf b und c anwendet,

$$\cos b \cos c = 1 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{24}b^4 + \frac{1}{4}b^2c^2 + \frac{1}{24}c^4$$
$$- \frac{1}{720}b^6 - \frac{1}{48}b^4c^2 - \frac{1}{48}b^2c^4 - \frac{1}{720}c^6$$

$$\frac{\sin b \sin c}{bc} = 1 - \frac{1}{6}b^2 - \frac{1}{6}c^2 + \frac{1}{120}b^4 + \frac{1}{36}b^2c^2 + \frac{1}{120}c^4$$

woraus

$$K = \frac{1}{24}a^4 - \frac{1}{12}a^2b^2 - \frac{1}{12}a^2c^2 + \frac{1}{24}b^4 - \frac{1}{12}b^2c^2 + \frac{1}{24}c^4$$
$$- \frac{1}{720}a^6 + \frac{1}{240}a^2b^4 + \frac{1}{72}a^2b^2c^2 + \frac{1}{240}a^2c^4$$
$$- \frac{1}{360}b^6 + \frac{1}{360}b^4c^2 + \frac{1}{360}b^2c^4 - \frac{1}{360}c^6$$

folgt. Die Gleichung (95) giebt aber

$$\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c$$

die durch die Substitution der obigen Reihen in

$$\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = -\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{2}a^2c^2 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{2}b^2c^2 - \frac{1}{4}c^4$$
$$+ \frac{1}{24}a^6 - \frac{1}{24}a^4b^2 - \frac{1}{24}a^4c^2 - \frac{1}{24}a^2b^4 - \frac{1}{4}a^2b^2c^2 - \frac{1}{24}a^2c^4$$
$$+ \frac{1}{24}b^6 - \frac{1}{24}b^4c^2 - \frac{1}{24}b^2c^4 + \frac{1}{24}c^6$$

übergeht, und die Division des vorstehenden Ausdrucks von K durch diesen giebt

$$K = -\frac{1}{6}\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A \left\{1 + \frac{2}{15}a^2 + \frac{1}{10}b^2 + \frac{1}{10}c^2\right\}$$

Da nun in dem mit $\varDelta A^2$ multiplicirten Gliede des oben für $\varDelta A$ erhaltenen Ausdrucks die Substitution

$$\sin b \sin c \cos A = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2$$

ausreichend genau ist, so erhält man

$$\sin b \sin c \sin A . \varDelta A - \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2)\varDelta A^2$$
$$= -\frac{1}{6}\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A\left\{1 + \frac{2}{15}a^2 + \frac{1}{40}b^2 + \frac{1}{10}c^2\right\}$$

woraus auf bekannte Art

$$\varDelta A = -\frac{1}{6}\sin b \sin c \sin A\left\{1 + \frac{11}{120}a^2 + \frac{17}{120}b^2 + \frac{17}{120}c^2\right\}$$

folgt.

80.

Um den eben erhaltenen Ausdruck für $\varDelta A$ von der Fläche des sphärischen Dreiecks abhängig zu machen, gehe ich von der bekannten Gleichung

$$A + B + C = 180^0 + \Delta$$

aus, in welcher diese Fläche mit Δ bezeichnet ist. Setzt man

$$A_0 + B + C = 180^0$$

so wird $A = A_0 + \Delta$, und

$$\sin A = \sin A_0 + \Delta \cos A_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 \sin A_0$$
$$\cos A = \cos A_0 - \Delta \sin A_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 \cos A_0$$

Die trigonometrische Gleichung

$$\cos b \sin A \sin C = \cos B + \cos A \cos C$$

wird hiedurch

$$\cos b\left(1 + \Delta\frac{\cos A_0}{\sin A_0} - \frac{1}{2}\Delta^2\right) = 1 - \Delta\frac{\cos C}{\sin C} - \frac{1}{2}\Delta^2\frac{\cos A_0 \cos C}{\sin A_0 \sin C}$$

deren Entwickelung bis auf Grössen sechster Ordnung

$$\cos b = 1 - \Delta\frac{\sin B}{\sin A_0 \sin C} + \frac{1}{2}\Delta^2\frac{\cos B}{\sin A_0 \sin C} + \Delta^2\frac{\cos A_0 \sin B}{\sin^2 A_0 \sin C}$$

giebt. Es wird also auch

$$\sin^2 b = 2\Delta\frac{\sin B}{\sin A_0 \sin C}\left\{1 - \frac{1}{2}\Delta\frac{\cos B}{\sin B} - \Delta\frac{\cos A_0}{\sin A_0} - \frac{1}{2}\Delta\frac{\sin B}{\sin A_0 \sin C}\right\}$$

und eliminirt man hieraus Δ innerhalb der Klammern durch die bis auf Grössen vierter Ordnung richtigen Gleichungen

$$\Delta = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A_0 = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin A_0 \sin C}{\sin B}$$

und $\cos B$ nebst $\cos A_0$ durch

$$ac\cos B = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2$$

$$bc\cos A_0 = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2$$

dann ergiebt sich

$$\sin^2 b = 2\Delta \frac{\sin B}{\sin A_0 \sin C}\left\{1 + \frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{8}b^2 - \frac{3}{8}c^2\right\}$$

und ebenso, oder durch blose Vertauschung der Buchstaben wird

$$\sin^2 c = 2\Delta \frac{\sin C}{\sin A_0 \sin B}\left\{1 + \frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{8}b^2 - \frac{3}{8}c^2\right\}$$

Diese beiden Gleichungen geben

$$\sin b \sin c \sin A_0 = 2\Delta\left\{1 + \frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{8}b^2 - \frac{3}{8}c^2\right\}$$

aber

$$\begin{aligned}\sin b \sin c \sin A_0 &= \sin b \sin c \sin A - \Delta bc\cos A_0 \\ &= \sin b \sin c \sin A + \frac{1}{2}\Delta(a^2 - b^2 - c^2)\end{aligned}$$

und folglich wird

$$\sin b \sin c \sin A = 2\Delta\left\{1 - \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{8}c^2\right\}$$

Hiemit kann man Δ in den im vor. Art. erhaltenen Ausdruck für $\varDelta A$ einführen, und durch Vertauschung der Buchstaben erhält man hierauf ähnliche Ausdrücke für $\varDelta B$ und $\varDelta C$. Nehmen wir jetzt an, dass diese Ausdrücke die Winkeländerungen in Secunden angeben sollen, so muss Δ auch in Secunden ausgedrückt werden, und nimmt man ferner an, dass die Dreiecksseiten in irgend einem Linearmaasse ausgedrückt seien, so muss man sie mit dem in demselben Maasse auszudrückenden Halbmesser der Kugel, den ich mit R bezeichnen werde, dividiren. Die Ausdrücke für $\varDelta A$, $\varDelta B$, $\varDelta C$ werden demnach die folgenden

$$(96)\quad . \quad \left\{\begin{aligned}\varDelta A &= -\frac{1}{3}\Delta\left\{1 - \frac{a^2}{30R^2} + \frac{b^2}{60R^2} + \frac{c^2}{60R^2}\right\} \\ \varDelta B &= -\frac{1}{3}\Delta\left\{1 + \frac{a^2}{60R^2} - \frac{b^2}{30R^2} + \frac{c^2}{60R^2}\right\} \\ \varDelta C &= -\frac{1}{3}\Delta\left\{1 + \frac{a^2}{60R^2} + \frac{b^2}{60R^2} - \frac{c^2}{30R^2}\right\}\end{aligned}\right.$$

Lässt man hierin die Grössen vierter Ordnung weg, so entsteht daraus der bekannte Legendre'sche Satz, und ausserdem bekommt man aus denselben

$$\varDelta A + \varDelta B + \varDelta C = -\Delta$$

welche Gleichung sich von selbst versteht.

81.

Wenn die Dreiecke nicht grösser sind, als dass man in den Ausdrücken (96) mit den Gliedern niedrigster (zweiter) Ordnung ausreicht, so ist es auch ausreichend

$$\Delta = r\frac{bc}{2R^2}\sin A\,,\ \text{oder} = r\frac{ac}{2R^2}\sin B\,,\ \text{oder} = r\frac{ab}{2R^2}\sin C$$

zu setzen, wo wieder $r = 206265''$ ist, sind aber die Dreiecke so gross, dass die Glieder vierter Ordnung der Ausdrücke (96) merklich werden, so muss Δ, um die zu erreichende Genauigkeit nicht illusorisch zu machen, genauer berechnet werden.

Ich will hievon Gelegenheit nehmen die einfachen und strengen Ausdrücke für den sphärischen Ueberschuss, die man immer noch selten in den Handbüchern findet, auf kurze Weise abzuleiten. Nehmen wir wieder die Gleichung

$$A + B + C = 180^0 + \Delta$$

vor, dann kann man die allbekannten Gleichungen, die dazu dienen um aus den gegebenen Winkeln eines sphärischen Dreiecks die Seiten zu erhalten, wie folgt stellen,

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta\cos\tfrac{1}{2}(A + B - C) = \sin A\sin B\sin^2\tfrac{1}{2}c$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta\cos\tfrac{1}{2}(A - B + C) = \sin A\sin C\sin^2\tfrac{1}{2}b$$

$$\sin B\sin C\cos\tfrac{1}{2}a = \cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)\cos\tfrac{1}{2}(A-B+C)$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen, Seite für Seite, mit einander, so erhält man, nach Ausziehung der Quadratwurzel aus dem Produkt sogleich

$$\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\sin A \quad . \; . \; . \quad (97)$$

die nach der Division durch $\cos\frac{1}{2}a$ schon eine einfache und strenge Formel zur Berechnung des sphärischen Ueberschusses wird. Sie ist indes nicht allgemein anwendbar, da sie in den Fällen, in welchen sich Δ nicht sehr weit von 180^0 entfernt, nur wenig genaue Resultate geben kann. Man kann sie aber durch die folgende Umformung auf alle Fälle anwendbar machen. Sie giebt zuerst

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}\Delta = \cos^2\tfrac{1}{2}a - \sin^2\tfrac{1}{2}b\sin^2\tfrac{1}{2}c\sin^2 A$$

deren rechte Seite durch Zuziehung der Gleichung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

zu einem vollkommenen Quadrat gemacht werden kann. Diese letztere verwandelt man leicht in

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a = \cos^2\tfrac{1}{2}b\cos^2\tfrac{1}{2}c + \sin^2\tfrac{1}{2}b\sin^2\tfrac{1}{2}c$$
$$+ 2\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c\cos A$$

und eliminirt man hiemit $\cos^2\frac{1}{2}a$ aus der rechten Seite der vorhergehenden, so ergiebt sich nach der Ausziehung der Quadratwurzel

$$(98)\qquad \cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}\Delta = \cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c + \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\cos A$$

Die Division der (97) durch diese giebt

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\sin A}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\cos A}$$

die in allen Fällen ein möglichst genaues Resultat gewährt, und sich überdies in eine, nach einem sehr einfachen Gesetz fortschreitende Reihe auflösen lässt, von welcher jedoch hier abgesehen werden soll. Es giebt aber noch eine einfachere Formel für die Berechnung von Δ, die sich aus den vorhergehenden auf folgende Weise ableiten lässt.

Eliminirt man A aus der (97) durch die folgenden bekannten Gleichungen

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}, \qquad \sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}$$

wo $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist, so ergiebt sich

$$(99)\qquad \cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

Eliminirt man auf gleiche Weise auch A aus der (98), so wird

$$\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}\Delta = \cos\tfrac{1}{2}(b+c) + \frac{\sin s\sin(s-a)}{2\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

und durch Hülfe der bekannten Gleichungen

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}\Delta = \cos\Delta + 1$$

$$\cos a + \cos(b+c) = 2\cos s\cos(s-a)$$

ergiebt sich hieraus

$$\cos\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{4}\Delta = \frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)$$

Es sind aber auch

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}b \quad \cos\tfrac{1}{2}c &= \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(b+c) + \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(b-c)\\
\sin\tfrac{1}{2}s \quad \sin\tfrac{1}{2}(s-a) &= \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\\
\cos\tfrac{1}{2}(s-b)\cos\tfrac{1}{2}(s-c) &= \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(b-c)
\end{aligned}$$

identische Gleichungen, und vergleicht man diese mit dem vorstehenden Ausdruck für $\cos\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{4}\Delta$, so wird man ohne Weiteres gewahr, dass daraus

$$\cos\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{4}\Delta = \frac{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

folgt. Dividirt man die (99) mit dieser, so ergiebt sich schliesslich durch eine einfache Reduction

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}\Delta = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}s\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-c)} \qquad (100)$$

die auch stets sicher angewandt werden kann.

82.

In der Geodäsie wird man wohl selten in die Nothwendigkeit versetzt werden, von den eben abgeleiteten Formeln zur Berechnung des sphärischen Ueberschusses Gebrauch machen zu müssen, sondern sich in den Fällen, in welchen die zu Anfang des vor. Art. angeführten Näherungsformeln nicht ausreichend befunden werden sollten, mit einem Ausdruck begnügen können, welcher denselben Grad der Genauigkeit besitzt, wie die Ausdrücke (96), mit anderen Worten, welcher bis auf Grössen sechster Ordnung richtig ist. Einen solchen kann man leicht aus der Gleichung (97) ableiten, und es macht wenig Mühe in demselben auch die Glieder sechster Ordnung mit aufzunehmen, weshalb dieses hier geschehen soll. Bekannte Reihen sind

$$\sin\tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{2}b\left(1 - \tfrac{1}{24}b^2 + \tfrac{1}{1920}b^4\right)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{2}c\left(1 - \tfrac{1}{24}c^2 + \tfrac{1}{1920}c^4\right)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a = 1 - \tfrac{1}{8}a^2 + \tfrac{1}{384}a^4$$

wenn man der Kürze wegen den Divisor R und dessen Potenzen weglässt, die schliesslich leicht hinzugefügt werden können. Multiplicirt man die beiden ersten Reihen mit einander, und dividirt das Produkt mit der dritten, so bekommt man in Folge der (97)

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \tfrac{1}{4}bc\sin A\Big\{1 + \tfrac{1}{8}a^2 - \tfrac{1}{24}b^2 - \tfrac{1}{24}c^2$$
$$+ \tfrac{5}{384}a^4 - \tfrac{1}{192}a^2b^2 - \tfrac{1}{192}a^2c^2 + \tfrac{1}{1920}b^4 + \tfrac{1}{576}b^2c^2 + \tfrac{1}{1920}c^4\Big\}$$

Aber mit hier hinreichender Genauigkeit ist

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \tfrac{1}{2}\Delta - \tfrac{1}{48}\Delta^3$$

und

$$\Delta^3 = \tfrac{1}{8}b^3c^3\sin^3 A = \tfrac{1}{2}bc\sin A\left(\tfrac{1}{2}bc\sin A\right)^2$$

Eliminirt man hier die Function innerhalb der Klammern durch die Gleichung

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

so wird

$$\Delta^3 = \tfrac{1}{2}bc\sin A\Big\{-\tfrac{1}{16}a^4 + \tfrac{1}{8}a^2b^2 + \tfrac{1}{8}a^2c^2 - \tfrac{1}{16}b^4 + \tfrac{1}{8}b^2c^2 - \tfrac{1}{16}c^4\Big\}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in den für $\sin\tfrac{1}{2}\Delta$, und die Ergänzung der oben ausgelassenen Divisoren giebt sogleich

$$\Delta = \tfrac{1}{2}bc\sin A\Big\{1 + \frac{a^2}{8R^2} - \frac{b^2}{24R^2} - \frac{c^2}{24R^2}$$
$$+ \frac{a^4}{96R^4} - \frac{b^4}{480R^4} + \frac{b^2c^2}{144R^4} - \frac{c^4}{480R^4}\Big\}$$

woraus durch die Vertauschung der Buchstaben die folgenden hervorgehen:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ac\sin B\Big\{1 - \frac{a^2}{24R^2} + \frac{b^2}{8R^2} - \frac{c^2}{24R^2}$$
$$- \frac{a^4}{480R^4} + \frac{b^4}{96R^4} + \frac{a^2c^2}{144R^4} - \frac{c^4}{480R^4}\Big\}$$

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ab\sin C\Big\{1 - \frac{a^2}{24R^2} - \frac{b^2}{24R^2} + \frac{c^2}{8R^2}$$
$$- \frac{a^4}{480R^4} - \frac{b^4}{480R^4} + \frac{a^2b^2}{144R^4} + \frac{c^4}{96R^4}\Big\}$$

Diese Ausdrücke sind bis auf Grössen achter Ordnung genau, und es ist in denselben vorausgesetzt dass Δ in demselben Linearmaasse ausgedrückt werde wie die Dreiecksseiten.

83.

Mit Uebergehung der Glieder sechster Ordnung lässt sich hieraus noch ein Ausdruck für Δ ableiten, welcher sich besonders zur Anwendung eignet. Setzt man zur Abkürzung, und um Δ in Secunden ausgedrückt zu erhalten

$$(\Delta a) = \frac{r}{2R^2} bc \sin A$$

und nimmt auf die folgenden Ausdrücke, die bis auf Grössen vierter Ordnung richtig sind, Bedacht

$$\frac{a^2}{R^2} = \frac{2(\Delta a)\sin A}{r \sin B \sin C}; \quad \frac{b^2}{R^2} = \frac{2(\Delta a)\sin B}{r \sin A \sin C}; \quad \frac{c^2}{R^2} = \frac{2(\Delta a)\sin C}{r \sin A \sin B}$$

so wird der erste der Ausdrücke für Δ des vor. Art.

$$\Delta = (\Delta a) + \frac{(\Delta a)^2}{12r} \cdot \frac{3\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C}{\sin A \sin B \sin C}$$

Da aber jetzt in den Gliedern vierter Ordnung

$$A + B + C = 180^0$$

gesetzt werden darf, so wird, wie leicht zu beweisen ist,

$$\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = -2\cos A \sin B \sin C$$

und man bekommt folglich

$$\Delta = (\Delta a) + \frac{(\Delta a)^2}{6r} \frac{\sin A}{\sin B \sin C} - \frac{(\Delta a)^2}{6r} \operatorname{cotg} A$$

zur Anwendung in den Ausdrücken (96) hinreichend genau, da er bis auf Grössen sechster Ordnung richtig ist. Durch die Vertauschung der Buchstaben erhält man hieraus die folgenden

$$(\Delta b) = \frac{r}{2R^2} ac \sin B$$

$$\Delta = (\Delta b) + \frac{(\Delta b)^2}{6r} \frac{\sin B}{\sin A \sin C} - \frac{(\Delta b)^2}{6r} \operatorname{cotg} B$$

und

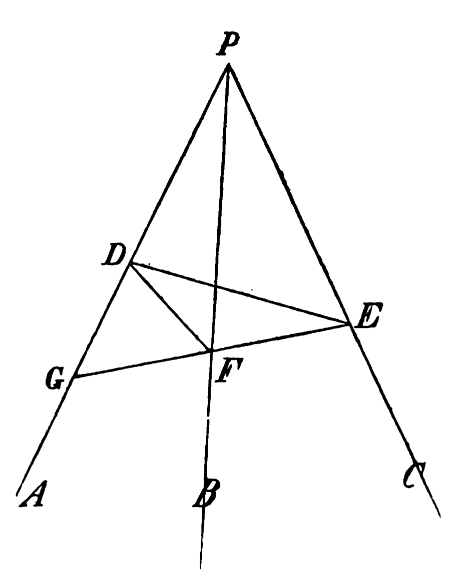
$$(\Delta c) = \frac{r}{2R^2} ab \sin C$$

$$\Delta = (\Delta c) + \frac{(\Delta c)^2}{6r} \frac{\sin C}{\sin A \sin B} - \frac{(\Delta c)^2}{6r} \operatorname{cotg} C$$

Unter diesen drei Systemen von Formeln kann man in der Anwendung beliebig wählen.

84.

Die ähnliche Reduction des sphäroidischen Dreiecks auf dem Revolutionsellipsoid auf das sphärische lässt sich nicht so einfach ausführen, obgleich das Resultat derselben, wenigstens bis auf Grössen sechster Ordnung, sehr einfach ist, und in der Form Aehnlichkeit mit dem vorhergehenden hat.



In der vorstehenden Figur sei P der Nordpol des Ellipsoids, PA, PB, PC drei Meridiane, auf welchen die Ecken des allgemeinen sphäroidischen Dreiecks DEF liegen. Die reducirten Breiten dieser Ecken und die Längenunterschiede derselben seien

$$PD = 90^0 - \beta\ , \quad APB = \lambda'$$
$$PE = 90^0 - \beta'\ , \quad BPC = \lambda$$
$$PF = 90^0 - \beta''\ , \quad APC = \lambda''$$

Die Dreiecksseiten und Winkel seien

$$FE = \sigma\ , \quad FDE = n$$
$$DF = \sigma'\ , \quad DEF = n'$$
$$DE = \sigma''\ , \quad DFE = n''$$

und es wird angenommen, dass diese Seiten in Bogentheilen des Aequators ausgedrückt seien. Die Azimuthe sollen wieder alle vom Südpunkt des Horizonts in einer und derselben Richtung durch den ganzen Um-

kreis gezählt werden, wendet man daher auch in Bezug auf diese die im Art. 76 eingeführte Bezeichnung an, so wird

$$ADF = \alpha', \quad BFE = \alpha_{''}, \quad FEP + 180^0 = \alpha_{,}$$
$$ADE = \alpha'', \quad DFP + 180^0 = \alpha_{''}', \quad DEP + 180^0 = \alpha_{,}''$$

Man erkennt hierauf leicht aus der Figur dass

$$n = \alpha'' - \alpha'$$
$$n' = \alpha_{,} - \alpha_{,}''$$
$$n'' = \alpha_{''}' - \alpha_{''}$$

so wie

$$\lambda'' = \lambda + \lambda'$$

Die im Vorgehenden eingeführten Hülfsbögen χ und ω sollen auf dieselbe Weise theils ohne Striche, theils mit einem, theils mit zwei Strichen bezeichnet werden. Auch wird jetzt

$$\omega = \lambda + \Delta\omega$$
$$\omega' = \lambda' + \Delta\omega'$$
$$\omega'' = \lambda'' + \Delta\omega''$$

85.

Bildet man nun für je zwei der Dreieckspunkte *DEF* das im Art. 27 eingeführte sphärische Dreieck, so wird man drei sphärische Dreiecke erhalten, in welchen die Seiten und die gegenüber liegenden Winkel die folgenden sind.

zu *FPE* gehörig $\begin{cases} 90^0 - \beta'', & 90^0 - \beta', & \chi \\ -180^0 + \alpha_{,}, & 180^0 - \alpha_{''}, & \omega \end{cases}$

zu *DPF* gehörig $\begin{cases} 90 - \beta, & 90 - \beta'', & \chi' \\ -180^0 + \alpha_{''}', & 180^0 - \alpha', & \omega' \end{cases}$

zu *DPE* gehörig $\begin{cases} 90^0 - \beta', & 90^0 - \beta, & \chi'' \\ 180^0 - \alpha'', & -180^0 + \alpha_{,}'', & \omega'' \end{cases}$

Von den in diesen Dreiecken statt findenden Relationen werden für unsern Zweck die folgenden gebraucht.

$$\begin{aligned}
\sin\chi'\sin\alpha' &= \cos\beta''\sin\omega' \\
\sin\chi'\cos\alpha' &= -\cos\beta\sin\beta''+\sin\beta\cos\beta''\cos\omega' \\
\sin\chi''\sin\alpha'' &= \cos\beta'\sin\omega'' \\
\sin\chi''\cos\alpha'' &= -\cos\beta\sin\beta'+\sin\beta\cos\beta'\cos\omega'' \\
\cos\chi' &= \sin\beta\sin\beta''+\cos\beta\cos\beta''\cos\omega' \\
\cos\chi'' &= \sin\beta\sin\beta'+\cos\beta\cos\beta'\cos\omega'' \\
\cos\chi &= \sin\beta'\sin\beta''+\cos\beta'\cos\beta''\cos\omega
\end{aligned}$$

aus welchen, wegen $n = \alpha'' - \alpha'$ leicht

$$\cos\chi'\cos\chi''+\sin\chi'\sin\chi''\cos n = \cos\chi+\cos\beta'\cos\beta''\{\cos(\omega''-\omega')-\cos\omega\}$$

folgt. Sei nun

$$\sigma = \chi + \Delta\sigma\,,\quad \sigma' = \chi' + \Delta\sigma'\,,\quad \sigma'' = \chi'' + \Delta\sigma''$$

so ergiebt die oben erhaltene Gleichung

$$\begin{aligned}
&\cos(\sigma'-\Delta\sigma')\cos(\sigma''-\Delta\sigma'')+\sin(\sigma'-\Delta\sigma')\sin(\sigma''-\Delta\sigma'')\cos n \\
&= \cos(\sigma-\Delta\sigma)+\cos\beta'\cos\beta''\,\{\cos(\lambda+\Delta\omega''-\Delta\omega')-\cos(\lambda+\Delta\omega)\}
\end{aligned}$$

welches eine strenge Relation im allgemeinen sphäroidischen Dreieck ist. Nehmen wir nun ein sphärisches Dreieck an, welches dieselben Seiten wie das sphäroidische, aber die Winkel $n+\Delta n$, $n'+\Delta n'$, $n''+\Delta n''$ hat, so giebt dieses die Gleichung

$$\cos\sigma'\cos\sigma''+\sin\sigma'\sin\sigma''\cos(n+\Delta n) = \cos\sigma$$

und aus diesen beiden Gleichungen muss der Ausdruck von Δn ermittelt werden.

86.

Entwickelt man die beiden eben gefundenen Gleichungen indem man blos auf die erste Potenz der mit vorgesetztem Δ bezeichneten Incremente Rücksicht nimmt, so wird die Gleichung des sphäroidischen Dreiecks

$$\begin{aligned}
&\cos\sigma'\cos\sigma''+\sin\sigma'\sin\sigma''\cos n \\
&+\{\sin\chi'\cos\chi''-\cos\chi'\sin\chi''\cos n\}\Delta\sigma'+\{\cos\chi'\sin\chi''-\sin\chi'\cos\chi''\cos n\}\Delta\sigma'' \\
&= \cos\sigma'+\sin\chi\Delta\sigma+\cos\beta'\cos\beta''\sin\omega\,\{\Delta\omega+\Delta\omega'-\Delta\omega''\}
\end{aligned}$$

da man wegen der Uebergehung der Quadrate der Incremente χ, χ', χ'', ω, bez. statt σ, σ', σ'', λ setzen, und überhaupt die Coefficienten der Incremente so behandeln darf, als gehörten sie dem sphärischen Dreieck an,

welches die Seiten χ, χ', χ'' und die Winkel n, n', n'' hat. Dieses Dreieck giebt aber

$$\sin\chi\cos n'' = \sin\chi'\cos\chi'' - \cos\chi'\sin\chi''\cos n$$
$$\sin\chi\cos n' = \cos\chi'\sin\chi'' - \sin\chi'\cos\chi''\cos n$$

und folglich geht die vorstehende Gleichung in die folgende über,

$$\cos\sigma'\cos\sigma'' + \sin\sigma'\sin\sigma''\cos n + \sin\chi\cos n''\,\varDelta\sigma' + \sin\chi\cos n'\,\varDelta\sigma''$$
$$= \cos\sigma' + \sin\chi\,\varDelta\sigma + \cos\beta'\cos\beta''\,\{\varDelta\omega + \varDelta\omega' - \varDelta\omega''\}$$

Die Gleichung des vor. Art. für das correspondirende sphärische Dreieck wird durch ein einfaches Verfahren

$$\cos\sigma'\cos\sigma'' + \sin\sigma'\sin\sigma''\cos n - \sin\chi'\sin\chi''\sin n\,\varDelta n = \cos\sigma$$

und wenn man erwägt, dass in dem jetzt eingeführten sphärischen Dreieck die Relationen

$$\frac{\sin\chi}{\sin n} = \frac{\sin\chi'}{\sin n'} = \frac{\sin\chi''}{\sin n''}$$

statt finden, so erhält man aus dem Unterschied der beiden eben entwickelten Gleichungen

$$\varDelta n = \frac{1}{\sin n'\sin n''}\left\{\sin n\,\frac{\varDelta\sigma}{\sin\chi} - \sin n'\cos n''\,\frac{\varDelta\sigma'}{\sin\chi'} - \cos n'\sin n''\,\frac{\varDelta\sigma''}{\sin\chi''}\right\}$$
$$+ \frac{\cos\beta'\cos\beta''\sin\omega}{\sin\chi\sin\chi''\sin n'}\left\{\varDelta\omega + \varDelta\omega' - \varDelta\omega''\right\}.$$

Auf dieselbe Art bekommt man ausserdem

$$\varDelta n' = \frac{1}{\sin n\sin n''}\left\{\sin n'\,\frac{\varDelta\sigma'}{\sin\chi'} - \cos n\sin n''\,\frac{\varDelta\sigma''}{\sin\chi''} - \sin n\cos n''\,\frac{\varDelta\sigma}{\sin\chi}\right\}$$
$$+ \frac{\cos\beta\cos\beta''\sin\omega'}{\sin\chi\sin\chi'\sin n''}\left\{\varDelta\omega + \varDelta\omega' - \varDelta\omega''\right\}$$

$$\varDelta n'' = \frac{1}{\sin n\sin n'}\left\{\sin n''\,\frac{\varDelta\sigma''}{\sin\chi''} - \sin n\cos n'\,\frac{\varDelta\sigma}{\sin\chi} - \cos n\sin n'\,\frac{\varDelta\sigma'}{\sin\chi'}\right\}$$
$$- \frac{\cos\beta\cos\beta'\sin\omega''}{\sin\chi'\sin\chi''\sin n}\left\{\varDelta\omega + \varDelta\omega' - \varDelta\omega''\right\}$$

Ich bemerke hiezu, dass die dritte dieser Gleichungen aus den beiden andern deshalb nicht durch die Vertauschung der Buchstaben erhalten werden kann, weil die Gleichung $\lambda'' = \lambda + \lambda'$ die betreffende Vertauschung nicht zulässt.

87.

Die Reductionen, die zur Entwickelung der eben erhaltenen Gleichungen erforderlich sind, führen sich weit leichter aus, wenn man statt

des bis jetzt betrachteten allgemeinen sphäroidischen Dreiecks das besondere Dreieck betrachtet, in welchem die eine Seite ein Meridianbogen ist. Der Uebergang vom besonderen zum allgemeinen Dreieck ist nach dem Schlusse der Entwickelungen leicht zu bewerkstelligen.

Man verlängere die Dreiecksseite FE der Figur des Art. 84 bis in G, wo sie den Meridian PA schneidet und bezeichne die reducirte Breite dieses Durchschnittspunkts mit w, so wie den Winkel PGE mit m. Hiemit hat man das besondere sphäroidische Dreieck EDG erhalten, in welchem, ausser den schon eingeführten Beziehungen die Seiten

$$EG = \Sigma\,,\quad DG = \Sigma'$$

gesetzt werden sollen. Die zu Σ und Σ' gehörigen, dem Bogen χ analogen, Bögen sollen φ und φ' genannt werden. Da nun ausserdem der Dreieckswinkel n in α'' übergeht, so verwandelt sich die Gleichung des vor. Art. für Δn in die folgende,

$$(101)\quad \Delta\alpha'' = \frac{1}{\sin n' \sin m}\left\{\sin\alpha'' \frac{\Delta\Sigma}{\sin\varphi} - \sin n' \cos m \frac{\Delta\Sigma'}{\sin\varphi'} - \cos n' \sin m \frac{\Delta\sigma''}{\sin\chi''}\right\}$$
$$+ \frac{\cos\beta' \cos w \sin\omega}{\sin\varphi \sin\chi'' \sin n'}(\Delta\omega - \Delta\omega'')$$

indem jetzt $\Delta\omega' = 0$ ist, da die Punkte D und G in Einem Meridian liegen.

88.

Nehmen wir die Gleichung (17) vor, die mit Uebergehung der mit e^4 und e^6 multiplicirten Glieder folgender Maassen gestellt werden kann,

$$\sigma = \left(1 - \tfrac{1}{2} e^2 + \tfrac{1}{4} k^2\right)\chi + \tfrac{1}{4} k^2 \cos(2\varphi' + \chi)\sin\chi$$

und in welcher, der genannten Uebergehungen wegen, $k = e \sin\beta_0$ angenommen werden darf. Eliminirt man hieraus β_0 und φ' durch die Gleichungen (15), so nimmt sie die folgende Form an,

$$\sigma = \left(1 - \tfrac{1}{4} e^2 - \tfrac{1}{4} e^2 \cos^2\beta' \sin^2\alpha'\right)\chi + \tfrac{1}{4} e^2(\sin^2\beta' - \cos^2\beta' \cos^2\alpha')\sin\chi\cos\chi$$
$$- \tfrac{1}{2} e^2 \sin\beta' \cos\beta' \cos\alpha' \sin^2\chi$$

wo den Bezeichnungen des ersten Abschnittes gemäss β' und α' dem Anfangspunkt von σ angehören. Aendert man nun diese Bezeichnungen in die hier eingeführten ab, und bedenkt dass Σ' ein Meridianbogen ist, so findet man leicht dass

um $\Delta\Sigma$ zu erhalten

$$\beta' \text{ in } w, \quad \alpha' \text{ in } 180^0 - m, \quad \chi \text{ in } \varphi$$

um $\Delta\Sigma'$ zu erhalten

$$\beta' \text{ in } \beta, \quad \alpha' \text{ in } 0, \quad \chi \text{ in } \varphi'$$

um $\Delta\sigma''$ zu erhalten

$$\beta' \text{ in } \beta, \quad \alpha' \text{ in } \alpha'', \quad \chi \text{ in } \chi''$$

verwandelt werden müssen. Man bekommt daher die folgenden Ausdrücke,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\Sigma}{\sin\varphi} = &-\frac{1}{4}e^2(1+\cos^2 w\sin^2 m)\frac{\varphi}{\sin\varphi}\\ &+\frac{1}{4}e^2(1-\cos^2 w(2-\sin^2 m))\cos\varphi\\ &+\frac{1}{2}e^2\sin w\cos w\cos m\sin\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\Sigma'}{\sin\varphi'} = &-\frac{1}{4}e^2\frac{\varphi'}{\sin\varphi'}+\frac{1}{4}e^2(1-2\cos^2\beta)\cos\varphi'\\ &-\frac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta\sin\varphi' \quad . \; . \; . \quad (102)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\sigma''}{\sin\chi''} = &-\frac{1}{4}e^2(1+\cos^2\beta\sin^2\alpha'')\frac{\chi''}{\sin\chi''}\\ &+\frac{1}{4}e^2(1-\cos^2\beta(2-\sin^2\alpha''))\cos\chi''\\ &-\frac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta\cos\alpha''\sin\chi'' \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (103)\end{aligned}$$

Da nun hier

$$w = \beta - \varphi'$$

wird, so erhält man

$$\cos^2 w = \cos^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta\sin\varphi'\cos\varphi' + \sin^2\varphi' - 2\cos^2\beta\sin^2\varphi'$$

$$\sin w\cos w = \sin\beta\cos\beta + \sin\varphi'\cos\varphi' - 2\cos^2\beta\sin\varphi'\cos\varphi' - 2\sin\beta\cos\beta\sin^2\varphi'$$

Eliminirt man hiemit w aus dem vorstehenden Ausdruck für $\Delta\Sigma$, und nimmt auf die Gleichungen

$$\cos\alpha''\sin\chi'' = \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos m$$

$$\cos\chi'' = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos m$$

Rücksicht, so bekommt man sehr leicht den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\Sigma}{\sin\varphi} = &-\frac{1}{4}e^2(1+\sin^2 m\sin^2\varphi')\frac{\varphi}{\sin\varphi} - \frac{1}{4}e^2\cos^2\beta(1-2\sin^2\varphi')\sin^2 m\frac{\varphi}{\sin\varphi} \quad (104)\\ &-\frac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta\sin^2 m\sin\varphi'\cos\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}\\ &+\frac{1}{4}e^2\{\cos\varphi+\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi' - 2\cos\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''\}\\ &-\frac{1}{4}e^2\cos^2\beta\{2\cos\varphi - \sin^2 m\cos\varphi + 2\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi' - 4\cos\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''\}\\ &+\frac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta\{\cos m\sin\varphi - 2\sin\varphi'\cos\chi'' + \sin^2 m\cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi'\}\end{aligned}$$

der hiemit zur Substitution in (101) vorbereitet ist.

89.

Die Gleichung (20) wird nach der Elimination von β_0, und wenn man nur das mit e^2 multiplicirte Glied beibehält,

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} e^2 \cos\beta' \sin\alpha' \,.\, \chi$$

wo die Bezeichnungen wieder die des ersten Abschnittes sind. Durch Einführung der hier festgesetzten Bezeichnungen ergiebt sich aus diesem Ausdruck

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} e^2 \cos w \sin m \,.\, \varphi$$

$$\Delta\omega'' = \frac{1}{2} e^2 \cos\beta \sin\alpha'' \,.\, \chi''$$

also nachdem w durch die Gleichung

$$\cos w = \cos\beta \cos\varphi' + \sin\beta \sin\varphi'$$

eliminirt worden ist,

$$\Delta\omega - \Delta\omega'' = -\frac{1}{2} e^2 \cos\beta \sin\alpha'' \sin\chi'' \left\{ \frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi} \cos\varphi' \right\}$$
$$+ \frac{1}{2} e^2 \sin\beta \sin\alpha'' \sin\varphi' \sin\chi'' \frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

wenn man auf die jetzt statt findenden Relationen

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha''} = \frac{\sin\varphi'}{\sin n'} = \frac{\sin\chi''}{\sin m}$$

Rücksicht nimmt. Da ferner

$$\cos\beta' \sin\omega = \sin m \sin\varphi$$

ist, so bekommt man

$$\frac{\cos\beta' \cos w \sin\omega}{\sin\varphi \sin\chi'' \sin n'} = \frac{\cos w}{\sin\varphi'}$$

und wenn wieder w eliminirt wird,

$$\frac{\cos\beta' \cos w \sin\omega}{\sin\varphi \sin\chi'' \sin n'} = \sin\beta + \cos\beta \frac{\cos\varphi'}{\sin\varphi'}$$

Die Multiplication giebt hierauf

$$(105)\quad \frac{\cos\beta' \cos w \sin\omega}{\sin\varphi \sin\chi'' \sin n'} (\Delta\omega - \Delta\omega'') = \frac{1}{2} e^2 \sin\alpha'' \sin\varphi' \sin\chi'' \frac{\varphi}{\sin\varphi}$$
$$-\frac{1}{2} e^2 \cos^2\beta \left\{ \frac{\sin\alpha'' \sin m}{\sin n'} \cos\varphi' \left\{ \frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi} \cos\varphi' \right\} - \sin\alpha'' \sin\varphi' \sin\chi'' \frac{\varphi}{\sin\varphi} \right\}$$
$$-\frac{1}{2} e^2 \sin\beta \cos\beta \left\{ \sin\alpha'' \sin\chi'' \left\{ \frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi} \cos\varphi' \right\} - \sin\alpha'' \cos\varphi' \sin\chi'' \frac{\varphi}{\sin\varphi} \right\}$$

womit die Ausdrücke aller aus (101) fortzuschaffenden Functionen erlangt sind.

90.

Die Substitution der Ausdrücke (102), (103), (104), (105) in (101) giebt nun $\Delta\alpha''$ in folgender Form,

$$\Delta\alpha'' = \frac{\frac{1}{4}e^4}{\sin n' \sin m}\{(1)+(4)\} + \frac{\frac{1}{4}e^4 \cos^2\beta}{\sin n' \sin m}\{(2)+(5)\} \quad . \quad . \quad (106)$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}e^4 \sin\beta\cos\beta}{\sin n' \sin m}\{(3)+(6)\}$$

und wenn man die Ausdrücke der Coefficienten so theilt, dass (1), (2), (3) die Bögen φ, φ', χ'' enthalten, die (4), (5), (6) hingegen davon unabhängig werden, so findet man

$$(1) = -\sin\alpha''(1-\sin^2 m \sin^2\varphi')\frac{\varphi}{\sin\varphi} + \sin n' \cos m \frac{\varphi'}{\sin\varphi'} + \cos n' \sin m \frac{\chi''}{\sin\chi''}$$

$$(2) = -2\sin\alpha'' \sin^2 m \cos\varphi' \left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}$$
$$-\sin\alpha'' \sin^2 m \frac{\varphi}{\sin\varphi} + \sin^2\alpha'' \cos n' \sin m \frac{\chi''}{\sin\chi''}$$

$$(3) = -\sin\alpha'' \sin n' \sin m \sin\chi'' \left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}$$

$$(4) = \sin\alpha'' \cos\varphi - \sin n' \cos m \cos\varphi' - \cos n' \sin m \cos\chi''$$
$$+ \sin\alpha'' \sin^2 m \cos\varphi \sin^2\varphi' - 2\sin\alpha'' \cos\alpha'' \sin\varphi' \sin\chi''$$

$$(5) = -2\sin\alpha'' \cos\varphi + 2\sin n' \cos m \cos\varphi' + 2\cos n' \sin m \cos\chi''$$
$$+ \sin\alpha'' \sin^2 m \cos\varphi - 2\sin\alpha'' \sin^2 m \cos\varphi \sin^2\varphi'$$
$$-\sin^2\alpha'' \cos n' \sin m \cos\chi'' + 4\sin\alpha'' \cos\alpha'' \sin\varphi' \sin\chi''$$

$$(6) = \sin\alpha'' \cos m \sin\varphi + \sin n' \cos m \sin\varphi' + \cos\alpha'' \cos n' \sin m \sin\chi''$$
$$+ \sin\alpha'' \sin^2 m \cos\varphi \sin\varphi' \cos\varphi' - 2\sin\alpha'' \sin\varphi' \cos\chi''$$

die noch auf ihre einfachste Form hinzuführen sind.

91.

Zur Reduction des Coefficienten (1) bemerke ich, dass die sphärische Trigonometrie die Gleichung

$$\sin\alpha'' \cos\varphi' = \cos n' \sin m + \sin n' \cos m \cos\varphi$$

giebt, und dass identisch

$$1 - \sin^2 m \sin^2\varphi' = \cos^2\varphi' + \cos^2 m \sin^2\varphi'$$

ist. Hiemit erhält man leicht

$$\sin\alpha''(1-\sin^2 m\sin^2\varphi')\cos\varphi' = \cos n'\sin m\cos^2\varphi' + \cos n'\sin m\cos^2 m\sin^2\varphi'$$
$$+\sin n'\cos m\cos\varphi(1-\sin^2 m\sin^2\varphi')$$

Aber die Trigonometrie giebt auch

$$\cos\varphi = \cos\varphi'\cos\chi'' + \sin\varphi'\sin\chi''\cos\alpha''$$
$$\cos\alpha'' = -\cos n'\cos m + \sin n'\sin m\cos\varphi$$

woraus

$$\cos\varphi(1-\sin^2 m\sin^2\varphi') = \cos\varphi'\cos\chi'' - \cos n'\cos m\sin\varphi'\sin\chi''$$

folgt. Setzt man diesen Ausdruck in das letzte Glied der vorstehenden Gleichung, so wird alsbald

$$(107)\quad \sin\alpha''(1-\sin^2 m\sin^2\varphi') = \cos n'\sin m\cos\varphi' + \sin n'\cos m\cos\chi''$$

womit

$$(1) = \left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\cos n'\sin m + \left\{\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\chi''\right\}\sin n'\cos m$$

erhalten wird.

Den Ausdruck des Coefficienten (2) bringt man zuerst leicht auf die folgende Form

$$(2) = -\sin\alpha''\sin^2 m\cos\varphi'\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\} - \sin\alpha''\sin n'\sin m\sin\varphi'\sin\chi''\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$
$$+\sin\alpha''\sin m\{\sin\alpha''\cos n' - \sin m\cos\varphi'\}\frac{\chi''}{\sin\chi''}$$

und wendet man hierauf die trigonometrische Gleichung

$$\sin m\cos\varphi' = \sin\alpha''\cos n' + \cos\alpha''\sin n'\cos\chi''$$

an, so ergiebt sich

$$(2) = -\sin\alpha''\sin^2 m\cos\varphi'\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}$$
$$-\sin\alpha''\cos\alpha''\sin n'\sin m\frac{\chi''}{\operatorname{tg}\chi''} - \sin\alpha''\sin n'\sin m\sin\varphi'\sin\chi''\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

Der Coefficient (3) hat oben schon seine einfachste Form. Für den Coefficienten (4) nehme ich die Gleichung (107) vor, die ich wie folgt stelle,

$$\sin\alpha'' = \cos n'\sin m\cos\varphi' + \sin n'\cos m\cos\chi'' + \sin\alpha''\sin^2 m\sin^2\varphi'$$

und eliminire damit das Glied $\sin\alpha''\cos\varphi$ des Ausdrucks für (4), wodurch

$$(4) = -\sin n'\cos m(\cos\varphi' - \cos\varphi\cos\chi'') - \cos n'\sin m(\cos\chi'' - \cos\varphi\cos\varphi')$$
$$+2\sin\alpha''\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi' - 2\sin\alpha''\cos\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''$$

entsteht. Aber die Trigonometrie giebt auch

$$\cos\varphi' = \cos\varphi\cos\chi'' + \sin\varphi\sin\chi''\cos n'$$
$$\cos\chi'' = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos m$$

Durch Hülfe dieser, so wie der Relationen zwischen den Sinussen der Seiten und denen der Winkel geht der vorstehende Ausdruck in den folgenden über,

$$(4) = -2\sin\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''\{\cos\alpha''+\cos n'\cos m-\sin n'\sin m\cos\varphi\}$$
$$= 0$$

da auch

$$\cos\alpha'' = -\cos n'\cos m + \sin n'\sin m\cos\varphi$$

ist. Diese letzte Reduction hat uns auf die folgende Gleichung geführt,

$$\sin\alpha''\cos\varphi - \sin n'\cos m\cos\varphi' - \cos n'\sin m\cos\chi''$$
$$= -\sin\alpha''\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi' + 2\sin\alpha''\cos\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''$$

und benutzt man diese um die drei ersten Glieder des Ausdrucks von (5) fortzuschaffen, so wird sogleich

$$(5) = \sin\alpha''\sin m\{\sin m\cos\varphi - \sin\alpha''\cos n'\cos\chi''\}$$
$$= \sin\alpha''\cos\alpha''\sin n'\sin m$$

indem die Trigonometrie auch

$$\sin m\cos\varphi = \cos\alpha''\sin n' + \sin\alpha''\cos n'\cos\chi''$$

giebt. Vermittelst der Anwendung der Gleichungen

$$\cos m\sin\varphi = \sin\varphi'\cos\chi'' - \cos\varphi'\sin\chi''\cos\alpha''$$
$$\cos m\sin\varphi' = \sin\varphi\cos\chi'' - \cos\varphi\sin\chi''\cos n'$$
$$\cos\alpha''\sin\chi'' = \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos m$$

auf die drei ersten Glieder des Ausdrucks von (6), erhält man ohne Mühe

$$(6) = -\sin\alpha''\cos\varphi'\sin\chi''\{\cos\alpha''+\cos n'\cos m-\sin n'\sin m\cos\varphi\}$$
$$= 0$$

womit die Reductionen ausgeführt sind.

92.

Substituirt man jetzt die im vor. Art. erhaltenen Ausdrücke der Coefficienten (1) bis (6) in (106), so ergiebt sich, wenn man zur leichteren Uebersicht die Bezeichnungen

$$A = \left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\operatorname{cotg} n' + \left\{\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\chi''\right\}\operatorname{cotg} m$$

$$B = -\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\frac{\sin\alpha''\sin m}{\sin n'}\cos\varphi'$$
$$+ \left\{1 - \frac{\chi''}{\operatorname{tg}\chi''}\right\}\sin\alpha''\cos\alpha'' - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin\alpha''\sin\varphi'\sin\chi''$$

$$C = -\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\sin\alpha''\sin\chi''$$

einführt,

$$\Delta\alpha'' = \frac{1}{4}e^2A + \frac{1}{4}e^2\cos^2\beta . B + \frac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta . C$$

Es ist hiebei zu bemerken, dass wenn man die Seiten des sphäroidischen Dreiecks als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet, die beiden ersten Glieder dieses Ausdrucks für $\Delta\alpha''$ von der vierten, das dritte Glied aber von der fünften Ordnung sind.

93.

Es wird von Nutzen sein auch die Ausdrücke der beiden andern Winkel unsers Dreiecks in Function derselben reducirten Breite β zu entwickeln. Zu dem Ende giebt der Ausdruck des Art. 86 für $\Delta n''$, wenn man ihn auf das besondere, jetzt in Betracht stehende sphäroidische Dreieck anwendet,

$$\Delta m = \frac{1}{\sin\alpha''\sin n'}\left\{\sin m\frac{\Delta\sigma''}{\sin\chi''} - \sin\alpha''\cos n'\frac{\Delta\Sigma}{\sin\varphi} - \cos\alpha''\sin n'\frac{\Delta\Sigma'}{\sin\varphi'}\right\}$$
$$- \frac{\cos\beta\cos\beta'\sin\omega''}{\sin\varphi'\sin\chi''\sin\alpha''}(\Delta\omega - \Delta\omega'')$$

Da $\cos\beta'\sin\omega'' = \sin\alpha''\sin\chi''$ ist, so wird sogleich

$$\frac{\cos\beta\cos\beta'\sin\omega''}{\sin\varphi'\sin\chi''\sin\alpha''} = \frac{\cos\beta}{\sin\varphi'} = \frac{\cos\beta\sin m}{\sin\chi''\sin n'}$$

Die Multiplication mit dem Ausdruck für $\Delta\omega - \Delta\omega''$ des Art. 89 giebt daher

$$\frac{\cos\beta\cos\beta'\sin\omega''}{\sin\varphi'\sin\chi''\sin\alpha''}(\Delta\omega - \Delta\omega'') = -\frac{1}{2}e^2\cos^2\beta\frac{\sin\alpha''\sin m}{\sin n'}\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta\sin\alpha''\sin\chi''\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

Setzt man nun mit der nemlichen Bedingung wie oben

$$(108)\qquad \Delta m = \frac{\frac{1}{4}e^2}{\sin\alpha''\sin n'}\{(1)+(4)\} + \frac{\frac{1}{4}e^2\cos^2\beta}{\sin\alpha''\sin n'}\{(2)+(5)\} + \frac{\frac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha''\sin n'}\{(3)+(6)\}$$

und substituirt ausser dem eben entwickelten Ausdruck die (102), (103), (104), so ergeben sich die folgenden Ausdrücke der Coefficienten,

$$(1) = \sin\alpha''\cos n'\frac{\varphi}{\sin\varphi} + \cos\alpha''\sin n'\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} - \sin m\frac{\chi''}{\sin\chi''}$$
$$+ \sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\sin^2\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

$$(2) = \sin\alpha''\cos n'(1-2\sin^2\varphi')\sin^2 m\frac{\varphi}{\sin\varphi} - \sin^2\alpha''\sin m\frac{\chi''}{\sin\chi''}$$
$$+ 2\sin^2\alpha''\sin m\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}$$

$$(3) = \sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\sin\varphi'\cos\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi} - \sin^2\alpha''\sin n'\sin\chi''\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

$$(4) = -\sin\alpha''\cos n'\cos\varphi - \cos\alpha''\sin n'\cos\varphi' + \sin m\cos\chi''$$
$$- \sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi' + 2\sin\alpha''\cos\alpha''\cos n'\sin\varphi'\sin\chi''$$

$$(5) = 2\sin\alpha''\cos n'\cos\varphi + 2\cos\alpha''\sin n'\cos\varphi' - 2\sin m\cos\chi''$$
$$- \sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\cos\varphi + 2\sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi'$$
$$- 4\sin\alpha''\cos\alpha''\cos n'\sin\varphi'\sin\chi'' + \sin^2\alpha''\sin m\cos\chi''$$

$$(6) = -\sin\alpha''\cos n'\cos m\sin\varphi + \cos\alpha''\sin n'\sin\varphi' - \cos\alpha''\sin m\sin\chi''$$
$$+ 2\sin\alpha''\cos n'\sin\varphi'\cos\chi'' - \sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi'$$

die auf ihre einfachste Form hinzuführen sind.

94.

Eliminirt man vermittelst der Gleichung

$$\sin m\cos\varphi' = \sin\alpha''\cos n' + \cos\alpha''\sin n'\cos\chi''$$

den Factor $\sin\alpha''\cos n'$ des ersten Gliedes im Ausdruck für (1), so ergiebt sich sogleich

$$(1) = -\sin m\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\} + \cos\alpha''\sin n'\left\{\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\chi''\right\}$$
$$+ \sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\sin^2\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}.$$

Addirt und subtrahirt man die Function $\sin^2\alpha''\sin m\cos\varphi'$ auf der rechten Seite des Ausdrucks für (2), und berücksichtigt die Gleichung

$$\sin\alpha''\cos\varphi' = \cos n'\sin m + \sin n'\cos m\cos\varphi$$

so wird

$$(2) = \sin^2\alpha''\sin m\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}$$
$$- \sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m\cos\varphi\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$
$$- 2\sin\alpha''\sin n'\cos n'\sin m\sin\varphi'\sin\chi''\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

Durch dieselbe, eben angewandte, Hülfsgleichung bringt man den Ausdruck für (3) ohne Mühe auf die folgende Form

$$(3) = -\sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m\cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$
$$-\sin^2\alpha''\sin n'\sin^2\varphi'\sin\chi''\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

Die Gleichung (107) giebt durch die Versetzung der Buchstaben

$$\sin m = \cos\alpha''\sin n'\cos\varphi + \sin\alpha''\cos n'\cos\varphi' + \sin^2 n'\sin m\sin^2\varphi$$

Eliminirt man hiemit $\sin m$ im dritten Gliede des Ausdrucks des Coefficienten (4), und verfährt übrigens eben so wie oben bei der Reduction des gleichbenannten Coefficienten, so wird

$$(4) = \sin\alpha''\sin m\sin^2\varphi'\{\sin\alpha''\cos\chi'' - \cos n'\sin m\cos\varphi\}$$
$$= \sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m\sin^2\varphi'$$

da die Trigonometrie

$$\sin\alpha''\cos\chi'' = \sin n'\cos m + \cos n'\sin m\cos\varphi$$

giebt. Hiemit haben wir die Gleichung

$$\sin\alpha''\cos n'\cos\varphi + \cos\alpha''\sin n'\cos\varphi' - \sin m\cos\chi''$$
$$= -\sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\cos\varphi\sin^2\varphi' + 2\sin\alpha''\cos\alpha''\cos n'\sin\varphi'\sin\chi''$$
$$-\sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m\sin^2\varphi'$$

erhalten, und eliminirt man damit die drei ersten Glieder des Ausdrucks von (5), dann ergiebt sich sogleich

$$(5) = \sin\alpha''\sin m\{\sin\alpha''\cos\chi'' - \cos n'\sin m\cos\varphi\}$$
$$-2\sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m\sin^2\varphi'$$
$$= \sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m - 2\sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m\sin^2\varphi'$$

Die Anwendung der Gleichungen

$$\cos n'\sin\varphi = \cos\varphi'\sin\chi'' - \sin\varphi'\cos\chi''\cos\alpha''$$
$$\cos\alpha''\sin\varphi' = \cos\varphi\sin\chi'' - \sin\varphi\cos\chi''\cos n'$$
$$\cos\alpha''\sin\chi'' = \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos m$$

auf die drei ersten Glieder des Ausdrucks für (6) giebt zuerst

$$(6) = \sin\alpha''\sin\varphi'\cos\chi''(\cos n' + \cos\alpha''\cos m)$$
$$-\sin\alpha''\cos n'\sin^2 m\cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi'$$

und da

$$\cos n' = -\cos\alpha''\cos m + \sin\alpha''\sin m\cos\varphi'$$

ist, so folgt hieraus

$$(6) = \sin\alpha''\sin m\sin\varphi'\cos\varphi'\{\sin\alpha''\cos\chi'' - \cos n'\sin m\cos\varphi\}$$
$$= \sin\alpha''\sin n'\sin m\cos m\sin\varphi'\cos\varphi'$$

womit die Reductionen ausgeführt sind.

95.

Substituirt man nun die eben erhaltenen Ausdrücke der Coefficienten (1) bis (6) in (108), und setzt zur leichtern Uebersicht

$$A'' = -\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\frac{\sin m}{\sin\alpha''\sin n'} + \left\{\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\chi''\right\}\operatorname{cotg}\alpha''$$
$$+ \frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin n'\cos n'\sin^2\chi'' + \sin m\cos m\sin^2\varphi'$$

$$B'' = \left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\frac{\sin\alpha''\sin m}{\sin n'} + \left\{1 - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi\right\}\sin m\cos m$$
$$- 2\frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin n'\cos n'\sin^2\chi'' - 2\sin m\cos m\sin^2\varphi'$$

$$C'' = \left\{1 - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi\right\}\sin m\cos m\sin\varphi'\cos\varphi' - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin\alpha''\sin^2\varphi'\sin\chi''$$

so wird schliesslich

$$\varDelta m = \tfrac{1}{4}e^2A'' + \tfrac{1}{4}e^4\cos^2\beta.B'' + \tfrac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta.C''$$

Auch hier zeigt sich auf den ersten Blick, dass die beiden ersten Glieder dieses Ausdrucks von der vierten Ordnung sind, während das dritte von der fünften ist, wenn die Dreiecksseiten als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden.

96.

Nehmen wir jetzt die Gleichung für $\varDelta n'$ des Art. 86 vor, und wenden sie auf das in Betracht stehende besondere sphäroidische Dreieck an, so geht sie wegen $\omega' = 0$ in die folgende über,

$$\varDelta n' = \frac{1}{\sin\alpha''\sin m}\left\{\sin n'\frac{\varDelta\Sigma'}{\sin\varphi'} - \cos\alpha''\sin m\frac{\varDelta\sigma''}{\sin\chi''} - \sin\alpha''\cos m\frac{\varDelta\Sigma}{\sin\varphi}\right\}$$

Setzt man wieder hiefür

$$\varDelta n' = \frac{\frac{1}{4}e^2}{\sin\alpha''\sin m}\{(1)+(4)\} + \frac{\frac{1}{4}e^4\cos^2\beta}{\sin\alpha''\sin m}\{(2)+(5)\} + \frac{\frac{1}{2}\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha''\sin m}\{(3)+(6)\} \quad (109)$$

und substituirt wieder die Ausdrücke (102), (103), (104), so bekommt man zuerst

$$(1) = \sin\alpha''\cos m\frac{\varphi}{\sin\varphi} - \sin n'\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} + \cos\alpha''\sin m\frac{\chi''}{\sin\chi''}$$
$$+ \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\sin^2\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$
$$(2) = \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\frac{\varphi}{\sin\varphi} + \sin^2\alpha''\cos\alpha''\sin m\frac{\chi''}{\sin\chi''}$$
$$- 2\sin\alpha''\sin^2 m\cos m\sin^2\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$
$$(3) = \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\sin\varphi'\cos\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$
$$(4) = -\sin\alpha''\cos m\cos\varphi + \sin n'\cos\varphi' - \cos\alpha''\sin m\cos\chi''$$
$$- \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\cos\varphi\sin^2\varphi' + 2\sin\alpha''\cos\alpha''\cos m\sin\varphi'\sin\chi''$$
$$(5) = 2\sin\alpha''\cos m\cos\varphi - 2\sin n'\cos\varphi' + 2\cos\alpha''\sin m\cos\chi''$$
$$- \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\cos\varphi - \sin^2\alpha''\cos\alpha''\sin m\cos\chi''$$
$$+ 2\sin\alpha''\sin^2 m\cos m\cos\varphi\sin^2\varphi' - 4\sin\alpha''\cos\alpha''\cos m\sin\varphi'\sin\chi''$$
$$(6) = -\sin\alpha''\cos^2 m\sin\varphi - \sin n'\sin\varphi' + \cos^2\alpha''\sin m\sin\chi''$$
$$- \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi' + 2\sin\alpha''\cos m\sin\varphi'\cos\chi''$$

deren Reduction fast ebenso ausgeführt werden kann, wie die der vorhergehenden Coefficienten.

97.

Eliminirt man durch

$$\sin n'\cos\chi'' = \sin\alpha''\cos m + \cos\alpha''\sin m\cos\varphi'$$

den Factor $\sin\alpha''\cos m$ des ersten Gliedes des Ausdrucks von (1), so wird sogleich

$$(1) = \cos\alpha''\sin m\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\} - \sin n'\left\{\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} - \frac{\varphi}{\sin\varphi'}\cos\chi''\right\}$$
$$+ \sin\alpha''\sin^2 m\cos m\sin^2\varphi'\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

Die Coefficienten (2) und (3) sind keiner weiteren Reduction fähig. Für die Reduction des Ausdrucks für (4) giebt die Gleichung (107) durch die Versetzung der Buchstaben

$$(110)\quad \sin n' = \sin\alpha''\cos m\cos\chi'' + \cos\alpha''\sin m\cos\varphi + \sin^2\alpha''\sin n'\sin^2\chi''$$

und eliminirt man damit $\sin n'$ aus dem zweiten Gliede des obigen Ausdrucks für (4), so bekommt man auf ähnliche Art wie oben

$$(4) = \sin\alpha''\sin n'\sin^2\chi''\{\sin\alpha''\cos\varphi' - \sin n'\cos m\cos\varphi\}$$
$$= \sin\alpha''\sin n'\cos n'\sin m\sin^2\chi''$$

indem die Trigonometrie

$$\sin\alpha''\cos\varphi' = \cos n'\sin m + \sin n'\cos m\cos\varphi$$

giebt. Vermittelst der Gleichung

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha''\cos m\cos\varphi - \sin n'\cos\varphi' + \cos\alpha''\sin m\cos\chi'' \\
= &-\sin\alpha''\sin^2 m\cos m\cos\varphi\sin^2\varphi' + 2\sin\alpha''\cos\alpha''\cos m\sin\varphi'\sin\chi'' \\
&-\sin\alpha''\sin n'\cos n'\sin m\sin^2\chi''
\end{aligned}$$

die sich durch die eben ausgeführte Reduction ergiebt, eliminire man die drei ersten Glieder des Ausdrucks von (5), wodurch auf einfache Weise

$$\begin{aligned}
(5) = &-\sin\alpha''\sin^2 m\cos m\cos\varphi - \sin^2\alpha''\cos\alpha''\sin m\cos\chi'' \\
&-2\sin\alpha''\sin n'\cos n'\sin m\sin^2\chi''
\end{aligned}$$

erhalten wird. Zur Reduction des Ausdrucks für (6) wende ich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\cos m\sin\varphi &= \sin\varphi'\cos\chi'' - \cos\varphi'\sin\chi''\cos\alpha'' \\
\cos\alpha''\sin\chi'' &= \cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi'\cos m
\end{aligned}$$

nebst der oben erhaltenen (110) an, und bekomme damit

$$\begin{aligned}
(6) = &-\sin\alpha''\sin^2 m\cos m\cos\varphi\sin\varphi'\cos\varphi' \\
&-\sin^2\alpha''\sin m\sin^2\varphi'\sin\chi''
\end{aligned}$$

womit auch diese Reductionen ausgeführt sind.

98.

Setzt man nun aus demselben Grunde wie oben

$$\begin{aligned}
A' = &\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi'\right\}\operatorname{cotg}\alpha'' - \left\{\frac{\varphi'}{\sin\varphi'} - \frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\chi''\right\}\frac{\sin n'}{\sin\alpha''\sin m} \\
&+\frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin m\cos m\sin^2\varphi' + \sin n'\cos n'\sin^2\chi'' \\
B' = &\left\{\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \cos\chi''\right\}\sin\alpha''\cos\alpha'' + \left\{\frac{\varphi}{\sin\varphi} - \cos\varphi\right\}\sin m\cos m \\
&-2\frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin m\cos m\sin^2\varphi' - 2\sin n'\cos n'\sin^2\chi'' \\
C' = &\left\{\frac{\varphi}{\sin\varphi} - \cos\varphi\right\}\sin m\cos m\sin\varphi'\cos\varphi' - \sin\alpha''\sin^2\varphi'\sin\chi''
\end{aligned}$$

dann ergiebt sich schliesslich

$$\Delta n' = \tfrac{1}{4}e^2 A' + \tfrac{1}{4}e^2\cos^2\beta . B' + \tfrac{1}{2}e^2\sin\beta\cos\beta . C'$$

Auch hier sieht man sogleich, dass die Ordnungen der Glieder dieselben sind wie bei den vorher entwickelten Ausdrücken.

Die obigen Ausdrücke der Dreiecksfläche geben ferner

$$\sin m \cos m \sin^2\varphi' = 2F\frac{\sin n' \cos m}{\sin \alpha''}$$

$$\sin n' \cos n' \sin^2\chi'' = 2F\frac{\cos n' \sin m}{\sin \alpha''}$$

Hieraus wird sogleich die Summe der beiden letzten Glieder des Ausdrucks für $K = -4F$, und folglich ergiebt sich

$$K = \frac{4}{3}F$$

bis auf Grössen vierter Ordnung genau.

101.

Das erste Glied des Ausdrucks für L wird dem Vorhergehenden zufolge sofort

$$= -\frac{8}{3}F\left\{1 + \frac{\cos\alpha'' \sin m}{\sin n'}\right\}$$

und ausserdem findet man leicht

$$\left\{3\left(1 - \frac{\chi''}{\operatorname{tg}\chi''}\right) - \left(\frac{\chi''}{\sin\chi''} - \cos\chi''\right)\right\} \sin\alpha'' \cos\alpha'' = \frac{4}{3}\chi''^2 \sin\alpha'' \cos\alpha''$$

$$= \frac{2}{3}F\frac{\cos\alpha'' \sin m}{\sin n'}$$

Die Summe der zwei ersten Glieder von L wird also

$$= -\frac{8}{3}F - 2F\frac{\cos\alpha'' \sin m}{\sin n'}$$

Da mit der hier erforderlichen Genauigkeit auch $2F = \sin\alpha'' \sin\varphi' \sin\chi''$ ist, so wird

$$-3\frac{\varphi}{\sin\varphi}\sin\alpha'' \sin\varphi' \sin\chi'' = -6F$$

ferner wird

$$-\left(1 + \frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)(1 - \cos\varphi)\sin m \cos m = -\varphi^2 \sin m \cos m$$

$$= -2F\frac{\sin\alpha'' \cos m}{\sin n'}$$

und das letzte Glied von L wird zufolge des vor. Art. $= 8F$. Die Addition dieser Glieder giebt nun

$$L = -\frac{8}{3}F$$

ebenfalls bis auf Grössen vierter Ordnung genau.

102.

Für M bekommt man in Folge des Vorhergehenden sogleich

$$M = -2F\left\{\frac{\sin n' \sin \chi''}{\sin m} + \cos\alpha'' \sin\chi''\right\}$$
$$- 2F\frac{\sin\alpha''\cos m}{\sin n'}\sin\varphi' + 4F\sin\varphi'$$
$$= -2F\left\{1 + \frac{\cos\alpha''\sin m}{\sin n'}\right\}\sin\varphi' - 2F\frac{\sin\alpha''\cos m}{\sin n'}\sin\varphi' + 4F\sin\varphi'$$
$$= 0$$

Glieder der dritten Ordnung in den Coefficienten sind also nicht vorhanden, und folglich sind auch in der entwickelten Function die Glieder fünfter Ordnung gleich Null, wie im Art. 99 angeführt wurde.

103.

Stellen wir nun die erhaltenen Entwickelungen zusammen, so haben wir erhalten

$$3\Delta\alpha'' - \Delta n' - \Delta m = -\frac{e^2F}{8}\cos 2\beta$$

und um von hier zum allgemeinen Dreieck über zu gehen, betrachten wir auch das besondere Dreieck DFG der oft angezogenen Figur, in welchem der Winkel $FDG = \alpha'$, und der Winkel $DFG = 180^\circ - n''$ ist. Der eben erhaltene Ausdruck giebt sogleich für dieses Dreieck

$$3\Delta\alpha' + \Delta n'' - \Delta m = -\frac{e^2F'}{8}\cos 2\beta$$

wenn die Fläche desselben mit F' bezeichnet wird. Nennt man aber Δ die Fläche des allgemeinen sphäroidischen Dreiecks DEF, dann ist

$$\Delta = F - F'$$

und ausserdem ist $\Delta n = \Delta\alpha'' - \Delta\alpha'$, der Unterschied der obigen Gleichungen giebt also

$$3\Delta n - \Delta n' - \Delta n'' = -\frac{e^2\Delta}{8}\cos 2\beta$$

bis auf Grössen sechster Ordnung genau. Da diese Gleichung durch die Vertauschung der Buchstaben

$$3\Delta n' - \Delta n'' - \Delta n = -\frac{e^2\Delta}{8}\cos 2\beta'$$
$$3\Delta n'' - \Delta n - \Delta n' = -\frac{e^2\Delta}{8}\cos 2\beta''$$

giebt, so erhält man durch eine leichte Combination dieser drei Gleichungen schliesslich

$$(112)\quad \begin{cases} \Delta n = -\frac{e^2\Delta}{12}\{2\cos 2\beta + \cos 2\beta' + \cos 2\beta''\} \\ \Delta n' = -\frac{e^2\Delta}{12}\{\cos 2\beta + 2\cos 2\beta' + \cos 2\beta''\} \\ \Delta n'' = -\frac{e^2\Delta}{12}\{\cos 2\beta + \cos 2\beta' + 2\cos 2\beta''\} \end{cases}$$

die auch bis auf Grössen sechster Ordnung genau sind. Man bekommt überdies hieraus

$$\Delta n + \Delta n' + \Delta n'' = -\frac{e^2\Delta}{3}\{\cos 2\beta + \cos 2\beta' + \cos 2\beta''\}$$

mit derselben Genauigkeit.

104.

Bei der Beurtheilung der Ausdehnung, in welcher die eben abgeleiteten Ausdrücke Resultate von ausreichender Genauigkeit geben, kommt vor Allem die Grösse der Dreiecksfläche in Betracht, aber diese ist nicht das alleinige Criterion dafür. Man kann sich Dreiecke von sehr kleiner Fläche denken, die sehr grosse Seiten haben, und es liegt an der Hand, dass man von den vorstehenden Ausdrücken kein genaues Resultat erwarten darf, wenn die Seiten des Dreiecks so gross sind, dass sie nicht als kleine Grössen erster Ordnung angesehen werden können. Zur Beurtheilung der Grenzen der Anwendbarkeit dieser Ausdrücke könnte die Entwickelung der hier übergangenen Glieder sechster und höherer Ordnungen dienen, allein diese scheinen sich durch das vorhergehende Verfahren nur schwer in ihrer einfachsten Form angeben zu lassen, sie werden hingegen mit weit grösserer Leichtigkeit, und in einer nicht minder eleganten Form wie die vorhergehenden, durch das Verfahren erhalten welches jetzt entwickelt werden soll, und man kann durch dieses mit Leichtigkeit nicht nur die Glieder sechster Ordnung sondern auch die der siebenten erhalten, die mit denen der sechsten Ordnung in ähnlicher Verbindung stehen, wie dem Vorhergehenden zufolge die Glieder der fünften mit denen der vierten Ordnung.

105.

Von dem im Vorhergehenden behandelten Falle, welcher sich speciel auf das Revolutionsellipsoid bezieht, möchte es sowohl aus den im vor. Art., wie aus den im Art. 78 angeführten Gründen angemessen

erscheinen auf den allgemeinen Fall über zu gehen, und die Reduction eines Dreiecks von kleinen Seiten, die kürzeste Linien auf irgend einer beliebigen Oberfläche sind, auf ein sphärisches Dreieck von denselben Seiten abzuleiten, und hiebei eine Ordnung und bez. zwei Ordnungen weiter zu gehen, wie von Gauss geschehen ist.

Wenn man in den Gleichungen (3), (4), (5) des ersten Abschnittes σ statt h, h statt s, φ statt q, und ψ statt α schreibt, so werden sie

$$dh^2 = d\sigma^2 + m^2 d\varphi^2 \quad \ldots\ldots \quad (113)$$

$$\left.\begin{aligned} d\sigma &= dh \cos\psi \\ m d\varphi &= dh \sin\psi \\ \left(\frac{dm}{d\sigma}\right) d\varphi &= -\, d\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (114)$$

Zuerst ist hier zu bemerken, dass wie auch die Oberfläche, auf welcher die Linien h und σ liegen sollen, und die Linie h selbst, beschaffen seien, σ immer eine kürzeste Linie ist. Denn macht man $d\varphi = 0$, wodurch $h = \sigma$ wird, so sind die Gleichungen (114), von welchen die letzte die Bedingungsgleichung des Minimums von h ist, von selbst erfüllt. Diese Eigenschaft der Gleichung (113), welche im Art. 7 in Bezug auf das Revolutionsellipsoid hervorgehoben wurde, findet also für jede Oberfläche statt. Es wird weiter unten von diesem wichtigen Satze ein zweiter Beweis erlangt werden.

106.

Das Integral der Gleichung (113) kann, auch wenn man von den (114) absieht, auf folgende Weise construirt werden. Jedenfalls muss aber irgend eine reelle Relation zwischen σ und φ angenommen werden, denn wenn eine solche nicht vorhanden ist, so kann jede beliebige stetige oder unstetige Linie ohne Fortschreitungsgesetz als das Integral der (113) betrachtet werden.

Von einem beliebigen Punkt auf einer beliebigen Oberfläche, den ich mit A bezeichnen will, anfangend ziehe man eine beliebige kürzeste Linie, die als diejenige σ betrachtet werden soll, für welche $\varphi = 0$ ist. Auf der Seite dieser Linie, auf welcher man φ wachsend annehmen will, ziehe man ausserdem, so nahe an einander wie möglich, auch von A anfangend eine beliebige Anzahl kürzester Linien σ, und nenne den Winkel, den das erste Element einer jeden derselben mit dem ersten

Element der ersten Linie σ macht φ, so dass sich alle diese Linien nur durch den Werth von φ, der einer jeden derselben zukommt, unterscheiden. Es ist nun klar, dass durch die zwischen σ und φ angenommene Relation die Länge einer jeden der Linien σ gegeben ist, trägt man diese Längen auf, und zieht durch die Endpunkte aller σ eine Linie, so ist die Länge dieser $=h$.

Das Produkt $md\varphi$ ist das erste Element der durch den Endpunkt irgend einer der Linien σ auf der Oberfläche gelegten senkrechten Linie, welches mit einem, mit dem Halbmesser m beschriebenen, unendlich kleinen Kreisbogen zusammen fällt. Durch die Gleichungen (2), und durch die Verbindung, in welcher die darin vorkommenden Coefficienten E, F, G mit den rechtwinklichen Coordinaten der Oberfläche stehen, kann man m in Function von σ und φ ausdrücken, auch giebt es dazu noch ein anderes Mittel, wie man weiter unten sehen wird.

Wenn die zwischen σ und φ angenommene Relation so beschaffen ist, dass immer einem reellen Werth von φ nur Ein reeller Werth von σ entspricht, so besteht das Integral nur aus Einer Linie h, wenn aber Einem reellen Werthe von φ mehrere reelle Werthe von σ entsprechen, so wird das Integral aus mehreren Linien h bestehen. Ist die zwischen φ und σ angenommene Relation mit der letzten Gleichung (114) identisch, so ist die durch die Endpunkte der Linien σ gezogene Linie h nicht minder wie jene eine kürzeste Linie auf der Oberfläche.

Es folgt hieraus, dass man durch die Integration der Gleichungen (113) und (114), oder vielmehr blos durch die der (114), die schon die Gleichung (113) in sich schliessen, auf jeder beliebigen Oberfläche ein beliebiges Dreieck bilden kann, dessen Seiten kürzeste Linien sind. Dieses Dreieck soll im Folgenden zur Abkürzung schlechtweg ein sphäroidisches Dreieck genannt werden, und in demselben sind die zwei Seiten die Linien σ, die den Werthen $\varphi=0$ und $\varphi=\varphi$ angehören; die dritte Seite ist die Linie h. Der Winkel zwischen den beiden Seiten, die von den zwei Linien σ gebildet werden ist φ, und da zufolge des Art. 3 ψ der Winkel ist, unter welchem die Linie h in irgend einem Punkt von der betreffenden Linie σ geschnitten wird, so sind die beiden anderen Winkel unsers sphäroidischen Dreiecks die Werthe von ψ für $\varphi=0$ und $\varphi=\varphi$.

107.

Um die Integration der (114) analytisch auszuführen muss vor Allem m in Function von σ und φ dargestellt werden, und dieses kann, da beides σ und h als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden sollen, durch Zuziehung von unendlichen Reihen geschehen, die stets schnell convergiren werden, wenn σ und h nicht allzugross angenommen werden. Um den Ausdruck von m durch σ und φ zu erhalten werde ich ein anderes Verfahren wie das eben angedeutete anwenden, und mich des Krümmungsmaasses der Oberfläche in dem Sinne, in welchem Gauss es in die Wissenschaft eingeführt hat, bedienen. Es wird dadurch eine grössere Einfachheit und Regelmässigkeit in den Entwickelungen erlangt werden, da die Relation zwischen m und dem Krümmungsmaasse der Oberfläche so sehr einfach ist.

»Das Krümmungsmaass irgend eines Punkts einer Oberfläche wird »ausgedrückt durch einen Bruch, dessen Zähler Eins ist, und dessen »Nenner aus dem Produkt der beiden Hauptkrümmungshalbmesser die»ses Punkts besteht.«

Aus der Theorie der Oberflächen weiss man, dass die beiden Hauptkrümmungshalbmesser irgend eines Punkts derselben sich als die Wurzeln Einer quadratischen Gleichung darstellen lassen, deren letztes Glied, wenn man den Coefficienten des ersten Gliedes gleich Eins macht, den folgenden Ausdruck hat,

$$\frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}$$

wenn man die Oberfläche auf die rechtwinklichen Coordinaten x, y, z bezieht, z als Function von x und y betrachtet, und wie gewöhnlich

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$r = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \quad s = \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right), \quad t = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

setzt*). Der Theorie der algebraischen Gleichungen zufolge ist dieser Ausdruck das Produkt der beiden in Rede stehenden Hauptkrümmungshalbmesser, und es hat daher allgemein das Krümmungsmaass, wenn es mit $\varkappa$ bezeichnet wird,

---

*) Man findet diese quadratische Gleichung in vielen Handbüchern, siehe u. a. Cournot, Theorie der Functionen, p. 292 der Uebers. von Schnuse.

$$(115) \quad \ldots \ldots \quad \varkappa = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

zum Ausdruck. Wählt man die Lage der Coordinaten so, dass ihr Anfangspunkt in dem betrachteten Punkt A der Oberfläche liegt, die Ebene der xy mit der Berührungsebene im Punkt A zusammen fällt, und die Achse der x in einer der beiden Hauptkrümmungsebenen, die durch A gehen, liegt, dann ist bekanntlich

$$p = 0\,, \quad q = 0\,, \quad s = 0$$

und der vorstehende Ausdruck giebt

$$\varkappa = rt$$

mit der obigen Definition des Krümmungsmaasses übereinstimmend, da bei dieser Lage der Coordinatenachsen die Hauptkrümmungshalbmesser des Punkts A $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{t}$ zum Ausdruck haben.

108.

Man erhält die Relation zwischen $\varkappa$ und m durch die folgende Analyse, die von der Gaussischen wesentlich verschieden ist. Die Form (113) des Ausdrucks des Quadrats irgend eines Linearelements auf irgend einer Oberfläche, die mit der (3) des Art. 3 identisch ist, kann als unmittelbar aus der Gleichung (1) hervorgegangen betrachtet werden, wenn man die sechs Coefficienten η, θ, μ, η', θ', μ' in demselben Sinne wie dort aufnimmt, aber die Bedingungsgleichungen

$$(116) \quad \begin{cases} \eta^2 + \theta^2 + \mu^2 = 1 \\ \eta\eta' + \theta\theta' + \mu\mu' = 0 \end{cases}$$

einführt, und

$$\eta'^2 + \theta'^2 + \mu'^2 = m^2$$

setzt. Da nun in den hier angewandten Bezeichnungen

$$(117) \quad \ldots \quad \begin{cases} dx = \eta d\sigma + \eta' d\varphi \\ dy = \theta d\sigma + \theta' d\varphi \\ dz = \mu d\sigma + \mu' d\varphi \end{cases}$$

ist, so erhalten wir durch die Elimination aus diesen Gleichungen

$$0 = A dx + B dy + C dz$$

wenn

$$\left.\begin{aligned} A &= \theta'\mu - \theta\mu' \\ B &= \mu'\eta - \mu\eta' \\ C &= \eta'\theta - \eta\theta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (118)$$

gesetzt wird. Hieraus folgt sogleich

$$p = -\frac{A}{C}\,; \qquad q = -\frac{B}{C} \quad \ldots\ldots \quad (119)$$

und

$$C^2(1+p^2+q^2) = A^2+B^2+C^2$$

Erhebt man die (118) ins Quadrat und addirt, so ergiebt sich zuerst

$$\begin{aligned} A^2+B^2+C^2 = \theta'^2\mu^2 &- 2\theta\theta'\mu\mu' + \theta^2\mu'^2 \\ + \mu'^2\eta^2 &- 2\eta\eta'\mu\mu' + \mu^2\eta'^2 \\ + \eta'^2\theta^2 &- 2\eta\eta'\theta\theta' + \eta^2\theta'^2 \end{aligned}$$

Die zweite (116) giebt aber

$$\begin{aligned} \eta\eta'\mu\mu' + \theta\theta'\mu\mu' + \mu^2\mu'^2 &= 0 \\ \eta\eta'\theta\theta' + \theta^2\theta'^2 + \theta\theta'\mu\mu' &= 0 \\ \eta^2\eta'^2 + \eta\eta'\theta\theta' + \eta\eta'\mu\mu' &= 0 \end{aligned}$$

also

$$2\theta\theta'\mu\mu' + 2\eta\eta'\mu\mu' + 2\eta\eta'\theta\theta' + \eta^2\eta'^2 + \theta^2\theta'^2 + \mu^2\mu'^2 = 0$$

und addirt man diese zur vorstehenden, so wird sogleich

$$\begin{aligned} A^2+B^2+C^2 &= \eta^2(\eta'^2+\theta'^2+\mu'^2) \\ &+ \theta^2(\eta'^2+\theta'^2+\mu'^2) \\ &+ \mu^2(\eta'^2+\theta'^2+\mu'^2) \end{aligned}$$

also in Folge der ersten und dritten (116)

$$C^2(1+p^2+q^2) = m^2$$

109.

Um die Ausdrücke für r, s, t, zu erhalten, nehme ich zuerst die vollständigen Differentiale der Gleichungen (119). Diese sind, wenn man für einen Augenblick

$$\begin{aligned} P &= A\left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - C\left(\frac{dA}{d\sigma}\right)\,; \qquad P' = A\left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - C\left(\frac{dA}{d\varphi}\right) \\ Q &= B\left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - C\left(\frac{dB}{d\sigma}\right)\,; \qquad Q' = B\left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - C\left(\frac{dB}{d\varphi}\right) \end{aligned}$$

setzt,

$$C^2dp = Pd\sigma + P'd\varphi\,; \qquad C^2dq = Qd\sigma + Q'd\varphi$$

Die Gleichungen (117) geben aber durch die Elimination

$$Cd\sigma = -\theta' dx + \eta' dy$$
$$Cd\varphi = \theta dx - \eta dy$$

und da $\frac{dp}{dx} = r$, $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s$, $\frac{dq}{dy} = t$ ist, so geben die eben erhaltenen Gleichungen nach der Elimination von $d\sigma$ und $d\varphi$,

$$C^3 r = -\theta' P + \theta P'$$
$$C^3 s = \eta' P - \eta P' = -\theta' Q + \theta Q'$$
$$C^3 t = \eta' Q - \eta Q'$$

woraus mit Berücksichtigung der dritten (118)

$$C^5 (rt - s^2) = P'Q - PQ'$$

und nach der Substitution der obigen Ausdrücke für P, P', Q, Q',

$$\begin{aligned} C^4 (rt - s^2) = A & \left\{ \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) \right\} \\ + B & \left\{ \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) \right\} \\ + C & \left\{ \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) - \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) \right\} \end{aligned}$$

folgt. Man kann diesem Ausdruck noch eine andere Form geben, nemlich

$$(120) \quad \ldots\ldots \quad C^4 (rt - s^2) = R - S$$

wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} R = & \left\{ \theta \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - \mu \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) \right\} \left\{ \mu' \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) - \theta' \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) \right\} \\ + & \left\{ \mu \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) - \eta \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) \right\} \left\{ \eta' \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - \mu' \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) \right\} \\ + & \left\{ \eta \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) - \theta \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) \right\} \left\{ \theta' \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) - \eta' \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) \right\} \\ S = & \left\{ \theta \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - \mu \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) \right\} \left\{ \mu' \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) - \theta' \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) \right\} \\ + & \left\{ \mu \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) - \eta \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) \right\} \left\{ \eta' \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - \mu' \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) \right\} \\ + & \left\{ \eta \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) - \theta \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) \right\} \left\{ \theta' \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) - \eta' \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) \right\} \end{aligned}$$

gesetzt wird. Die Identität dieses Ausdrucks mit dem vorhergehenden ist leicht nachzuweisen, und beruht wieder auf die Gleichungen (118); er ist dem Aeussern nach zwar weniger einfach wie jener, eignet sich aber besser zu den noch auszuführenden Entwickelungen.

110.

Da jetzt die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten x, y, z in Bezug auf σ und φ eintreten werden, so sollen zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen angewandt werden,

$$\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right) = \alpha\,,\ \left(\frac{d\eta}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\eta'}{d\sigma}\right) = \alpha'\,,\ \left(\frac{d\eta'}{d\varphi}\right) = \alpha''$$
$$\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right) = \beta\,,\ \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\theta'}{d\sigma}\right) = \beta'\,,\ \left(\frac{d\theta'}{d\varphi}\right) = \beta''$$
$$\left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right) = \gamma\,,\ \left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\mu'}{d\sigma}\right) = \gamma'\,,\ \left(\frac{d\mu'}{d\varphi}\right) = \gamma''$$

Differentiirt man hierauf die drei Gleichungen (116) theils nach σ, theils nach φ, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
&\eta\alpha + \theta\beta + \mu\gamma = 0\\
&\eta\alpha' + \theta\beta' + \mu\gamma' = 0\\
&\eta'\alpha + \theta'\beta + \mu'\gamma = 0\\
&\eta\alpha'' + \theta\beta'' + \mu\gamma'' + \eta'\alpha' + \theta'\beta' + \mu'\gamma' = 0\\
&\eta'\alpha' + \theta'\beta' + \mu'\gamma' = m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
&\eta'\alpha'' + \theta'\beta'' + \mu'\gamma'' = m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)
\end{aligned}\right\}\quad (121)$$

aus welchen die in der Gleichung (120) enthaltenen Factoren leicht gebildet werden können. Durch einfache Eliminationen, und mit Zuziehung der (118) findet man aus diesen Gleichungen zuerst die folgenden drei Gruppen,

$$\begin{aligned}
&\gamma B - \beta C = 0\\
&\alpha C - \gamma A = 0\\
&\beta A - \alpha B = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma' B - \beta' C = \eta m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
&\alpha' C - \gamma' A = \theta m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
&\beta' A - \alpha' B = \mu m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma'' B - \beta'' C = \eta m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) + \eta' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
&\alpha'' C - \gamma'' A = \theta m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) + \theta' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
&\beta'' A - \alpha'' B = \mu m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) + \mu' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)
\end{aligned}$$

$$Cd\sigma = -\theta' dx + \eta' dy$$
$$Cd\varphi = \theta dx - \eta dy$$

und da $\frac{dp}{dx} = r$, $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s$, $\frac{dq}{dy} = t$ ist, so geben die eben erhaltenen Gleichungen nach der Elimination von $d\sigma$ und $d\varphi$,

$$C^3 r = -\theta' P + \theta P'$$
$$C^3 s = \eta' P - \eta P' = -\theta' Q + \theta Q'$$
$$C^3 t = \eta' Q - \eta Q'$$

woraus mit Berücksichtigung der dritten (118)

$$C^5 (rt - s^2) = P'Q - PQ'$$

und nach der Substitution der obigen Ausdrücke für P, P', Q, Q',

$$\begin{aligned} C^4 (rt - s^2) = & A \left\{ \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) \right\} \\ & + B \left\{ \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) \right\} \\ & + C \left\{ \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) - \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) \right\} \end{aligned}$$

folgt. Man kann diesem Ausdruck noch eine andere Form geben, nemlich

$$(120) \quad \ldots\ldots \quad C^4 (rt - s^2) = R - S$$

wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} R = & \left\{ \theta \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - \mu \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) \right\} \left\{ \mu' \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) - \theta' \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) \right\} \\ & + \left\{ \mu \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) - \eta \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) \right\} \left\{ \eta' \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - \mu' \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) \right\} \\ & + \left\{ \eta \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) - \theta \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) \right\} \left\{ \theta' \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) - \eta' \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) \right\} \\ S = & \left\{ \theta \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - \mu \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) \right\} \left\{ \mu' \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) - \theta' \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) \right\} \\ & + \left\{ \mu \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) - \eta \left(\frac{dC}{d\sigma}\right) \right\} \left\{ \eta' \left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - \mu' \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) \right\} \\ & + \left\{ \eta \left(\frac{dB}{d\sigma}\right) - \theta \left(\frac{dA}{d\sigma}\right) \right\} \left\{ \theta' \left(\frac{dA}{d\varphi}\right) - \eta' \left(\frac{dB}{d\varphi}\right) \right\} \end{aligned}$$

gesetzt wird. Die Identität dieses Ausdrucks mit dem vorhergehenden ist leicht nachzuweisen, und beruht wieder auf die Gleichungen (118); er ist dem Aeussern nach zwar weniger einfach wie jener, eignet sich aber besser zu den noch auszuführenden Entwickelungen.

110.

Da jetzt die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten x, y, z in Bezug auf σ und φ eintreten werden, so sollen zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen angewandt werden,

$$\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right) = \alpha\,,\ \left(\frac{d\eta}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\eta'}{d\sigma}\right) = \alpha'\,,\ \left(\frac{d\eta'}{d\varphi}\right) = \alpha''$$
$$\left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right) = \beta\,,\ \left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\theta'}{d\sigma}\right) = \beta'\,,\ \left(\frac{d\theta'}{d\varphi}\right) = \beta''$$
$$\left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right) = \gamma\,,\ \left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\mu'}{d\sigma}\right) = \gamma'\,,\ \left(\frac{d\mu'}{d\varphi}\right) = \gamma''$$

Differentiirt man hierauf die drei Gleichungen (116) theils nach σ, theils nach φ, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}
&\eta\alpha + \theta\beta + \mu\gamma = 0\\
&\eta\alpha' + \theta\beta' + \mu\gamma' = 0\\
&\eta'\alpha + \theta'\beta + \mu'\gamma = 0\\
&\eta\alpha'' + \theta\beta'' + \mu\gamma'' + \eta'\alpha' + \theta'\beta' + \mu'\gamma' = 0\\
&\eta'\alpha' + \theta'\beta' + \mu'\gamma' = m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
&\eta'\alpha'' + \theta'\beta'' + \mu'\gamma'' = m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (121)$$

aus welchen die in der Gleichung (120) enthaltenen Factoren leicht gebildet werden können. Durch einfache Eliminationen, und mit Zuziehung der (118) findet man aus diesen Gleichungen zuerst die folgenden drei Gruppen,

$$\begin{aligned}
\gamma B - \beta C &= 0\\
\alpha C - \gamma A &= 0\\
\beta A - \alpha B &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma' B - \beta' C &= \eta m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
\alpha' C - \gamma' A &= \theta m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
\beta' A - \alpha' B &= \mu m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma'' B - \beta'' C &= \eta m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) + \eta' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
\alpha'' C - \gamma'' A &= \theta m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) + \theta' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)\\
\beta'' A - \alpha'' B &= \mu m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) + \mu' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Die erste dieser Gruppen erhält man, wenn man nach einander α, β, γ aus der ersten und dritten (121) eliminirt, die zweite Gruppe eben so aus der zweiten und fünften (121), und die dritte Gruppe eben so aus der vierten und sechsten mit Zuziehung der fünften.

Mit Berücksichtigung der (116) geben ferner die (118) die folgenden zwei Gruppen von Gleichungen,

$$\begin{aligned} \theta C - \mu B &= \eta' \\ \mu A - \eta C &= \theta' \\ \eta B - \theta A &= \mu' \\ \hline \mu' B - \theta' C &= \eta m^2 \\ \eta' C - \mu' A &= \theta m^2 \\ \theta' A - \eta' B &= \mu m^2 \end{aligned}$$

deren Ableitung sich durch die Zusammensetzung der linken Seiten von selbst zu erkennen giebt. Differentiirt man nun diese theils nach σ, theils nach φ, so erhält man in Folge der vorhergehenden drei Gruppen von Gleichungen die folgenden,

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - \mu\left(\frac{dB}{d\sigma}\right) &= \alpha' \\ \mu\left(\frac{dA}{d\sigma}\right) - \eta\left(\frac{dC}{d\sigma}\right) &= \beta' \\ \eta\left(\frac{dB}{d\sigma}\right) - \theta\left(\frac{dA}{d\sigma}\right) &= \gamma' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - \mu\left(\frac{dB}{d\varphi}\right) &= \alpha'' + \eta m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \\ \mu\left(\frac{dA}{d\varphi}\right) - \eta\left(\frac{dC}{d\varphi}\right) &= \beta'' + \theta m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \\ \eta\left(\frac{dB}{d\varphi}\right) - \theta\left(\frac{dA}{d\varphi}\right) &= \gamma'' + \mu m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu'\left(\frac{dB}{d\sigma}\right) - \theta'\left(\frac{dC}{d\sigma}\right) &= \alpha m^2 + \eta m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \\ \eta'\left(\frac{dC}{d\sigma}\right) - \mu'\left(\frac{dA}{d\sigma}\right) &= \beta m^2 + \theta m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \\ \theta'\left(\frac{dA}{d\sigma}\right) - \eta'\left(\frac{dB}{d\sigma}\right) &= \gamma m^2 + \mu m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu'\left(\frac{dB}{d\varphi}\right) - \theta'\left(\frac{dC}{d\varphi}\right) &= \alpha' m^2 + \eta m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) - \eta' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \\ \eta'\left(\frac{dC}{d\varphi}\right) - \mu'\left(\frac{dA}{d\varphi}\right) &= \beta' m^2 + \theta m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) - \theta' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \\ \theta'\left(\frac{dA}{d\varphi}\right) - \eta'\left(\frac{dB}{d\varphi}\right) &= \gamma' m^2 + \mu m\left(\frac{dm}{d\varphi}\right) - \mu' m\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) \end{aligned}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind die Factoren, aus welchen die Ausdrücke für R und S des vor. Art. bestehen, substituirt man sie und berücksichtigt die (121) und (116), so wird sogleich

$$R = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\, m^2$$
$$S = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\, m^2 - m^2 \left(\frac{dm}{d\sigma}\right)^2$$

folglich

$$C^4 (rt - s^2) = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2)\, m^2 + m^2 \left(\frac{dm}{d\sigma}\right)^2$$

Die Differentiation der dritten und fünften der (121) giebt aber

$$\eta \left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right) + \theta' \left(\frac{d\beta}{d\varphi}\right) + \mu' \left(\frac{d\gamma}{d\varphi}\right) + \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0$$
$$\eta' \left(\frac{d\alpha'}{d\sigma}\right) + \theta' \left(\frac{d\beta'}{d\sigma}\right) + \mu' \left(\frac{d\gamma'}{d\sigma}\right) + \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = m \left(\frac{d^2m}{d\sigma^2}\right) + \left(\frac{dm}{d\sigma}\right)^2$$

und da

$$\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\alpha'}{d\sigma}\right), \quad \left(\frac{d\beta}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\beta'}{d\sigma}\right), \quad \left(\frac{d\gamma}{d\varphi}\right) = \left(\frac{d\gamma'}{d\sigma}\right)$$

sind, indem beide hier einander gleichgesetzte Functionen bez. $\left(\frac{d^2\eta}{d\sigma d\varphi}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{d\sigma d\varphi}\right)$, $\left(\frac{d^2\mu}{d\sigma d\varphi}\right)$ ausdrücken, so ergiebt sich

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2 = -\, m \left(\frac{d^2m}{d\sigma^2}\right) - \left(\frac{dm}{d\sigma}\right)^2$$

womit

$$C^4 (rt - s^2) = -\, m^3 \left(\frac{d^2m}{d\sigma^2}\right)$$

wird. Setzt man nun sowohl diesen Ausdruck wie den am Ende des Art. 108 erhaltenen in (115), so wird der allgemeine Ausdruck des Krümmungsmaasses

$$\varkappa = -\frac{1}{m} \left(\frac{d^2m}{d\sigma^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (122)$$

welcher voraussetzt, dass die rechtwinklichen Coordinaten der Oberfläche in Function der unabhängigen Veränderlichen σ und φ dargestellt werden.

111.

Um $\varkappa$ in eine nach den Potenzen von σ fortschreitende Reihe zu entwickeln bedienen wir uns am Einfachsten des Ausdrucks (115). Bezeichnen wir mit $\varkappa_0$, $\left(\frac{d\varkappa}{d\sigma}\right)_0$, $\left(\frac{d^2\varkappa}{d\sigma^2}\right)_0$, etc. die Werthe dieser Functio-

nen für den Punkt A, in welchem $\sigma = 0$ ist, so wird in Folge eines bekannten Satzes

$$(123)\qquad x = x_0 + \left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0 \sigma + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) \sigma^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3x}{d\sigma^3}\right)_0 \sigma^3 + \ldots$$

Um die Ausdrücke der in dieser Gleichung vorkommenden Differentialquotienten erhalten zu können, müssen wir die Relationen kennen lernen, die zwischen den Differentialen der rechtwinklichen Coordinaten x, y, z der Oberfläche in Bezug auf σ statt finden, und diese ergeben sich leicht aus den vorhergehenden Entwickelungen. Zufolge der Bedeutung der im Art. 110 eingeführten Functionen α, β, γ, etc. können die erste und die dritte der (121) wie folgt geschrieben werden,

$$\eta\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + \theta\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + \mu\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

$$\eta'\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + \theta'\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + \mu'\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

eliminirt man hieraus wechselsweise $\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)$, so ergeben sich

$$(\eta\theta' - \eta'\theta)\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + (\mu\theta' - \mu'\theta)\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

$$(\eta\theta' - \eta'\theta)\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + (\eta\mu' - \eta'\mu)\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

die wenn man z als Function von x und y betrachtet, in Folge der (118) und (119) in die folgenden übergehen,

$$(124)\qquad \left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + p\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0\,,\quad \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + q\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

welche die gesuchten Relationen sind.

112.

Die eben erhaltenen Relationen (124) enthalten zunächst den im Art. 105 angekündigten zweiten Beweis des dort erhaltenen Satzes, denn sie geben sich in Bezug auf die Linie σ als die bekannten Bedingungsgleichungen der kürzesten Linie auf einer beliebigen Oberfläche zu erkennen, von deren Coordinaten man z als Function von x und y betrachtet, und sind hier ohne die Bedingung des Minimums einzuführen erhalten worden.*) Sie haben sich als nothwendige Folge der beiden

---

*) Die Variation der Gleichung $\sigma = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ist

ersten (116), die die Form der (113) bedingen, und von welchen die erste und dritte der (121) die Differentiale nach σ sind, gezeigt. Der Satz selbst, der den Schlüssel zu manchen Sätzen der angezogenen Gaussischen Abhandlung enthält, kann nun wie folgt ausgesprochen werden:

»Wenn man die rechtwinklichen Coordinaten irgend einer Ober- »fläche dergestalt in Function von zwei neuen, unabhängigen Veränder- »lichen σ und φ ausdrückt, dass dadurch der Ausdruck des Quadrats des »Elements dh irgend einer auf dieser Oberfläche gezogenen Linie h die »Form

$$dh^2 = d\sigma^2 + m^2 d\varphi^2$$

»annimmt, so ist nothwendig σ eine kürzeste Linie auf dieser Ober- »fläche, wie auch die Linie h beschaffen sei.« *)

$$\begin{aligned}\delta\sigma &= \int \left\{ \left(\frac{dx}{d\sigma}\right) \delta dx + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right) \delta dy + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right) \delta dz \right\} \\ &= \left(\frac{dx}{d\sigma}\right) \delta x + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right) \delta y + \left(\frac{dz}{d\sigma}\right) \delta z \\ &\quad - \int \left\{ \delta x d.\left(\frac{dx}{d\sigma}\right) + \delta y d.\left(\frac{dy}{d\sigma}\right) + \delta z d.\left(\frac{dz}{d\sigma}\right) \right\}\end{aligned}$$

Die Gleichung der Oberfläche giebt aber, wenn z als Function von x und y betrachtet wird,

$$\delta z = p\delta x + q\delta y$$

Eliminirt man hiemit δz unter dem Integralzeichen des Ausdrucks der Variation $\delta\sigma$, und setzt hierauf die Coefficienten von δx und δy, jeden für sich, gleich Null, so ergiebt sich

$$d.\left(\frac{dx}{d\sigma}\right) + pd.\left(\frac{dz}{d\sigma}\right) = 0\ , \quad d.\left(\frac{dy}{d\sigma}\right) + qd.\left(\frac{dz}{d\sigma}\right) = 0$$

oder, da hier $d\sigma$ als constant betrachtet werden darf,

$$\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + p\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0\ , \quad \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + q\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

welche die durch die Bedingung des Minimums von σ abgeleiteten Bedingungsgleichungen, und mit den (124) identisch sind.

*) Die bekannte Differentialgleichung für die Rectification von ebenen, auf Polarcoordinaten bezogenen Linien, nemlich

$$dh^2 = d\sigma^2 + \sigma^2 d\varphi^2$$

stellt sich hiemit um so mehr als ein specieller Fall der obigen allgemeinen Differentialgleichung dar. Denn hier ist nicht nur der Radius Vector σ ein specieller Werth von m, sondern auch eine gerade Linie, mit anderen Worten eine kürzeste Linie auf der hier in Betracht kommenden Oberfläche, nemlich der Ebene.

Untersucht man das Entgegengesetzte des im Text bewiesenen Satzes, so findet man, dass nicht blos bei der obigen Form von dh, sondern auch bei unzählich vielen anderen, σ eine kürzeste Linie ist. Obgleich ich für diesen entgegengesetzten Satz

113.

Gehen wir nun zur Entwickelung der Coefficienten des Ausdrucks (123) über, so wird diese am Einfachsten durchgeführt, wenn man den

---

keine Anwendung im Sinne habe, so halte ich doch für angemessen ihn zu beweisen. Sei daher hier

$$dh^2 = E d\sigma^2 + 2 F d\sigma d\varphi + G d\varphi^2$$

wo wieder

$$E = \eta^2 + \theta^2 + \mu^2$$
$$F = \eta\eta' + \theta\theta' + \mu\mu'$$
$$G = \eta'^2 + \theta'^2 + \mu'^2$$

sind. Wenn man nun nach den Bedingungen fragt, unter welchen in dieser Form von dh die Linie σ eine kürzeste auf der Oberfläche ist, so müssen vor Allem die Gleichungen (124) statt finden, und von diesen gelangt man auf die entgegengesetzte Art, wie im Text, auf die Bedingungsgleichungen

$$\eta \left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + \theta \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + \mu \left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$
$$\eta' \left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + \theta' \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + \mu' \left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right) = 0$$

Die vorstehenden Ausdrücke für E und F geben aber durch die Differentiation

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dE}{d\sigma}\right) = \eta \left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right) + \theta \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right) + \mu \left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{dE}{d\varphi}\right) = \eta \left(\frac{d^2x}{d\sigma d\varphi}\right) + \theta \left(\frac{d^2y}{d\sigma d\varphi}\right) + \mu \left(\frac{d^2z}{d\sigma d\varphi}\right)$$
$$\left(\frac{dF}{d\sigma}\right) = \eta' \left(\frac{d^2x}{d^2\sigma}\right) + \theta' \left(\frac{d^2y}{d^2\sigma}\right) + \mu' \left(\frac{d^2z}{d^2\sigma}\right)$$
$$+ \eta \left(\frac{d^2x}{d\sigma d\varphi}\right) + \theta \left(\frac{d^2y}{d\sigma d\varphi}\right) + \mu \left(\frac{d^2z}{d\sigma d\varphi}\right)$$

also in Folge der vorstehenden Bedingungsgleichungen

$$\left(\frac{dE}{d\sigma}\right) = 0$$
$$\left(\frac{dF}{d\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{dE}{d\varphi}\right)$$

Die Integrale dieser beiden partiellen Differentialgleichungen sind

$$E = f\varphi, \quad F = \frac{1}{2}\,\sigma\left(\frac{dE}{d\varphi}\right) + f'\varphi$$

wo $f\varphi$ und $f'\varphi$ zwei willkührliche Functionen von φ bezeichnen, die kein σ enthalten dürfen. Also jedes Mal, wenn E und F diesen beiden Gleichungen gnügen, ist σ eine kürzeste Linie auf der Oberfläche, und die Fälle, wo dieses statt findet, sind wegen der willkührlichen Functionen von φ unzählich. Der im Satze des Textes vorkommende Fall ist ein specieller dieses allgemeinen, welcher dadurch herbeigeführt wird, dass man $f\varphi = 1$, und $f'\varphi = 0$ setzt.

Coordinaten x, y, z eine solche Lage giebt, dass sie im Punkt A anfangen, die Ebene der xy mit der Berührungsebene in A zusammen fällt, und die x Achse in einer der beiden Hauptkrümmungsebenen des Punkts A liegt. Hieraus folgt zunächst

$$p_0 = 0\,, \quad q_0 = 0\,, \quad s_0 = 0$$

und nennt man den Winkel, den das erste Element der Linie σ mit dem positiven Theil der x Achse macht χ, dann wird ausserdem

$$\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)_0 = \cos\chi\,, \quad \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)_0 = \sin\chi$$

Die Gleichungen (124) geben hierauf

$$\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)_0 = 0\,, \quad \left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)_0 = 0$$

und differentiirt man dieselben, nebst der Gleichung

$$dz = pdx + qdy$$

der Oberfläche, so bekommt man nach Einführung der obigen Bedingungsgleichungen

$$\left(\frac{d^3x}{d\sigma^3}\right)_0 = -\,r^2_0 \cos{}^3\chi - r_0 t_0 \sin{}^2\chi \cos\chi$$

$$\left(\frac{d^3y}{d\sigma^3}\right)_0 = -\,r_0 t_0 \sin\chi \cos{}^2\chi - t^2_0 \sin{}^3\chi$$

Weiter brauchen wir diese Differentiale nicht fortzusetzen. Um die Gleichung (115) auf möglichst einfache Art zu differentiiren setze ich

$$A = rt - s^2\,; \quad B = p^2 + q^2$$

wodurch

$$\varkappa = \frac{A}{(1+B)^2}$$

erhalten wird. Differentiirt man nun diese Ausdrücke für A und B drei Mal, und berücksichtigt die vorstehenden Bedingungsgleichungen, wozu auch die für die zweiten und dritten Differentiale von x und y in Bezug auf σ erhaltenen, auf den Punkt A bezogenen, Ausdrücke gehören, so ergiebt sich

$$A_0 = r_0 t_0$$

$$\left(\frac{dA}{d\sigma}\right)_0 = \left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0 \cos\chi + \left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0 \sin\chi$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2A}{d\sigma^2}\right)_0 = &\left\{\left(\frac{d^2.rt}{dx^2}\right)_0 - 2\left(\frac{dr}{dy}\right)_0^2\right\}\cos{}^2\chi \\ &+2\left\{\left(\frac{d^2.rt}{dxdy}\right)_0 - 2\left(\frac{dr}{dy}\right)_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0\right\}\sin\chi\cos\chi \\ &+\left\{\left(\frac{d^2.rt}{dy^2}\right)_0 - 2\left(\frac{dt}{dx}\right)_0^2\right\}\sin{}^2\chi\end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^3A}{d\sigma^3}\right)_0 = \left\{\left(\frac{d^3.rt}{dx^3}\right) - 6\left(\frac{d^2r}{dx\,dy}\right)_0\left(\frac{dr}{dy}\right)_0 - r_0^2\left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0\right\}\cos^3\chi$$
$$+\left\{3\left(\frac{d.^3rt}{dx^2dy}\right)_0 - 6\left(\frac{d^2r}{dx\,dy}\right)_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 - 12\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right)_0\left(\frac{dr}{dy}\right)_0 - r_0t_0\left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0\right\}\sin\chi\cos^2\chi$$
$$+\left\{3\left(\frac{d^3.rt}{dx\,dy^2}\right)_0 - 6\left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right)_0\left(\frac{dr}{dy}\right)_0 - 12\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 - r_0t_0\left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0\right\}\sin^2\chi\cos\chi$$
$$+\left\{\left(\frac{d^3.rt}{dy^3}\right)_0 - 6\left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right)_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 - t_0^2\left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0\right\}\sin^3\chi$$

$$B_0 = 0$$
$$\left(\frac{dB}{d\sigma}\right)_0 = 0$$
$$\left(\frac{d^2B}{d\sigma^2}\right)_0 = 2r_0^2\cos^2\chi + 2t_0^2\sin^2\chi$$
$$\left(\frac{d^3B}{d\sigma^3}\right)_0 = 6r_0\left(\frac{dr}{dx}\right)_0\cos^3\chi + \left\{12r_0\left(\frac{dr}{dy}\right)_0 + 6t_0\left(\frac{dr}{dy}\right)_0\right\}\sin\chi\cos^2\chi$$
$$+\left\{12t_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 + 6r_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0\right\}\sin^2\chi\cos\chi + 6t_0\left(\frac{dt}{dy}\right)_0\sin^3\chi$$

und differentiirt man auch den Ausdruck für $\varkappa$, so erhält man durch Zuziehung der Bedingungsgleichungen,

$$\varkappa_0 = A_0$$
$$\left(\frac{d\varkappa}{d\sigma}\right)_0 = \left(\frac{dA}{d\sigma}\right)_0$$
$$\left(\frac{d^2\varkappa}{d\sigma^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2A}{d\sigma^2}\right)_0 - 2A_0\left(\frac{d^2B_0}{d\sigma^2}\right)_0$$
$$\left(\frac{d^3\varkappa}{d\sigma^3}\right)_0 = \left(\frac{d^3A}{d\sigma^3}\right)_0 - 6\left(\frac{dA}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{d^2B}{d\sigma^2}\right)_0 - 2A_0\left(\frac{d^3B}{d\sigma^3}\right)_0$$

Vor der Substitution dieser Ausdrücke ist φ, welcher Winkel von einem beliebigen Anfangspunkt zu zählen ist, statt χ, welcher einen bestimmten Anfangspunkt hat, einzuführen. Sei v der Winkel, den das erste Element derjenigen kürzesten Linie σ, für welche $\varphi = 0$ sein soll, mit der Hauptkrümmungsebene, in welcher die x Achse liegt, nach der positiven Seite der x macht, dann wird, wenn man v und φ in derselben Richtung wachsen lässt,

$$\chi = v + \varphi$$

Führt man diesen Werth von χ in die obigen Ausdrücke ein, setzt zur Abkürzung

$$\eta = r_0t_0$$
$$\nu = \left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0, \quad \nu' = \left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0$$
$$\pi = \left(\frac{d^2.rt}{dx^2}\right)_0 - 2\left(\frac{dr}{dy}\right)_0^2 - 4r_0^3t_0$$
$$\pi' = \left(\frac{d^2.rt}{dx\,dy}\right)_0 - 2\left(\frac{dr}{dy}\right)_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0$$

$$\pi'' = \left(\frac{d^2.rt}{dy^2}\right)_0 - 2\left(\frac{dt}{dx}\right)_0^2 - 4\,r_0 t_0^3$$

$$\varrho = \left(\frac{d^3.rt}{dx^3}\right)_0 - 6\left(\frac{d^2r}{dx\,dy}\right)_0\left(\frac{dr}{dy}\right)_0 - 12\,r_0^2 t_0\left(\frac{dr}{dx}\right)_0 - 13\,r_0^2\left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0$$

$$\varrho' = \left(\frac{d.^3rt}{dx^2dy}\right)_0 - 4\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right)_0\left(\frac{dr}{dy}\right)_0 - 2\left(\frac{d^2r}{dx\,dy}\right)_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0$$
$$- 8\,r_0^2 t_0\left(\frac{dr}{dy}\right)_0 - 4\,r_0 t_0^2\left(\frac{dr}{dy}\right)_0 - 4\,r_0^2\left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0 - \frac{1}{3}\,r_0 t_0\left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0$$

$$\varrho'' = \left(\frac{d^3.rt}{dx\,dy^2}\right) - 4\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 - 2\left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right)_0\left(\frac{dr}{dy}\right)_0$$
$$- 8\,r_0 t_0^2\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 - 4\,r_0^2 t_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 - 4\,t_0^2\left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0 - \frac{1}{8}\,r_0 t_0\left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0$$

$$\varrho''' = \left(\frac{d^3.rt}{dy^3}\right)_0 - 6\left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right)_0\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 - 12\,r_0 t_0^2\left(\frac{dt}{dy}\right)_0 - 13\,t_0^2\left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0$$

und ferner

$$\theta = \nu\cos v + \nu'\sin v$$
$$\theta' = \nu'\cos v - \nu\sin v$$
$$\lambda = \pi\cos^2 v + 2\pi'\sin v\cos v + \pi''\sin^2 v$$
$$\lambda' = \pi'\cos^2 v + (\pi'' - \pi)\sin v\cos v - \pi'\sin^2 v$$
$$\lambda'' = \pi''\cos^2 v - 2\pi'\sin v\cos v + \pi\sin^2 v$$
$$\mu = \varrho\cos^3 v + 3\varrho'\sin v\cos^2 v + 3\varrho''\sin^2 v\cos v + \varrho'''\sin^3 v$$
$$\mu' = \varrho'\cos^3 v + (2\varrho'' - \varrho)\sin v\cos^2 v + (\varrho''' - 2\varrho')\sin^2 v\cos v - \varrho''\sin^3 v$$
$$\mu'' = \varrho''\cos^3 v + (\varrho''' - 2\varrho')\sin v\cos^2 v + (\varrho - 2\varrho'')\sin^2 v\cos v + \varrho'\sin^3 v$$
$$\mu''' = \varrho'''\cos^3 v - 3\varrho''\sin v\cos^2 v + 3\varrho'\sin^2 v\cos v - \varrho\sin^3 v$$

dann giebt die Substitution

$$\varkappa = \eta + \theta\sigma\cos\varphi + \theta'\sigma\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\lambda\sigma^2\cos^2\varphi + \lambda'\sigma^2\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\lambda''\sigma^2\sin^2\varphi$$
$$+ \tfrac{1}{6}\mu\sigma^3\cos^3\varphi + \tfrac{1}{2}\mu'\sigma^3\sin\varphi\cos^2\varphi + \tfrac{1}{2}\mu''\sigma^3\sin^2\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{6}\mu'''\sigma^3\sin^3\varphi \quad (125)$$

wodurch $\varkappa$ in Function von σ und φ dargestellt ist,

114.

Um auch m in Function derselben Grössen darzustellen, dient die Gleichung (122), in welcher zu diesem Zweck σ als unabhängige Veränderliche, und φ als eine Constante betrachtet werden dürfen. Sei demgemäss zur Abkürzung statt der (125)

$$\varkappa = \eta + A\sigma + \tfrac{1}{2}B\sigma^2 + \tfrac{1}{6}C\sigma^3$$

dann ist, um den Ausdruck für m zu erhalten der Gleichung

$$d^2m + m\left(\eta + A\sigma + \tfrac{1}{2}B\sigma^2 + \tfrac{1}{6}C\sigma^3\right)d\sigma^2 = 0$$

Gnüge zu leisten. Da m und σ zugleich Null werden müssen, der Coefficient von σ im Ausdruck von m nothwendig $= 1$ werden muss, und auch leicht erkannt werden kann, dass in m kein mit σ^2 multiplicirtes Glied vorkommen wird, so kann gesetzt werden

$$m = \sigma + \alpha\sigma^3 + \beta\sigma^4 + \gamma\sigma^5 + \delta\sigma^6 + \ldots$$

wo α, β, etc. unbestimmte Coefficienten sind. Die Substitution dieses Ausdrucks in die vorstehende Differentialgleichung führt auf die folgenden Bedingungsgleichungen,

$$0 = 6\alpha + \eta\;;\quad 0 = 12\beta + A$$

$$0 = 20\gamma + \tfrac{1}{2}B + \alpha\eta\;;\quad 0 = 30\delta + \tfrac{1}{6}C + \alpha A + \beta\eta$$

woraus

$$\alpha = -\tfrac{1}{6}\eta\;;\quad \beta = -\tfrac{1}{12}A\;;\quad \gamma = -\tfrac{1}{40}B + \tfrac{1}{120}\eta^2\;;\quad \delta = -\tfrac{1}{180}C + \tfrac{1}{120}\eta A$$

folgt. Die Substitution der Werthe von A, B, C giebt hierauf

$$
\begin{aligned}
(126)\quad m = \sigma &- \tfrac{1}{6}\eta\sigma^3 - \tfrac{1}{12}\theta\sigma^4\cos\varphi - \tfrac{1}{12}\theta'\sigma^4\sin\varphi \\
&- \tfrac{1}{40}\lambda\sigma^5\cos^2\varphi - \tfrac{1}{20}\lambda'\sigma^5\sin\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{40}\lambda''\sigma^5\sin^2\varphi + \tfrac{1}{120}\eta^2\sigma^5 \\
&- \tfrac{1}{180}\mu\sigma^6\cos^3\varphi - \tfrac{1}{60}\mu'\sigma^6\sin\varphi\cos^2\varphi - \tfrac{1}{60}\mu''\sigma^6\sin^2\varphi\cos\varphi \\
&\qquad\qquad - \tfrac{1}{180}\mu'''\sigma^6\sin^3\varphi \\
&+ \tfrac{1}{120}\eta\theta\sigma^6\cos\varphi + \tfrac{1}{120}\eta\theta'\sigma^6\sin\varphi
\end{aligned}
$$

wodurch auch m in Function von σ und φ dargestellt ist. Es verdient bemerkt zu werden, dass die vorhergehende Analyse leicht zu erkennen giebt, dass für die Ebene alle Coefficienten η, θ, θ', λ, etc. etc. Null werden, und dass man für die Kugel, deren Halbmesser R ist, $\eta = \frac{1}{R^2}$ erhält, während alle übrigen Coefficienten wieder Null werden. Für die Ebene wird also $m = \sigma$, welches auch aus anderen Gründen hervorgeht, und für die Kugel bekommt man

$$m = \sigma - \frac{1}{6R^2}\sigma^3 + \frac{1}{120R^4}\sigma^5 - \frac{1}{[illegible]\,R^6}\sigma^7 \pm \ldots\,^{*}$$

das ist

* Dieses Glied und alle übrigen [illegible] Glieder kann man vollständig aus den obigen Angaben erhalten.

$$m = R \sin \frac{\sigma}{R}$$

und es ist hier σ ein Bogen irgend eines grössten Kreises auf dieser Kugel.

115.

Wir kommen jetzt zur Integration der Gleichungen (114), die auch durch die Methode der unbestimmten Coefficienten ausgeführt werden soll. Um im Voraus auf die Form der Unbekannten schliessen zu können, und die Bedeutung der willkührlichen Constanten kennen zu lernen soll die Integration zuerst mit bloser Berücksichtigung des ersten Gliedes von m ausgeführt werden. In diesem Falle, welchem die Bedeutung unterliegt, dass die Oberfläche eine Ebene ist, können die (114) direkt integrirt werden, und es lässt sich vom Integral im Voraus angeben, dass h eine grade Linie werden muss. Die Linien σ sind, da sie auch kürzeste Linien sind, in diesem Falle auch grade Linien. Setzt man $m = \sigma$, so werden die (114)

$$d\sigma = dh \cos\psi$$
$$\sigma d\varphi = dh \sin\psi$$
$$d\varphi = -d\psi$$

und das Integral der dritten Gleichung wird

$$\varphi + \psi = c$$

wenn c die willkührliche Constante bezeichnet. Eliminirt man $d\varphi$ durch die dritte Gleichung aus der zweiten, so sind noch zu integriren

$$d\sigma = dh \cos\psi$$
$$-\sigma d\psi = dh \sin\psi$$

Formt man diese auf bekannte Weise in die folgenden um,

$$0 = d\sigma \sin\psi + \sigma d\psi \cos\psi$$
$$dh = d\sigma \cos\psi - \sigma d\psi \sin\psi$$

so erkennt man sogleich dass

$$l = \sigma \sin\psi$$
$$h = \sigma \cos\psi + l'$$

die Integrale derselben sind, in welchen l und l' die willkührlichen Constanten bezeichnen. Die drei Integrale, die wir erhalten haben, gehören einem gradlinigten Dreieck an, denn setzt man

$$c = 180^0 - c', \quad l = k \sin c', \quad l' = k \cos c'$$

$$\sigma \sin \varphi = (1+a)h + bh^2 + ch^3 + eh^4$$
$$\sigma \cos \varphi = a' + b'h^2 + c'h^3 + e'h^4 + f'h^5$$
$$\varphi + \psi = 90^0 + ih + lh^2 + mh^3 + nh^4$$

und dass die Coefficienten a, b, c, e von der zweiten, alle übrigen aber von der ersten Ordnung in Bezug auf die andere Cathete unsers Dreiecks sein müssen. Sei

$$z = ih + lh^2 + mh^3 + nh^4$$

dann wird $\psi = 90^0 - (\varphi - z)$, und

$$\sin \psi = \cos \varphi + z \sin \varphi - \tfrac{1}{2} z^2 \cos \varphi + \ldots$$
$$\cos \psi = \sin \varphi - z \cos \varphi - \tfrac{1}{2} z^2 \sin \varphi + \ldots$$

Die Substitution der obigen Ausdrücke in diese giebt bis auf Grössen siebenter Ordnung

$$\sigma \sin \psi = a' + \left(b' + i + ai - \tfrac{1}{2} a'i^2\right) h^2 + (c' + l + al + bi - a'il) h^3 + (e' + m) h^4 + (f' + n) h^5$$
$$\sigma \cos \psi = (1 + a - a'i) h + (b - a'l) h^2 + \left(c - a'm - b'i - \tfrac{1}{2} i^2\right) h^3 + (e - d'n - b'l - c'i - il) h^4$$

wodurch der Zusammenhang zwischen φ und ψ gegeben ist. Entweder aus der Summe der Quadrate der Ausdrücke für $\sigma \sin \psi$ und $\sigma \cos \psi$, oder auf dieselbe Weise aus den für $\sigma \sin \varphi$ und $\sigma \cos \varphi$ ergiebt sich bis auf Grössen achter Ordnung,

$$\sigma^2 = a'^2 + (1 + 2a + a^2 + 2a'b') h^2 + 2(b + ab + a'c') h^3 + (2c + b'^2 + 2a'e') h^4 + 2(e + a'f' + b'c') h^5$$

Da ferner identisch

$$\sigma^2 d\varphi = \sigma \cos \varphi d . \sigma \sin \varphi - \sigma \sin \varphi d . \sigma \cos \varphi$$

ist, so geben die obigen Reihen

$$(127) \qquad \sigma^2 \frac{d\varphi}{dh} = a' + a'a + 2a'bh - (b' + ab' - 3a'c) h^2 - (2c' + 2ac' - 4a'e) h^3 - 3e'h^4 - 4f'h^5$$

und hieraus bekommt man

$$\sigma^3 \frac{d\varphi}{dh} \cos \psi = (a' + 2a'a - a'^2 i) h + (3a'b - a'^2 l) h^2 - b'h^3 - 2c'h^4$$
$$\sigma^3 \frac{d\varphi}{dh} \sin \psi = (a'^2 + a'^2 a) + 2a'^2 bh + a'ih^2 + (a'l - a'c') h^3$$

Die Gleichung (126) giebt

$$m-\sigma\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) = \sigma^3\Big\{\frac{1}{3}\eta+\frac{1}{4}\theta\sigma\cos\varphi+\frac{1}{4}\theta'\sigma\sin\varphi$$
$$+\frac{1}{10}\lambda\sigma^2\cos^2\varphi+\frac{1}{5}\lambda'\sigma^2\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{10}\lambda''\sigma^2\sin^2\varphi-\frac{1}{30}\eta^2\sigma^2$$
$$+\frac{1}{36}\mu\sigma^3\cos^3\varphi+\frac{1}{12}\mu'\sigma^3\sin\varphi\cos^2\varphi+\frac{1}{12}\mu''\sigma^3\sin^2\varphi\cos\varphi+\frac{1}{36}\mu'''\sigma^3\sin^3\varphi$$
$$-\frac{1}{24}\eta\theta\sigma^3\cos\varphi-\frac{1}{24}\eta\theta'\sigma^3\sin\varphi\Big\}$$

$$1-\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) = \sigma^2\Big\{\frac{1}{2}\eta+\frac{1}{3}\theta\sigma\cos\varphi+\frac{1}{3}\theta'\sigma\sin\varphi$$
$$+\frac{1}{8}\lambda\sigma^2\cos^2\varphi+\frac{1}{4}\lambda'\sigma^2\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{8}\lambda''\sigma^2\sin^2\varphi-\frac{1}{24}\eta^2\sigma^2$$
$$+\frac{1}{30}\mu\sigma^3\cos^3\varphi+\frac{1}{10}\mu'\sigma^3\sin\varphi\cos^2\varphi+\frac{1}{10}\mu''\sigma^3\sin^2\varphi\cos\varphi+\frac{1}{30}\mu'''\sigma^3\sin^3\varphi$$
$$-\frac{1}{20}\eta\theta\sigma^3\cos\varphi-\frac{1}{20}\eta\theta'\sigma^3\sin\varphi\Big\}$$

und macht man diese vermittelst der vorhergehenden Ausdrücke zu Functionen von h, so werden sie

$$m-\sigma\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) = \sigma^3\Big\{\left(\frac{1}{3}\eta+\frac{1}{4}\theta a'+\frac{1}{10}\lambda a'^2-\frac{1}{30}\eta^2a'^2+\frac{1}{36}\mu a'^3-\frac{1}{24}\eta\theta a'^3\right)$$
$$+\left(\frac{1}{4}\theta'(1+a)+\frac{1}{5}\lambda'a'+\frac{1}{12}\mu'a'^2-\frac{1}{24}\eta\theta'a'^2\right)h$$
$$+\left(\frac{1}{4}\theta b'+\frac{1}{10}\lambda''-\frac{1}{30}\eta^2+\frac{1}{12}\mu''a'-\frac{1}{24}\eta\theta a'\right)h^2$$
$$+\left(\frac{1}{36}\mu'''-\frac{1}{24}\eta\theta'\right)h^3\Big\}$$

$$1-\left(\frac{dm}{d\sigma}\right) = \sigma^2\Big\{\left(\frac{1}{2}\eta+\frac{1}{3}\theta a'+\frac{1}{8}\lambda a'^2-\frac{1}{24}\eta^2a'^2+\frac{1}{30}\mu a'^3-\frac{1}{20}\eta\theta a'^3\right)$$
$$+\left(\frac{1}{3}\theta'(1+a)+\frac{1}{4}\lambda'a'+\frac{1}{10}\mu'a'^2-\frac{1}{20}\eta\theta'a'^2\right)h$$
$$+\left(\frac{1}{3}\theta b'+\frac{1}{8}\lambda''-\frac{1}{24}\eta^2+\frac{1}{10}\mu''a'+\frac{1}{20}\eta\theta a'\right)h^2$$
$$+\left(\frac{1}{30}\mu'''-\frac{1}{20}\eta\theta'\right)h^3\Big\}$$

Durch die Substitution der nun entwickelten Ausdrücke in die Differentialgleichungen des vor. Art. ergaben sich die folgenden Bedingungsgleichungen

$$a-a'i = -\frac{1}{3}\eta(a'^2+a'^2a)-\frac{1}{4}\theta(a'^3+a'^3a)-\frac{1}{10}\lambda a'^4$$
$$+\frac{1}{30}\eta^2a'^4-\frac{1}{36}\mu a'^5+\frac{1}{24}\eta\theta a'^5$$
$$2b-2a'l = -\frac{2}{3}\eta a'^2b-\frac{1}{4}\theta'(a'^2+2a'^2a)-\frac{1}{5}\lambda'a'^3-\frac{1}{12}\mu'a'^4+\frac{1}{24}\eta\theta'a'^4$$
$$3c-3a'm-3b'i-\frac{3}{2}i^2 = -\frac{1}{3}\eta a'i-\frac{1}{4}\theta(a'^2b'+a'^2i)-\frac{1}{10}\lambda''a'^2$$
$$+\frac{1}{30}\eta^2a'^2-\frac{1}{12}\mu''a'^3+\frac{1}{24}\eta\theta a'^3$$
$$4e-4a'n-4b'l-4c'i-4il = -\frac{1}{3}\eta(a'l-a'c')-\frac{1}{4}\theta'a'i-\frac{1}{36}\mu'''a'^2+\frac{1}{24}\eta\theta'a'^2$$

$$2b'+2i+2ai-a'i^2 = \frac{1}{8}\eta(a'+2a'a-a'^2i)+\frac{1}{4}\theta(a'^2+2a'^2a-a'^3i)$$
$$+\frac{1}{10}\lambda a'^3-\frac{1}{80}\eta^2a'^3+\frac{1}{36}\mu a'^4-\frac{1}{24}\eta\theta a'^4$$
$$3c'+3l+3al+3bi-3a'il = \frac{1}{8}\eta(3a'b-a'^2l)+\frac{1}{4}\theta'(a'+3a'a-a'^2i)$$
$$+\frac{1}{5}\lambda'a'^2+\frac{1}{12}\mu'a'^3-\frac{1}{24}\eta\theta'a'^3$$
$$4e'+4m = -\frac{1}{8}\eta b'+\frac{1}{10}\lambda''a'-\frac{1}{30}\eta^2a'+\frac{1}{12}\mu''a'^3-\frac{1}{24}\eta\theta a'^2$$
$$5f'+5n = -\frac{2}{8}\eta c'-\frac{1}{4}\theta'b'+\frac{1}{36}\mu'''a'-\frac{1}{24}\eta\theta'a'$$

$$i = \frac{1}{2}\eta(a'+a'a)+\frac{1}{8}\theta(a'^2+a'^2a)+\frac{1}{8}\lambda a'^3-\frac{1}{24}\eta^2a'^3+\frac{1}{30}\mu a'^4-\frac{1}{20}\eta\theta a'^4$$
$$2l = \eta a'b+\frac{1}{8}\theta'(a'+2a'a)+\frac{1}{4}\lambda'a'^2+\frac{1}{10}\mu'a'^3-\frac{1}{20}\eta\theta'a'^3$$
$$3m = -\frac{1}{2}\eta b'+\frac{1}{8}\lambda''a'-\frac{1}{24}\eta^2a'+\frac{1}{10}\mu'a'^2-\frac{1}{20}\eta\theta a'^2$$
$$4n = -\eta c'-\frac{1}{8}\theta'b'+\frac{1}{30}\mu'''a'-\frac{1}{20}\eta\theta'a'$$

und aus diesen Gleichungen findet man leicht

$$a = \frac{1}{6}\eta a'^2+\frac{1}{12}\theta a'^3+\frac{1}{40}\lambda a'^4+\frac{7}{360}\eta^2a'^4+\frac{1}{180}\mu a'^5+\frac{7}{360}\eta\theta a'^5$$
$$b = \frac{1}{24}\theta'a'^2+\frac{1}{40}\lambda'a'^3+\frac{1}{120}\mu'a'^4+\frac{1}{60}\eta\theta'a'^4$$
$$c = \frac{1}{120}\lambda''a'^2-\frac{2}{45}\eta^2a'^2+\frac{1}{180}\mu''a'^3-\frac{73}{1080}\eta\theta a'^3$$
$$e = \frac{1}{720}\mu'''a'^2-\frac{7}{360}\eta\theta'a'^2$$

$$b' = -\frac{1}{8}\eta a'-\frac{5}{24}\theta a'^2-\frac{8}{40}\lambda a'^3-\frac{2}{45}\eta^2a'^3-\frac{7}{360}\mu a'^4-\frac{47}{360}\eta\theta a'^4$$
$$c' = -\frac{1}{12}\theta'a'-\frac{7}{120}\lambda'a'^2-\frac{1}{45}\mu'a'^3-\frac{49}{540}\eta\theta'a'^3$$
$$e' = -\frac{1}{60}\lambda''a'-\frac{1}{45}\eta^2a'-\frac{1}{80}\mu''a'^2-\frac{1}{90}\eta\theta a'^2$$
$$f' = -\frac{1}{360}\mu'''a'-\frac{1}{60}\eta\theta'a'$$

$$i = \frac{1}{2}\eta a'+\frac{1}{3}\theta a'^2+\frac{1}{8}\lambda a'^3+\frac{1}{24}\eta^2a'^3+\frac{1}{30}\mu a'^4+\frac{17}{360}\eta\theta a'^4$$
$$l = \frac{1}{6}\theta'a'+\frac{1}{8}\lambda'a'^2+\frac{1}{20}\mu'a'^3+\frac{37}{720}\eta\theta'a'^3$$
$$m = \frac{1}{24}\lambda''a'+\frac{1}{24}\eta^2a'+\frac{1}{30}\mu''a'^2+\frac{13}{720}\eta\theta a'^2$$
$$n = \frac{1}{120}\mu'''a'+\frac{13}{360}\eta\theta'a'$$

Der Coefficient a' bleibt unbestimmt, und bildet die zum Integral der zweiten Differentialgleichung hinzuzufügende Constante. Nehmen wir

die oben eingeführte Bestimmung wieder auf, zufolge welcher der Werth von σ, welcher der Bedingung $\varphi = 0$, woraus $h = 0$ folgt, entspricht mit k bezeichnet werden soll, so bekommt man $a' = k$. Hiemit ist die Integration unserer Differentialgleichungen vollständig ausgeführt.

118.

Die Substitution der eben erhaltenen Werthe der Coefficienten a, b, etc. in die Ausdrücke für $\sigma \sin \varphi$, etc. giebt

$$\begin{aligned}
\sigma\sin\varphi = h &+ \tfrac{1}{6}\eta k^2h + \tfrac{1}{12}\theta k^3h + \left(\tfrac{1}{40}\lambda + \tfrac{7}{360}\eta^2\right)k^4h + \left(\tfrac{1}{180}\mu + \tfrac{7}{360}\eta\theta\right)k^5h \\
&+ \tfrac{1}{24}\theta' k^2h^2 \qquad + \tfrac{1}{40}\lambda' k^3h^2 + \left(\tfrac{1}{120}\mu' + \tfrac{1}{60}\eta\theta'\right)k^4h^2 \\
&+ \left(\tfrac{1}{120}\lambda'' - \tfrac{2}{45}\eta^2\right)k^2h^3 + \left(\tfrac{1}{180}\mu'' - \tfrac{73}{1080}\eta\theta\right)k^3h^3 \\
&+ \left(\tfrac{1}{720}\mu''' - \tfrac{7}{360}\eta\theta'\right)k^2h^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma\cos\varphi = k &- \tfrac{1}{3}\eta kh^2 - \tfrac{5}{24}\theta k^2h^2 - \left(\tfrac{3}{40}\lambda + \tfrac{2}{45}\eta^2\right)k^3h^2 - \left(\tfrac{7}{360}\mu + \tfrac{17}{360}\eta\theta\right)k^4h^2 \\
&- \tfrac{1}{12}\theta' kh^3 \qquad - \tfrac{7}{120}\lambda' k^2h^3 - \left(\tfrac{1}{45}\mu' + \tfrac{19}{540}\eta\theta'\right)k^3h^3 \\
&- \left(\tfrac{1}{60}\lambda'' + \tfrac{1}{45}\eta^2\right)kh^4 - \left(\tfrac{1}{80}\mu'' + \tfrac{1}{90}\eta\theta\right)k^2h^4 \\
&- \left(\tfrac{1}{360}\mu''' + \tfrac{1}{60}\eta\theta'\right)k\,h^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma\sin\psi = k &+ \tfrac{1}{6}\eta kh^2 + \tfrac{1}{8}\theta k^2h^2 + \left(\tfrac{1}{20}\lambda - \tfrac{2}{45}\eta^2\right)k^3h^2 + \left(\tfrac{1}{72}\mu - \tfrac{5}{72}\eta\theta\right)k^4h^2 \\
&+ \tfrac{1}{12}\theta' kh^3 \qquad + \tfrac{1}{15}\lambda' k^2h^3 + \left(\tfrac{1}{36}\mu' - \tfrac{1}{54}\eta\theta'\right)k^3h^3 \\
&+ \left(\tfrac{1}{40}\lambda'' + \tfrac{7}{360}\eta^2\right)kh^4 + \left(\tfrac{1}{48}\mu'' + \tfrac{1}{144}\eta\theta\right)k^2h^4 \\
&+ \left(\tfrac{1}{180}\mu''' + \tfrac{7}{360}\eta\theta'\right)k\,k^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma\cos\psi = h &- \tfrac{1}{3}\eta k^2h - \tfrac{1}{4}\theta k^3h - \left(\tfrac{1}{10}\lambda + \tfrac{1}{45}\eta^2\right)k^4h - \left(\tfrac{1}{36}\mu + \tfrac{1}{36}\eta\theta\right)k^5h \\
&- \tfrac{1}{8}\theta' k^2h^2 \qquad - \tfrac{1}{10}\lambda' k^3h^2 - \left(\tfrac{1}{24}\mu' + \tfrac{5}{144}\eta\theta'\right)k^4h^2 \\
&- \left(\tfrac{1}{30}\lambda'' + \tfrac{2}{45}\eta^2\right)k^2h^3 - \left(\tfrac{1}{36}\mu'' + \tfrac{1}{27}\eta\theta\right)k^3h^3 \\
&- \left(\tfrac{1}{144}\mu''' + \tfrac{1}{24}\eta\theta'\right\} k^2h^4
\end{aligned}$$

$$\sigma^2 = k^2 + h^2 - \tfrac{1}{8}\eta k^2h^2 - \tfrac{1}{4}\theta k^3h^2 - \left(\tfrac{1}{10}\lambda + \tfrac{1}{45}\eta^2\right)k^4h^2 - \left(\tfrac{1}{36}\mu + \tfrac{1}{36}\eta\theta\right)k^5h^2$$
$$- \tfrac{1}{12}\theta' k^2h^3 \qquad - \tfrac{1}{15}\lambda' k^3h^3 - \left(\tfrac{1}{36}\mu' + \tfrac{5}{216}\eta\theta'\right)k^4h^3$$
$$-\left(\tfrac{1}{60}\lambda'' + \tfrac{1}{45}\eta^2\right)k^2h^4 - \left(\tfrac{1}{72}\mu'' + \tfrac{1}{54}\eta\theta\right)k^3h^4$$
$$-\left(\tfrac{1}{360}\mu''' + \tfrac{1}{60}\eta\theta'\right)k^2h^5$$

$$\varphi + \psi = 90^0 + \tfrac{1}{2}\eta kh + \tfrac{1}{3}\theta k^2h + \left(\tfrac{1}{8}\lambda + \tfrac{1}{24}\eta^2\right)k^3h + \left(\tfrac{1}{30}\mu + \tfrac{47}{360}\eta\theta\right)k^4h$$
$$+ \tfrac{1}{6}\theta' kh^2 \qquad + \tfrac{1}{8}\lambda' k^2h^2 + \left(\tfrac{1}{20}\mu' + \tfrac{37}{720}\eta\theta'\right)k^3h^2$$
$$+\left(\tfrac{1}{24}\lambda'' + \tfrac{1}{24}\eta^2\right)kh^3 + \left(\tfrac{1}{30}\mu'' + \tfrac{13}{720}\eta\theta\right)k^2h^3$$
$$+\left(\tfrac{1}{120}\mu''' + \tfrac{13}{360}\eta\theta'\right)k\,h^4$$

Ich bemerke hiezu, dass σ, k, h hier dasselbe bedeuten, was bez. r, p, q bei Gauss.

119.

Die Fläche unseres sphäroidischen Dreiecks lässt sich leicht durch k und h ausdrücken, und die Ausdehnung, die den vorhergehenden Entwickelungen gegeben worden ist, erlaubt sie bis auf Grössen achter Ordnung zu erhalten; die Glieder der siebenten Ordnung sollen jedoch hier übergangen werden, da sie in den Anwendungen, die weiter unten vorkommen werden, wegfallen.

Da die Linearelemente der rechten Seite der Differentialgleichung (113), nemlich $d\sigma$ und $md\varphi$, einander immer unter einem rechten Winkel schneiden, so ist das Flächenelement auf unserer Oberfläche durch den Ausdruck $md\varphi d\sigma$ gegeben, und wenden wir diesen auf unser rechtwinkliches sphäroidisches Dreieck an, dessen Fläche mit F bezeichnet werden soll, so wird

$$F = \int d\varphi \int md\sigma$$

Multiplicirt man den Ausdruck (126) für m mit $d\sigma$ und integrirt in Bezug auf σ allein, so bekommt man mit Weglassung der Glieder siebenter Ordnung

$$\int md\sigma = \sigma^2\left\{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{24}\eta\sigma^2 - \tfrac{1}{60}\theta\sigma^3\cos\varphi - \tfrac{1}{60}\theta'\sigma^3\sin\varphi\right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{240}\lambda\sigma^4\cos^2\varphi - \tfrac{1}{120}\lambda'\sigma^4\sin\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{240}\lambda''\sigma^4\sin^2\varphi + \tfrac{1}{720}\eta^2\sigma^4\right\}$$

wo die Integrationsconstante Null ist, da das Integral für $\sigma = 0$ verschwinden muss. Das Produkt dieses Integrals mit $d\varphi$ drückt die unendlich kleine Fläche aus, die zwischen den, irgend welchen Werthen von φ und $\varphi + d\varphi$ zukommenden, Linien σ enthalten ist, und das Integral dieses Produkts giebt die endliche Fläche des Dreiecks. Da bei dieser zweiten Integration beides σ und φ als veränderlich zu betrachten sind, so müsste σ durch φ ausgedrückt werden, einfacher ist es jedoch beide Veränderliche vermittelst der Reihen des vor. Art. durch h auszudrücken. Man bekommt dadurch

$$\begin{aligned}\int m\,d\sigma = \sigma^2 \Big\{ & \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{24}\eta k^2 - \tfrac{1}{60}\theta k^3 - \left(\tfrac{1}{240}\lambda - \tfrac{1}{720}\eta^2\right)k^4 \\ & - \tfrac{1}{24}\eta h^2 - \tfrac{1}{60}\theta' k^2 h - \tfrac{1}{120}\lambda' k^3 h \\ & - \tfrac{1}{60}\theta k h^2 - \left(\tfrac{1}{240}\lambda + \tfrac{1}{240}\lambda'' - \tfrac{1}{60}\eta^2\right)k^2 h^2 \\ & - \tfrac{1}{60}\theta' h^3 - \tfrac{1}{120}\lambda' k h^3 \\ & - \left(\tfrac{1}{240}\lambda'' - \tfrac{1}{720}\eta^2\right)h^4 \Big\}\end{aligned}$$

Die Gleichung (127) giebt ausserdem

$$\begin{aligned}\sigma^2 d\varphi = dh \Big\{ & k + \tfrac{1}{6}\eta k^3 + \tfrac{1}{12}\theta k^4 + \left(\tfrac{1}{40}\lambda + \tfrac{7}{360}\eta^2\right)k^5 \\ & + \tfrac{1}{3}\eta k h^2 + \tfrac{1}{12}\theta' k^3 h + \tfrac{1}{20}\lambda' k^4 h \\ & + \tfrac{5}{24}\theta k^2 h^2 + \left(\tfrac{3}{40}\lambda + \tfrac{1}{40}\lambda'' - \tfrac{1}{30}\eta^2\right)k^3 h^2 \\ & + \tfrac{1}{6}\theta' k h^3 + \tfrac{7}{60}\lambda' k^2 h^3 \\ & + \left(\tfrac{1}{20}\lambda'' + \tfrac{1}{45}\eta^2\right)k h^4 \Big\}\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese beiden Ausdrücke mit einander, und integrirt wieder, so entsteht

$$\begin{aligned}F = \; & \tfrac{1}{2}kh + \tfrac{1}{24}\eta k^3 h + \tfrac{1}{40}\theta k^4 h + \left(\tfrac{1}{120}\lambda + \tfrac{1}{240}\eta^2\right)k^5 h \\ & + \tfrac{1}{24}\eta k h^3 + \tfrac{1}{80}\theta' k^3 h^2 + \tfrac{1}{120}\lambda' k^4 h^2 \\ & + \tfrac{7}{240}\theta k^2 h^3 + \left(\tfrac{1}{90}\lambda + \tfrac{1}{360}\lambda'' - \tfrac{1}{144}\eta^2\right)k^3 h^3 \\ & + \tfrac{1}{60}\theta' k h^4 + \tfrac{1}{80}\lambda' k^2 h^4 \\ & + \left(\tfrac{1}{240}\lambda'' + \tfrac{1}{240}\eta^2\right)k h^5\end{aligned}$$

wo wieder die Integrationsconstante Null ist, da die Fläche F für $h = 0$ verschwinden muss.

120.

Ausser dem bisher betrachteten rechtwinklichen sphäroidischen Dreieck, dessen Seiten und gegenüber liegenden Winkel

$$\begin{array}{ccc} \sigma\,, & k\,, & h \\ 90^0\,, & \psi\,, & \varphi \end{array}$$

sind, soll jetzt ein zweites betrachtet werden, dessen Stücke die folgenden sind,

$$\begin{array}{ccc} \sigma'\,, & k\,, & h' \\ 90^0\,, & \psi'\,, & \varphi' \end{array}$$

welches also aus dem vorhergehenden durch blose Vertauschung von σ mit σ', h mit h', ψ mit ψ', φ mit φ' entsteht. Die Fläche dieses Dreiecks soll mit F' bezeichnet werden. Es versteht sich nun von selbst, dass alle im Vorhergehenden für jenes Dreieck abgeleiteten Relationen auch auf dieses angewandt werden können, wenn man in denselben die angeführten Vertauschungen einführt. Durch den Unterschied dieser beiden rechtwinklichen Dreiecke wird ein allgemeines sphäroidisches Dreieck gebildet, dessen Seiten und gegenüber liegenden Winkel

$$\begin{array}{ccc} \sigma\,, & \sigma'\,, & h-h' \\ 180-\psi'\,, & \psi\,, & \varphi-\varphi' \end{array}$$

sind. Um hiefür einfache Bezeichnungen einzuführen sollen im Folgenden dessen Seiten mit a, b, c, und dessen Winkel mit A, B, C bezeichnet werden, und zwar so dass

$$\begin{array}{lll} a=h-h'\,, & b=\sigma'\,, & c=\sigma \\ A=\varphi-\varphi'\,, & B=\psi\,, & C=180^0-\psi' \end{array}$$

werden. Nennt man ferner die Fläche dieses allgemeinen sphäroidischen Dreiecks Δ, so hat diese

$$\Delta = F - F'$$

zum Ausdruck.

121.

Der Ausdruck für Δ ergiebt sich nun zuerst aus dem Ausdruck des vorvor. Art. für F wie folgt,

$$\Delta = \tfrac{1}{2}k(h-h')\Big\{1+\tfrac{1}{12}\eta(k^2+h^2+hh'+h'^2)$$
$$+\tfrac{1}{120}\theta k(6k^2+7h^2+7hh'+7h'^2)$$
$$+\tfrac{1}{120}\theta'(3k^2(h+h')+4h^3+4h^2h'+4hh'^2+4h'^3)$$
$$+\tfrac{1}{180}\lambda k^2(3k^2+4h^2+4hh'+4h'^2)$$
$$+\tfrac{1}{120}\lambda' k(2k^2(h+h')+3h^3+3h^2h'+3hh'^2+3h'^3)$$
$$+\tfrac{1}{360}\lambda''(2k^2(h^2+hh'+h'^2)+3h^4+3h^3h'+3h^2h'^2+3hh'^3+3h'^4)$$
$$+\tfrac{1}{360}\eta^2(3k^4-5k^2(h^2+hh'+h'^2)+3h^4+3h^3h'+3h^2h'^2+3hh'^3+3h'^4)\Big\}$$

Aus der Reihe für $\sigma\sin\psi$ des Art. 118 und der Gleichung $a=h-h'$ bekommt man aber

$$k(h-h') = ac\sin B\Big\{1-\tfrac{1}{6}\eta h^2-\tfrac{1}{8}\theta kh^2-\tfrac{1}{12}\theta' h^3$$
$$-\tfrac{1}{20}\lambda k^2h^2-\tfrac{1}{15}\lambda' kh^3-\tfrac{1}{40}\lambda'' h^4$$
$$-\tfrac{1}{360}\eta^2(16k^2h^2+3h^4)\Big\}$$

und macht man hiemit $ac\sin B$ zum allgemeinen Factor des vorstehenden Ausdrucks für Δ, so wird dieser

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ac\sin B\Big\{1-\tfrac{1}{12}\eta(k^2-h^2+hh'+h'^2)$$
$$+\tfrac{1}{120}\theta k(6k^2-8h^2+7hh'+7h'^2)$$
$$+\tfrac{1}{120}\theta'(3k^2(h+h')-6h^3+4h^2h'+4hh'^2+4h'^3)$$
$$+\tfrac{1}{180}\lambda k^2(3k^2-5h^2+4hh'+4h'^2)$$
$$+\tfrac{1}{120}\lambda' k(2k^2(h+h')-5h^3+3h^2h'+3hh'^2+3h'^3)$$
$$+\tfrac{1}{360}\lambda''(2k^2(h^2+hh'+h'^2)-6h^4+3h^3h'+3h^2h'^2+3hh'^3+3h'^4)$$
$$+\tfrac{1}{360}\eta^2(3k^4+k^2(6h^2-5hh'-5h'^2)+h^4-2h^3h'-2h^2h'^2+3hh'^3+3h'^4)\Big\}$$

Man kann diesen Ausdruck durch die Einführung der Krümmungsmaasse, die den Dreiecksecken A, B, C angehören, und die bez. mit α, β, γ bezeichnet werden sollen, vereinfachen. Die Substitution der betreffenden Reihen des Art. 118 in den Ausdruck (125) giebt das Krümmungsmaass allgemein in Function von k und h, und es ist leicht einzusehen, dass dieser Ausdruck zugleich der Ausdruck von β ist, schreibt man in demselben h' statt h, so erhält man den Ausdruck für γ, und der für α ergiebt sich, wenn man in (125) $\sigma=0$ macht. Auf diese Weise entstehen

$$\alpha = \eta$$
$$\beta = \eta + \theta k + \theta' h + \tfrac{1}{2}\lambda k^2 + \lambda' kh + \tfrac{1}{2}\lambda'' h^2$$
$$+ \tfrac{1}{6}\mu k^3 + \tfrac{1}{2}\mu' k^2 h + \tfrac{1}{2}\mu'' k h^2 + \tfrac{1}{6}\mu''' h^3 - \tfrac{1}{2}\eta\theta k h^2 + \tfrac{1}{6}\eta\theta' k^2 h$$
$$\gamma = \eta + \theta k + \theta' h' + \tfrac{1}{2}\lambda k^2 + \lambda' kh' + \tfrac{1}{2}\lambda'' h'^2$$
$$+ \tfrac{1}{6}\mu k^3 + \tfrac{1}{2}\mu' k^2 h' + \tfrac{1}{2}\mu'' k h'^2 + \tfrac{1}{6}\mu''' h'^3 - \tfrac{1}{2}\eta\theta k h'^2 + \tfrac{1}{6}\eta\theta' k^2 h'$$

Man kann diese drei Gleichungen anwenden um die Coefficienten η, θ, θ' aus dem Ausdruck für Δ zu eliminiren, und löst man sie zu dem Ende in Bezug auf diese Grössen auf, und schreibt sogleich alle Glieder, die man bekommen kann, hin, obgleich die höchster Ordnung erst weiter unten gebraucht werden, so geben sie

$$(128)\begin{cases} \eta = \alpha \\ \theta k = -\alpha - \beta\frac{h'}{h-h'} + \gamma\frac{h}{h-h'} - \tfrac{1}{2}\lambda k^2 + \tfrac{1}{2}\lambda'' hh' \\ \qquad - \tfrac{1}{6}\mu k^3 + \tfrac{1}{2}\mu'' khh' + \tfrac{1}{6}\mu''' hh'(h+h') \\ \qquad + \tfrac{1}{3}\alpha^2 hh' + \tfrac{1}{3}\alpha\beta\frac{hh'^2}{h-h'} - \tfrac{1}{3}\alpha\gamma\frac{h^2h'}{h-h'} \\ \theta' = \beta\frac{1}{h-h'} - \gamma\frac{1}{h-h'} - \lambda' k - \tfrac{1}{2}\lambda''(h+h') \\ \qquad - \tfrac{1}{2}\mu' k^2 - \tfrac{1}{2}\mu'' k(h+h') - \tfrac{1}{6}\mu'''(h^2+hh'+h'^2) \\ \qquad - \tfrac{1}{3}\alpha^2(h+h') - \tfrac{1}{6}\alpha\beta\frac{k^2+2hh'+3h'^2}{h-h'} + \tfrac{1}{6}\alpha\gamma\frac{k^2+2h^2+2hh'}{h-h'} \end{cases}$$

Da im obigen Ausdruck von Δ die Glieder siebenter Ordnung übergangen sind, so müssen hier bei der Elimination von η, θ, θ' in den vorstehenden Ausdrücken dieser Grössen auch die entsprechenden Glieder, und zwar die mit μ, μ', etc. α^2, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ multiplicirten übergangen werden. Die Elimination giebt in Folge dieser Bemerkung

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ac\sin B\Big\{1 + \tfrac{\alpha}{120}(4k^2 - 2h^2 + 3hh' + 3h'^2)$$
$$+ \tfrac{\beta}{120}(3k^2 - 6h^2 + 6hh' + 3h'^2)$$
$$+ \tfrac{\gamma}{120}(3k^2 - 2h^2 + hh' + 4h'^2)$$
$$- \tfrac{\lambda k^2}{720}(6k^2 - 4h^2 + 5hh' + 5h'^2)$$
$$- \tfrac{\lambda' k}{120}(k^2(h+h') - h^3 + h^2h' + hh'^2 + h'^3)$$
$$- \tfrac{\lambda''}{720}(k^2(5h^2 - 4hh' + 5h'^2) - 6h^4 + 12h^3h' - 3h^2h'^2 - 3hh'^3 + 6h'^4)$$
$$+ \tfrac{\eta^2}{360}(3k^4 + k^2(6h^2 - 5hh' - 5h'^2) + h^4 - 2h^3h' - 2h^2h'^2 + 3hh'^3 + 3h'^4)\Big\}$$

Man kann noch einen Schritt weiter gehen, und k, h, h' durch die Dreiecksseiten a und c und den Winkel B ausdrücken. Zu diesem Zweck bekommt man leicht aus den Reihen für $\sigma \sin\psi$ und $\sigma\cos\psi$ des Art. 118

$$\left.\begin{aligned} k &= c\sin B \qquad - \tfrac{1}{6}\eta c^3 \sin B \cos{}^2B \\ h &= c\cos B \qquad + \tfrac{1}{8}\eta c^3 \sin{}^2B \cos B \\ h' &= c\cos B - a + \tfrac{1}{8}\eta c^3 \sin{}^2B\cos B \end{aligned}\right\} \quad . \quad (129)$$

Bei der Substitution dieser Ausdrücke entstehen Glieder, die mit $\alpha\eta$, $\beta\eta$, $\gamma\eta$ multiplicirt sind, in welchen aber aus demselben Grunde wie oben

$$\alpha = \beta = \gamma = \eta$$

gesetzt werden muss. Denn da α, β, γ nur um Grössen erster Ordnung von einander verschieden sind, so würden durch die Nichtberücksichtigung dieser Gleichungen Glieder siebenter Ordnung mit in das Resultat der Elimination hinein gezogen werden, die nichts bedeuten können, weil die übrigen Glieder derselben Ordnung übergangen sind. Die Substitution der (129) giebt nun

$$\begin{aligned} \Delta = \tfrac{1}{2}ac\sin B \Big\{ 1 &+ \tfrac{\alpha}{120}(3a^2 - 9ac\cos B + 4c^2) \\ &+ \tfrac{\beta}{120}(3a^2 - 12ac\cos B + 3c^2) \\ &+ \tfrac{\gamma}{120}(4a^2 - 9ac\cos B + 3c^2) \\ &+ \tfrac{\eta^2}{360}(3a^4 - 5a^2c^2 + 3c^4 - 15ab^2c\cos B) + l \Big\} \end{aligned}$$

wenn die Summe der im vorhergehenden Ausdruck für Δ mit λ, λ', λ'' multiplicirten Glieder, die weiter unten nicht gebraucht werden, mit l bezeichnet wird. Alle vorstehenden Ausdrücke für Δ sind bis auf Grössen der siebenten Ordnung richtig, und ausser dem letzten würde man noch zwei andere erhalten können, deren einer vom Winkel A, und deren anderer vom Winkel C abhängen würde; ich halte indess für überflüssig diese beiden Ausdrücke hier abzuleiten, um so mehr, da wir sie weiter unten auf einfachere Art werden erhalten können.

122.

Die Summe der Winkel unsers allgemeinen sphäroidischen Dreiecks kann auf ähnliche Weise ausgedrückt werden. Die Reihe für $\varphi + \psi$ des

Art. 118 wird auch durch die Verwandelung von h in h' auf das zweite im vorvor. Art. betrachtete, rechtwinkliche sphäroidische Dreieck bezogen, und die linke Seite derselben geht zugleich in $\varphi'+\psi'$ über. Zieht man den Ausdruck dieser Grösse von dem der vorher erwähnten ab, so wird die rechte Seite des Unterschiedes der Ausdruck von

$$(\varphi-\varphi')+\psi-\psi' = 180^0+A+B+C$$

und wir bekommen daher sogleich für die Summe der Winkel des allgemeinen sphäroidischen Dreiecks den Ausdruck

$$\begin{aligned}A+B+C = 180^0+k(h-h')\Big\{&\tfrac{1}{2}\eta+\tfrac{1}{3}\theta k+\tfrac{1}{6}\theta'(h+h')\\
&+\tfrac{1}{8}\lambda k^2+\tfrac{1}{8}\lambda' k(h+h')+\tfrac{1}{24}\lambda''(h^2+hh'+h'^2)\\
&+\tfrac{1}{30}\mu k^3+\tfrac{1}{20}\mu' k^2(h+h')+\tfrac{1}{30}\mu'' k(h^2+hh'+h'^2)\\
&\qquad+\tfrac{1}{120}\mu'''(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3)\\
&+\tfrac{1}{24}\eta^2(k^2+h^2+hh'+h'^2)\\
&+\tfrac{1}{720}\eta\theta k(34k^2+13(h^2+hh'+h'^2))\\
&+\tfrac{1}{720}\eta\theta'(37k^2(h+h')+26(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3))\Big\}\end{aligned}$$

Führt man hierin zuerst die Dreiecksfläche durch die Gleichung

$$\begin{aligned}(130)\quad k(h-h') = 2\Delta\Big\{&1-\tfrac{1}{12}\eta(k^2+h^2+hh'+h'^2)\\
&-\tfrac{1}{120}\theta k(6k^2+7(h^2+hh'+h'^2))\\
&-\tfrac{1}{120}\theta'(3k^2(h+h')+4(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3))\Big\}\end{aligned}$$

ein, die leicht aus dem Vorhergehenden folgt, so wird

$$\begin{aligned}A+B+C = 180^0+\Delta\Big\{&\eta+\tfrac{2}{3}\theta k+\tfrac{1}{3}\theta'(h+h')\\
&+\tfrac{1}{4}\lambda k^2+\tfrac{1}{4}\lambda' k(h+h')+\tfrac{1}{12}\lambda''(h^2+hh'+h'^2)\\
&+\tfrac{1}{15}\mu k^3+\tfrac{1}{10}\mu' k^2(h+h')+\tfrac{1}{15}\mu'' k(h^2+hh'+h'^2)\\
&\qquad+\tfrac{1}{60}\mu'''(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3)\\
&-\tfrac{1}{90}\eta\theta k(k^2+7(h^2+hh'+h'^2))\\
&+\tfrac{1}{180}\eta\theta'(9k^2(h+h')+2h^3-3h^2h'-3hh'^2+2h'^3)\Big\}\end{aligned}$$

und eliminirt man hieraus η, θ, θ' durch die (128), deren Glieder hier Alle in Betracht kommen, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
A+B+C = 180^0 &+ \frac{\Delta}{3}(\alpha+\beta+\gamma) \\
&+ \frac{\Delta\alpha^2}{90}(k^2-3h^2+7hh'-3h'^2) \\
&- \frac{\Delta\alpha\beta}{180}(k^2-2h^2+7hh'-4h'^2) \\
&- \frac{\Delta\alpha\gamma}{180}(k^2-4h^2+7hh'-2h'^2) \\
&- \frac{\Delta}{12}\{\lambda k^2+\lambda' k(h+h')+\lambda''(h^2+hh'+h'^2)\} \\
&- \frac{\Delta}{180}\{8\mu k^3+12\mu' k^2(h+h')+6\mu'' k(3h^2-2hh'+3h'^2) \\
&\qquad +\mu'''(7h^3-3h^2h'-3hh'^2+7h'^3)\}
\end{aligned}$$

Wendet man endlich die (129) an, um die Dreiecksstücke a, c, B einzuführen, wobei hier nur die Glieder erster Ordnung derselben in Betracht kommen, so bekommt man

$$\begin{aligned}
A+B+C = 180^0 &+ \frac{\Delta}{3}(\alpha+\beta+\gamma) \\
&+ \frac{\Delta\alpha^2}{90}(c^2-ac\cos B-3a^2) \\
&- \frac{\Delta\alpha\beta}{180}(c^2+ac\cos B-4a^2) \\
&- \frac{\Delta\alpha\gamma}{180}(c^2-3ac\cos B-2a^2) \\
&- \frac{\Delta}{12}\{\mathit{\Lambda} c^2-\mathit{\Lambda}' ac+\mathit{\Lambda}'' a^2\} \\
&- \frac{\Delta}{180}\{8Mc^3-12M'ac^2+18M''a^2c-7M'''a^3\}
\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
\mathit{\Lambda} &= \lambda\sin^2 B+2\lambda'\sin B\cos B+\lambda''\cos^2 B \\
\mathit{\Lambda}' &= \lambda'\sin B+\lambda''\cos B \\
\mathit{\Lambda}'' &= \lambda'' \\
M &= \mu\sin^3 B+3\mu'\sin^2 B\cos B+3\mu''\sin B\cos^2 B+\mu'''\cos^3 B \\
M' &= \mu'\sin^2 B+2\mu''\sin B\cos B+\mu'''\cos^2 B \\
M'' &= \mu''\sin B+\mu'''\cos B \\
M''' &= \mu'''
\end{aligned}\right\} \quad (131)$$

gesetzt worden ist. Die vorstehenden Ausdrücke für die Summe der Winkel des allgemeinen sphäroidischen Dreiecks sind bis auf Grössen sechster Ordnung richtig.

123.

Vergleichen wir jetzt das bisher betrachtete sphäroidische Dreieck mit dem sphärischen, welches dieselben Seiten a, b, c, hingegen die Winkel $A+\delta A$, $B+\delta B$, $C+\delta C$ hat, und entwickeln die Ausdrücke für δA, δB, δC. Ich habe hier das sphärische, statt des von Gauss zur Vergleichung gewählten ebenen Dreiecks gesetzt, weil das Resultat dadurch eine grössere Allgemeinheit erhält, und die Vergleichung mit dem ebenen Dreieck als speciellen Fall in sich fasst, welcher einfach dadurch herbei geführt wird, dass man den Halbmesser der Kugel, auf welcher man sich das sphärische Dreieck verzeichnet denkt, unendlich gross macht. Dieser Halbmesser, welcher hier mit in Betracht kommt, und mit r bezeichnet werden soll, ist im Allgemeinen völlig willkührlich, und man kann ihn in den Anwendungen so bestimmen, dass die Ausdrücke möglichst einfach werden. Nehmen wir nun r in demselben Linearmaasse ausgedrückt an, wie die Dreiecksseiten a, b, c, dann erhalten wir aus der sphärischen Trigonometrie

$$\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos(A+\delta A) = \cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}$$

und setzt man hierin für die Sinusse und Cosinusse der Seiten die bekannten Reihen, die schon oben angewandt wurden, so giebt eine Entwickelung, die durchaus keine Schwierigkeiten hat,

$$(132)\quad\left\{\begin{aligned} bc\cos(A+\delta A) &= -\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}c^2+K\\ ac\cos(B+\delta B) &= \tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}c^2+L\\ ab\cos(C+\delta C) &= \tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}b^2-\tfrac{1}{2}c^2+M \end{aligned}\right.$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{aligned} K = {} & \frac{a^2}{24r^2}(a^2-2b^2-2c^2)+\frac{1}{24r^2}(b^2-c^2)^2\\ & -\frac{a^4}{720r^4}(a^2-5b^2-5c^2)-\frac{a^2}{720r^4}(7b^4+7c^4+10b^2c^2)+\frac{1}{240r^4}(b^2-c^2)^2(b^2+c^2)\\ L = {} & \frac{a^2}{24r^2}(a^2-2b^2-2c^2)+\frac{1}{24r^2}(b^2-c^2)^2\\ & +\frac{a^4}{720r^4}(3a^2-7b^2-3c^2)+\frac{a^2}{720r^4}(5b^4-3c^4-10b^2c^2)-\frac{1}{720r^4}(b^2-c^2)^2(b^2-3c^2)\\ M = {} & \frac{a^2}{24r^2}(a^2-2b^2-2c^2)+\frac{1}{24r^2}(b^2-c^2)^2\\ & +\frac{a^4}{720r^4}(3a^2-3b^2-7c^2)-\frac{a^2}{720r^4}(3b^4-5c^4+10b^2c^2)+\frac{1}{720r^4}(b^2-c^2)^2(3b^2-c^2) \end{aligned}$$

gesetzt worden ist. Diese drei Ausdrücke folgen durch Vertauschung der betreffenden Buchstaben aus einander, die weiteren Entwickelungen aber besitzen diese Eigenschaft, wenn man nicht neue, von der allgemeinen Oberfläche abhängige, Hülfsgrössen einführen will, nur in geringerem Maasse.

Zur weiteren Entwickelung der Functionen K, L, M brauchen wir ausser der Gleichung $a = h - h'$ nur die ersten Glieder von σ^2 und σ'^2, hier c^2 und b^2, des Art. 118, nemlich

$$b^2 = k^2 + h'^2 - \frac{1}{3}\eta k^2 h'^2 - \frac{1}{4}\theta k^3 h'^2 - \frac{1}{12}\theta' k^2 h'^3$$

$$c^2 = k^2 + h^2 - \frac{1}{3}\eta k^2 h^2 - \frac{1}{4}\theta k^3 h^2 - \frac{1}{12}\theta' k^2 h^3$$

diese geben leicht

$$a^2 - 2b^2 - 2c^2 = -4k^2 - (h+h')^2 + \frac{2}{3}\eta k^2(h^2+h'^2) + \frac{1}{2}\theta k^3(h^2+h'^2) + \frac{1}{6}\theta' k^2(h^3+h'^3)$$

$$(b^2-c^2)^2 = (h-h')^2\left\{(h+h')^2 - \frac{2}{3}\eta k^2(h+h')^2 - \frac{1}{2}\theta k^3(h+h')^2 - \frac{1}{6}\theta' k^2(h+h')(h^2+hh'+h'^2)\right\}$$

und folglich wird

$$a^2(a^2 - 2b^2 - 2c^2) + (b^2 - c^2)^2 = -4k^2(h-h')^2\left\{1 + \frac{1}{3}\eta hh' + \frac{1}{4}\theta khh' + \frac{1}{12}\theta'(h^2h' + hh'^2)\right\}$$

ferner wird mit ausreichender Genauigkeit

$$a^2 - 5b^2 - 5c^2 = -10k^2 - 4h^2 - 2hh' - 4h'^2$$

$$7b^4 + 7c^4 + 10b^2c^2 = 24k^4 + 24k^2(h^2+h'^2) + 7h^4 + 10h^2h'^2 + 7h'^4$$

$$b^2 + c^2 = 2k^2 + h^2 + h'^2$$

folglich

$$a^4(a^2 - 5b^2 - 5c^2) + a^2(7b^4 + 7c^4 + 10b^2c^2) - 3(b^2 - c^2)^2(b^2 + c^2) = 8k^2(h-h')^2(3k^2 + h^2 + hh' + h'^2)$$

Ferner

$$3a^2 - 7b^2 - 3c^2 = -10k^2 - 6hh' - 4h'^2$$

$$5b^4 - 3c^4 - 10b^2c^2 = -8k^4 - 16k^2h^2 - 3h^4 - 10h^2h'^2 + 5h'^4$$

$$b^2 - 3c^2 = -2k^2 - 3h^2 + h'^2$$

folglich

$$a^4(3a^2 - 7b^2 - 3c^2) + a^2(5b^4 - 3c^4 - 10b^2c^2) - (b^2 - c^2)^2(b^2 - 3c^2) = -8k^2(h-h')^2(k^2 + 3h^2 - 3hh' + h'^2)$$

Hiemit sind die Glieder entwickelt, aus welchen K und L bestehen, und

man erkennt leicht, dass sich die von M aus denen von L ergeben, wenn in diesen h und h' mit einander vertauscht werden. Aus diesem Grunde wird es überflüssig die Glieder, aus welchen M besteht, ausführlich hinzuschreiben. Stellt man jene zusammen, so erhält man

$$K = -k^2(h-h')^2\Big\{\frac{1}{72r^3}(12+4\eta hh'+30\theta khh'+\theta'(h^2h'+hh'^2)) + \frac{1}{90r^4}(3k^2+h^2+hh'+h'^2)\Big\}$$

$$L = -k^2(h-h')^2\Big\{\frac{1}{72r^3}(12+4\eta hh'+30\theta khh'+\theta'(h^2h'+hh'^2)) + \frac{1}{90r^4}(k^2+3h^2-3hh'+h'^2)\Big\}$$

Es ist zu bemerken, dass diese Functionen die Grundlage des Unterschiedes zwischen der Reduction des sphäroidischen Dreiecks auf das sphärische, und der Reduction desselben auf das ebene Dreieck bilden. Denn macht man in denselben r unendlich gross, so werden sie Null, und in den noch zu entwickelnden Functionen wird r nicht vorkommen.

124.

Den eingeführten Bezeichnungen zufolge wird im sphäroidischen Dreieck

$$bc\cos A = \sigma\cos\varphi\,.\,\sigma'\cos\varphi' + \sigma\sin\varphi\,.\,\sigma'\sin\varphi'$$

Da ferner aus demselben Grunde die erste Gleichung (132)

$$bc\cos(A+\delta A) = -\tfrac{1}{2}(h-h')^2 + \tfrac{1}{2}\sigma^2 + \tfrac{1}{2}\sigma'^2 + K$$

giebt, so bekommt man leicht

$$bc(\cos A - \cos(A+\delta A))$$
$$= \tfrac{1}{2}(h-h')^2 - \tfrac{1}{2}(\sigma\cos\varphi - \sigma'\cos\varphi')^2 - \tfrac{1}{2}(\sigma\sin\varphi - \sigma'\sin\varphi')^2 - K$$

Ferner ist

$$ac\cos B = (h-h')\,\sigma\cos\psi$$
$$ab\cos C = -(h-h')\,\sigma'\cos\psi'$$

und die zweite und dritte der Gleichungen (132) werden

$$ac\cos(B+\delta B) = \tfrac{1}{2}(h-h')^2 + \tfrac{1}{2}\sigma^2 - \tfrac{1}{2}\sigma'^2 + L$$
$$ab\cos(C+\delta C) = \tfrac{1}{2}(h-h')^2 - \tfrac{1}{2}\sigma^2 + \tfrac{1}{2}\sigma'^2 + M$$

woraus

$$ac(\cos B - \cos(B+\delta B)) = -\tfrac{1}{2}(h-h')^2 + (h-h')\sigma\cos\psi - \tfrac{1}{2}(\sigma^2-\sigma'^2) - L$$

$$ab(\cos C - \cos(C+\delta C)) = -\tfrac{1}{2}(h-h')^2 - (h-h')\sigma'\cos\psi' + \tfrac{1}{2}(\sigma^2-\sigma'^2) - M$$

folgen. Man erkennt hieraus, dass δC aus δB vollständig durch Vertauschung von h und h' mit einander erhalten wird, weshalb im Folgenden nur die Entwickelungen von δA und δB vorgenommen zu werden brauchen.

125.

Die Reihen des Art. 118 geben bis auf Grössen der achten Ordnung

$$(\sigma\cos\varphi - \sigma'\cos\varphi')^2$$
$$= k^2(h-h')^2\left\{\tfrac{1}{9}\eta^2(h+h')^2 + \tfrac{5}{36}\eta\theta k(h+h')^2 + \tfrac{1}{18}\eta\theta'(h+h')(h^2+hh'+h'^2)\right\}$$

$$\begin{aligned}(\sigma\sin\varphi - \sigma'\sin\varphi')^2 = (h-h')^2\Big\{1 &+ \tfrac{1}{3}\eta k^2 + \tfrac{1}{12}(2\theta k^3 + \theta' k(h+h'))\\
&+ \tfrac{1}{60}(3\lambda k^4 + 3\lambda' k^3(h+h') + \lambda'' k^2(h^2+hh'+h'^2))\\
&+ \tfrac{1}{360}(4\mu k^5 + 6\mu' k^4(h+h') + 4\mu'' k^3(h^2+hh'+h'^2)\\
&\qquad + \mu''' k^2(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3))\\
&+ \tfrac{1}{45}\eta^2(3k^4 - 4k^2(h^2+hh'+h'^2))\\
&+ \tfrac{1}{540}\eta\theta k(36k^4 - 73k^2(h^2+hh'+h'^2))\\
&+ \tfrac{1}{360}\eta\theta'(17k^4(h+h') - 14k^2(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3))\Big\}\end{aligned}$$

woraus sich ohne Mühe

$$\begin{aligned}bc(\cos A - \cos(A+\delta A)) = -\tfrac{1}{2}k^2(h-h')^2\Big\{\tfrac{1}{3}\eta &+ \tfrac{1}{12}(2\theta k + \theta'(h+h'))\\
&+ \tfrac{1}{60}(3\lambda k^2 + 3\lambda' k(h+h') + \lambda''(h^2+hh'+h'^2))\\
&+ \tfrac{1}{360}(4\mu k^3 + 6\mu' k^2(h+h') + 4\mu'' k(h^2+hh'+h'^2)\\
&\qquad + \mu'''(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3))\\
&+ \tfrac{1}{45}\eta^2(3k^2 + h^2 + 6hh' + h'^2)\\
&+ \tfrac{1}{540}\eta\theta k(36k^2 + 2h^2 + 77hh' + 2h'^2)\\
&+ \tfrac{1}{360}\eta\theta'(17k^2(h+h') + 6h^3 + 26h^2h' + 26hh'^2 + 6h'^3)\Big\}\\
&- K\end{aligned}$$

ergiebt. Man bekommt ferner aus den Reihen des angezogenen Artikels

$$2(h-h')\sigma\cos\psi-(\sigma^2-\sigma'^2)$$

$$=(h-h')^2\Big\{1-\tfrac{1}{8}\eta k^2-\tfrac{1}{12}(3\theta k^3+\theta' k^2(2h+h'))$$
$$-\tfrac{1}{60}(6\lambda k^4+4\lambda' k^3(2h+h')+\lambda'' k^2(3h^2+2hh'+h'^2))$$
$$-\tfrac{1}{360}(10\mu k^5+10\mu' k^4(2h+h')+5\mu'' k^3(3h^2+2hh'+h'^2)$$
$$+\mu''' k^2(4h^3+3h^2h'+2hh'^2+h'^3))$$
$$-\tfrac{1}{45}\eta^2(k^4+k^2(3h^2+2hh'+h'^2))$$
$$-\tfrac{1}{108}\eta\theta k(3k^4+2k^2(3h^2+2hh'+h'^2))$$
$$-\tfrac{1}{1080}\eta\theta'(25k^4(2h+h')+18k^2(4h^3+3h^2h'+2hh'^2+h'^3))\Big\}$$

und hieraus

$$ac(\cos B-\cos(B+\delta B))$$

$$=-\tfrac{1}{2}k^2(h-h')^2\Big\{\tfrac{1}{8}\eta+\tfrac{1}{12}(3\theta k+\theta'(2h+h'))$$
$$+\tfrac{1}{60}(6\lambda k^2+4\lambda' k(2h+h')+\lambda''(3h^2+2hh'+h'^2))$$
$$+\tfrac{1}{360}(10\mu k^3+10\mu' k^2(2h+h')+5\mu'' k(3h^2+2hh'+h'^2)$$
$$+\mu'''(4h^3+3h^2h'+2hh'^2+h'^3))$$
$$+\tfrac{1}{45}\eta^2(k^2+3h^2+2hh'+h'^2)$$
$$+\tfrac{1}{108}\eta\theta k(3k^2+6h^2+4hh'+2h'^2)$$
$$+\tfrac{1}{1080}\eta\theta'(25k^2(2h+h')+72h^3+54h^2h'+36hh'^2+18h'^3)\Big\}-L$$

Es ist ferner

$$bc\sin A=\sigma\sin\varphi.\,\sigma'\cos\varphi'-\sigma\cos\varphi.\,\sigma'\sin\varphi'$$
$$ac\sin B=(h-h')\,\sigma\sin\psi$$

oder, nach der Substitution der Reihen, mit ausreichender Genauigkeit,

$$bc\sin A=k(h-h')\Big\{1+\tfrac{1}{6}\eta(k^2+2hh')$$
$$+\tfrac{1}{24}\theta k(2k^2+5hh')+\tfrac{1}{24}\theta'(k^2(h+h')+2h^2h'+2hh'^2)\Big\}$$

$$ac\sin B=k(h-h')\Big\{1+\tfrac{1}{6}\eta h^2+\tfrac{1}{8}\theta kh^2+\tfrac{1}{12}\theta' h^3\Big\}$$

womit alle zur Erlangung von δA und δB erforderlichen Ausdrücke entwickelt sind, und nur noch mit einander combinirt zu werden brauchen.

126.

Durch Divisionen und Substitutionen der Ausdrücke von K und L ergiebt sich aus den Ausdrücken des vor. Art. zuerst

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos A - \cos(A+\delta A)}{\sin A} \\
&= -\frac{1}{2}k(h-h')\Big\{\frac{1}{3}\eta + \frac{1}{12}(2\theta k + \theta'(h+h')) - \frac{1}{3r^2} \\
&\quad + \frac{1}{90}\eta^2(k^2+2h^2+2hh'+2h'^2) + \frac{1}{18r^2}\eta k^2 \\
&\quad + \frac{1}{1080}\eta\theta k(12k^2+4h^2+19hh'+4h'^2) + \frac{1}{72r^2}\theta k(2k^2-hh') \\
&\quad + \frac{1}{360}\eta\theta'(7k^2(h+h')+6h^3+6h^2h'+6hh'^2+6h'^3) + \frac{1}{72r^2}\theta' k^2(h+h') \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{45r^4}(3k^2+h^2+hh'+h'^2) \\
&\quad + \frac{1}{60}(3\lambda k^2 + 3\lambda' k(h+h') + \lambda''(h^2+hh'+h'^2)) \\
&\quad + \frac{1}{360}(4\mu k^3 + 6\mu' k^2(h+h') + 4\mu'' k(h^2+hh'+h'^2) + \mu'''(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3))\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos B - \cos(B+\delta B)}{\sin B} \\
&= -\frac{1}{2}k(h-h')\Big\{\frac{1}{3}\eta + \frac{1}{12}(3\theta k + \theta'(2h+h')) - \frac{1}{3r^2} \\
&\quad + \frac{1}{90}\eta^2(2k^2+h^2+4hh'+2h'^2) + \frac{1}{18r^2}\eta(h^2-2hh') \\
&\quad + \frac{1}{108}\eta\theta k(3k^2-3h^2+4hh'+2h'^2) + \frac{1}{24r^2}\theta k(h^2-2hh') \\
&\quad + \frac{1}{1080}\eta\theta'(25k^2(2h+h')+12h^3+39h^2h'+36hh'^2+18h'^3) + \frac{1}{36r^2}\theta'(h^3-h^2h'-hh'^2) \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{45r^4}(k^2+3h^2-3hh'+h'^2) \\
&\quad + \frac{1}{60}(6\lambda k^2 + 4\lambda' k(2h+h') + \lambda''(3h^2+2hh'+h'^2)) \\
&\quad + \frac{1}{360}(10\mu k^3 + 10\mu' k^2(2h+h') + 5\mu'' k(3h^2+2hh'+h'^2) \\
&\qquad\qquad + \mu'''(4h^3+3h^2h'+2hh'^2+h'^3))\Big\}
\end{aligned}
$$

Setzt man nun für einen Augenblick

$$\frac{\cos A - \cos(A+\delta A)}{\sin A} = p$$

so wird

$$\delta A = p - \frac{1}{2}p^2 \operatorname{cotg} A$$

und einen analogen Ausdruck bekommt man für δB. Der Art. 118 giebt aber mit hier ausreichender Genauigkeit

$$\operatorname{cotg} A = \frac{k^2 + hh'}{k(h-h')}\,; \quad \operatorname{cotg} B = \frac{h}{k}$$

und aus den vorstehenden Ausdrücken erhält man

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos A - \cos(A+\delta A)}{\sin A}\right)^2 = \tfrac{1}{4}k^2(h-h')^2\Big\{ & \tfrac{1}{9}\eta^2 - \tfrac{2}{9r^2}\eta \\ & + \tfrac{1}{9}\eta\theta k - \tfrac{1}{9r^2}\theta k \\ & + \tfrac{1}{18}\eta\theta'(h+h') - \tfrac{1}{18r^2}\theta'(h+h') + \tfrac{1}{9r^4}\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos B - \cos(B+\delta B)}{\sin B}\right)^2 = \tfrac{1}{4}k^2(h-h')^2\Big\{ & \tfrac{1}{9}\eta^2 - \tfrac{2}{9r^2}\eta \\ & + \tfrac{1}{6}\eta\theta k - \tfrac{1}{6r^2}\theta k \\ & + \tfrac{1}{18}\eta\theta'(2h+h') - \tfrac{1}{18r^2}\theta'(2h+h') + \tfrac{1}{9r^4}\Big\}\end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke so ergiebt sich leicht

$$\begin{aligned}\delta A = -\tfrac{1}{2}k(h-h')\Big\{ & \tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{1}{6}\theta k + \tfrac{1}{12}\theta'(h+h') - \tfrac{1}{3r^2} \\ & + \tfrac{\eta^2}{180}(7k^2 + 4h^2 + 9hh' + 4h'^2) - \tfrac{\eta}{18r^2}hh' \\ & + \tfrac{\eta\theta k}{1080}(42k^2 + 4h^2 + 49hh' + 4h'^2) - \tfrac{\theta k}{24r^2}hh' \\ & + \tfrac{\eta\theta'}{360}(12k^2(h+h') + 6h^3 + 11h^2h' + 11hh'^2 + 6h'^3) \\ & \quad - \tfrac{\theta'}{72r^2}(h^2h' + hh'^2) - \tfrac{1}{180r^4}(7k^2 + 4h^2 - hh' + 4h'^2) \\ & + \tfrac{1}{60}(3\lambda k^2 + 3\lambda' k(h+h') + \lambda''(h^2 + hh' + h'^2)) \\ & + \tfrac{1}{360}(4\mu k^3 + 6\mu' k^2(h+h') + 4\mu'' k(h^2 + hh' + h'^2) \\ & \qquad + \mu'''(h^3 + h^2h' + hh'^2 + h'^3))\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta B = -\tfrac{1}{2}k(h-h')\Big\{ & \tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{1}{4}\theta k + \tfrac{1}{12}\theta'(2h+h') - \tfrac{1}{3r^2} \\ & + \tfrac{\eta^2}{180}(4k^2 + 7h^3 + 3hh' + 4h'^2) - \tfrac{\eta}{18r^2}hh' \\ & + \tfrac{\eta\theta k}{216}(6k^2 + 3h^2 - hh' + 4h'^2) - \tfrac{\theta k}{24r^2}hh' \\ & + \tfrac{\eta\theta'}{1080}(25k^2(2h+h') + 42h^3 + 24h^2h' + 21hh'^2 + 18h'^3) \\ & \quad - \tfrac{\theta'}{72r^2}(h^2h' + hh'^2) - \tfrac{1}{180r^4}(4k^2 + 7h^2 - 7hh' + 4h'^2) \\ & + \tfrac{1}{60}(6\lambda k^2 + 4\lambda' k(2h+h') + \lambda''(3h^2 + 2hh' + h'^2)) \\ & + \tfrac{1}{360}(10\mu k^3 + 10\mu' k^2(2h+h') + 5\mu'' k(3h^2 + 2hh' + h'^2) \\ & \qquad + \mu'''(4h^3 + 3h^2h' + 2hh'^2 + h'^3))\Big\}\end{aligned}$$

die bis auf Grössen sechster Ordnung richtig sind, und womit die Aufgabe schon gelöst ist.

127.

Die eben erhaltene Auflösung unserer Aufgabe kann durch Einführung der Dreiecksfläche, der oben schon angewandten Krümmungsmaasse, und der Dreiecksseiten und Winkel vereinfacht werden. Die Anwendung der Gleichung (130) giebt

$$
\begin{aligned}
\delta A = -\Delta \Big\{ & \tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{1}{12}(2\theta k + \theta'(h+h')) - \tfrac{1}{3r^2} \\
& + \tfrac{\eta^2}{180}(2k^2 - h^2 + 4hh' - h'^2) + \tfrac{\eta}{36r^2}(k^2 + h^2 - hh' + h'^2) \\
& + \tfrac{\eta\theta k}{1080}(9k^2 - 32h^2 + 13hh' - 32h'^2) + \tfrac{\theta k}{360r^2}(6k^2 + 7h^2 - 8hh' + 7h'^2) \\
& + \tfrac{\eta\theta'}{720}(13k^2(h+h') - h^3 - 4h^2h' - 4hh'^2 - h'^3) \\
& \qquad + \tfrac{\theta'}{360r^2}(3k^2(h+h') + 4h^3 - h^2h' - hh'^2 + 4h'^3) \\
& \qquad - \tfrac{1}{180r^4}(7k^2 + 4h^2 - hh' + 4h'^2) \\
& + \tfrac{1}{60}(3\lambda k^2 + 3\lambda' k(h+h') + \lambda''(h^2 + hh' + h'^2)) \\
& + \tfrac{1}{360}(4\mu k^3 + 6\mu' k^2(h+h') + 4\mu'' k(h^2 + hh' + h'^2) \\
& \qquad + \mu'''(h^3 + h^2h' + hh'^2 + h'^3))\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta B = -\Delta \Big\{ & \tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{1}{12}(3\theta k + \theta'(2h+h')) - \tfrac{1}{3r^2} \\
& - \tfrac{\eta^2}{180}(k^2 - 2h^2 + 2hh' + h'^2) + \tfrac{\eta}{36r^2}(k^2 + h^2 - hh' + h'^2) \\
& - \tfrac{\eta\theta k}{2160}(21k^2 + 57h^2 + 97hh' + 47h'^2) + \tfrac{\theta k}{360r^2}(6k^2 + 7h^2 - 8hh' + 7h'^2) \\
& + \tfrac{\eta\theta'}{2160}(52k^2h + 17k^2h' + 30h^3 - 21hh'^2 - 27hh'^2 - 3h'^3) \\
& \qquad + \tfrac{\theta'}{360r^2}(3k^2(h+h') + 4h^3 - h^2h' - hh'^2 + 4h'^3) \\
& \qquad - \tfrac{1}{180r^4}(4k^2 + 7h^2 - 7hh' + 4h'^2) \\
& + \tfrac{1}{60}(6\lambda k^2 + 4\lambda' k(2h+h') + \lambda''(3h^2 + 2hh' + h'^2)) \\
& + \tfrac{1}{360}(10\mu k^3 + 10\mu' k^2(2h+h') + 5\mu'' k(3h^2 + 2hh' + h'^3) \\
& \qquad + \mu'''(4h^3 + 3h^2h' + 2hh'^2 + h'^3))\Big\}
\end{aligned}
$$

und führt man hierin die Krümmungsmaasse durch die Gleichungen (128) ein, so entstehen

$$\delta A = -\frac{\Delta}{12}\Big\{2\alpha+\beta+\gamma\Big\} + \frac{\Delta}{3r^2}$$

$$-\frac{\Delta\alpha^2}{1080}\Big\{3k^2-4h^2+11hh'-4h'^2\Big\} - \frac{\Delta\alpha}{360r^2}\Big\{4k^2+3h^2-2hh'+3h'^2\Big\}$$

$$-\frac{\Delta\alpha\beta}{2160}\Big\{9k^2-3h^2+13hh'-h'^2\Big\} - \frac{\Delta\beta}{360r^2}\Big\{3k^2+4h^2-4hh'+3h'^2\Big\}$$

$$-\frac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\Big\{9k^2-h^2+13hh'-3h'^2\Big\} - \frac{\Delta\gamma}{360r^2}\Big\{3k^2+3h^2-4hh'+4h'^2\Big\}$$

$$+\frac{\Delta}{480r^4}\Big\{7k^2+4h^2-hh'+4h'^2\Big\}$$

$$+\frac{\Delta}{120}\Big\{4\lambda k^2+4\lambda'k(h+h')+\lambda''(3h^2-2hh'+3h'^2)\Big\}$$

$$+\frac{\Delta}{360}\Big\{6\mu k^3+9\mu'k^2(h+h')+\mu''k(11h^2-4hh'+11h'^2)$$

$$+\mu'''(4h^3-h^2h'-hh'^2+4h'^3)\Big\}$$

$$\delta B = -\frac{\Delta}{12}\Big\{\alpha+2\beta+\gamma\Big\} + \frac{\Delta}{3r^2}$$

$$-\frac{\Delta\alpha^2}{2160}\Big\{9k^2-39h^2+73hh'-25h'^2\Big\} - \frac{\Delta\alpha}{360r^2}\Big\{4k^2+3h^2-2hh'+3h'^2\Big\}$$

$$+\frac{\Delta\alpha\beta}{2160}\Big\{8k^2-30h^2+54hh'-16h'^2\Big\} - \frac{\Delta\beta}{360r^2}\Big\{3k^2+4h^2-4hh'+3h'^2\Big\}$$

$$+\frac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\Big\{13k^2-33h^2+43hh'+3h'^2\Big\} - \frac{\Delta\gamma}{360r^2}\Big\{3k^2+3h^2-4hh'+4h'^2\Big\}$$

$$+\frac{\Delta}{480r^4}\Big\{4k^2+7h^2-7hh'+4h'^2\Big\}$$

$$+\frac{\Delta}{120}\Big\{3\lambda k^2+2\lambda'k(2h+h')+\lambda''(4h^2-4hh'+3h'^2)\Big\}$$

$$+\frac{\Delta}{360}\Big\{5\mu k^3+5\mu'k^2(2h+h')+\mu''k(15h^2-10hh'+10h'^2)$$

$$+\mu'''(6h^3-3h^2h'-2hh'^2+4h'^3)\Big\}$$

auch bis auf Grössen sechster Ordnung richtig. Wenn man nun in diesem Ausdruck von δB um δC zu erhalten, h und h' mit einander vertauscht, so müssen auch β und γ mit einander vertauscht werden.

128.

Führt man endlich in die eben erhaltenen Ausdrücke die Dreiecksstücke a, c, B ein, und schreibt auch den Ausdruck für δC hin, dann wird schliesslich

$$\begin{aligned}
\delta A = & -\frac{\Delta}{12}\left\{2\alpha+\beta+\gamma\right\} + \frac{\Delta}{3r^2} \\
& -\frac{\Delta\alpha^2}{1080}\left\{3c^2-3ac\cos B-4a^2\right\} - \frac{\Delta\alpha}{360r^2}\left\{4c^2-4ac\cos B+3a^2\right\} \\
& -\frac{\Delta\alpha\beta}{2160}\left\{9c^2-11ac\cos B-a^2\right\} - \frac{\Delta\beta}{360r^2}\left\{3c^2-2ac\cos B+3a^2\right\} \\
& -\frac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\left\{9c^2-7ac\cos B-3a^2\right\} - \frac{\Delta\gamma}{360r^2}\left\{3c^2-4ac\cos B+4a^2\right\} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{\Delta}{180r^4}\left\{7c^2-7ac\cos B+4a^2\right\} \\
& +\frac{\Delta}{120}\left\{4Ac^2-4A'ac+3A''a^2\right\} \\
& +\frac{\Delta}{360}\left\{6Mc^3-9M'ac^2+11M''a^2c-4M'''a^3\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta B = & -\frac{\Delta}{12}\left\{\alpha+2\beta+\gamma\right\} + \frac{\Delta}{3r^2} \\
& -\frac{\Delta\alpha^2}{2160}\left\{9c^2-23ac\cos B-25a^2\right\} - \frac{\Delta\alpha}{360r^2}\left\{4c^2-4ac\cos B+3a^2\right\} \\
& +\frac{\Delta\alpha\beta}{2160}\left\{8c^2-22ac\cos B-16a^2\right\} - \frac{\Delta\beta}{360r^2}\left\{3c^2-2ac\cos B+3a^2\right\} \\
& +\frac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\left\{13c^2-49ac\cos B+3a^2\right\} - \frac{\Delta\gamma}{360r^2}\left\{3c^2-4ac\cos B+4a^2\right\} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{\Delta}{180r^4}\left\{4c^2-ac\cos B+4a^2\right\} \\
& +\frac{\Delta}{120}\left\{3Ac^2-2A'ac+3A''a^2\right\} \\
& +\frac{\Delta}{360}\left\{5Mc^3-5M'ac^2+10M''a^2c-4M'''a^3\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta C = & -\frac{\Delta}{12}\left\{\alpha+\beta+2\gamma\right\} + \frac{\Delta}{3r^2} \\
& -\frac{\Delta\alpha^2}{2160}\left\{9c^3+5ac\cos B-39a^2\right\} - \frac{\Delta\alpha}{360r^2}\left\{4c^2-4ac\cos B+3a^2\right\} \\
& +\frac{\Delta\alpha\beta}{2160}\left\{13c^2+23ac\cos B-33a^2\right\} - \frac{\Delta\beta}{360r^2}\left\{3c^2-2ac\cos B+3a^2\right\} \\
& +\frac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\left\{8c^2+6ac\cos B-30a^2\right\} - \frac{\Delta\gamma}{360r^2}\left\{3c^2-4ac\cos B+4a^2\right\} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{\Delta}{180r^4}\left\{4c^2-7ac\cos B+7a^2\right\} \\
& +\frac{\Delta}{120}\left\{3Ac^2-4A'ac+4A''a^2\right\} \\
& +\frac{\Delta}{360}\left\{5Mc^3-10M'ac^2+15M''a^2c-6M'''a^3\right\}
\end{aligned}$$

die gleichwie die vorhergehenden Ausdrücke bis auf Grössen sechster Ordnung genau sind. Die hier angewandten Hülfsgrössen A, A', A'', M, M', M'', M''' sind dieselben, die durch die Gleichungen (131) eingeführt worden sind.

129.

Man kann mit wenig Mühe aus den vorstehenden Ausdrücken noch ein interessantes Resultat ziehen, nemlich eine Relation zwischen der Fläche des sphäroidischen, und der des sphärischen Dreiecks, auf welches jenes hingeführt worden ist. Sei die Fläche dieses sphärischen Dreiecks mit Δ' bezeichnet, dann ist

$$A + B + C + \delta A + \delta B + \delta C = 180^0 + \frac{\Delta'}{r^2}$$

setzt man in die linke Seite dieses Ausdrucks für die darin vorkommenden Grössen ihre aus den Artt. 122 und 128 zu entnehmenden Werthe, so erhält man sogleich

$$\begin{aligned}\Delta' = \Delta &- \frac{\Delta\alpha}{120}\left\{4c^2 - 4ac\cos B + 3a^2\right\} \\ &- \frac{\Delta\beta}{120}\left\{3c^2 - 2ac\cos B + 3a^2\right\} \\ &- \frac{\Delta\gamma}{120}\left\{3c^2 - 4ac\cos B + 4a^2\right\} \\ &+ \frac{\Delta}{12r^2}\left\{c^2 - ac\cos B + a^2\right\}\end{aligned}$$

welcher Ausdruck auch bis auf Grössen sechster Ordnung richtig ist. Da leicht im Voraus erkannt werden kann, dass im Unterschiede zwischen Δ' und Δ alle Glieder, die in den vorhergehenden, hiefür benutzten, Ausdrücken von r unabhängig sind, verschwinden müssen, und diese sich im vorstehenden Ausdruck in der That gegenseitig aufgehoben haben, so ist hiemit eine Controlle eines grossen Theils der vorhergehenden Entwickelungen erlangt. Da ferner der vorstehende Ausdruck, wenn man die Krümmungsmaasse α, β, γ einander gleich setzt, $\Delta' = \Delta$ werden muss, und dieses auch der Fall ist, so ist hiemit eine Controlle für einen anderen Theil der vorhergehenden Entwickelungen erlangt worden.

Wenn man in allen Gaussischen, sich auf die hier behandelte Aufgabe beziehenden, Ausdrücken statt der von ihm angewandten, und mit f^0, f', f'', g^0, g', h^0 bezeichneten Coefficienten die hier angewandten und mit η, θ, θ' λ, λ', λ'' bezeichneten Coefficienten einführt*), so wird

*) Die hiefür anzuwendenden Relationen sind:

$$f^0 = -\tfrac{1}{2}\eta, \quad f' = -\tfrac{1}{2}\theta, \quad f'' = -\tfrac{1}{4}\lambda$$

$$g^0 = -\tfrac{1}{6}\theta', \quad g' = -\tfrac{1}{6}\lambda', \quad h^0 = -\tfrac{1}{24}\lambda'' + \tfrac{1}{24}\eta^2$$

man, in so weit die Vergleichung überhaupt möglich ist, völlige Uebereinstimmung finden.

130.

In Bezug auf den im Art. 113 eingeführten Winkel v sind noch die folgenden Erklärungen erforderlich. Es wurde dort v als der Winkel definirt, den die Hauptkrümmungslinie auf der Oberfläche, in deren Ebene die Achse der x gelegt worden ist, mit dem ersten Element der kürzesten Linie macht, die vom Punkt A ausgeht, und für welche $\varphi=0$ ist. Der Anfangspunkt von v wurde in den Zweig der Hauptkrümmungslinie verlegt, in welchem die x positiv sind. Da die genannte kürzeste Linie, welche weiter hin im Verlaufe der Entwickelungen mit k bezeichnet wurde, eliminirt, und durch die ähnlichen σ und σ', oder welches dasselbe ist, durch die Dreiecksseiten c und b ersetzt worden ist, so kann man v nicht als unmittelbar gegeben betrachten, sondern muss statt dessen den Winkel zwischen der genannten Hauptkrümmungslinie und einer der beiden Dreiecksseiten b oder c als eine unmittelbar gegebene Grösse betrachten.

Der Winkel zwischen der genannten Hauptkrümmungslinie und σ, oder der Dreiecksseite c, wurde a. a. O. schon unter der Bezeichnung χ eingeführt, und sieht man diesen Winkel als gegeben an, so wird

$$v = \chi - \varphi$$

Aus den Reihen des Art. 118 erhält man aber mit hier ausreichender Genauigkeit

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{k} = \operatorname{cotg} B$$

und folglich wird

$$v = \chi + B - 90^\circ$$

Will man statt dessen den Winkel zwischen derselben Hauptkrümmungslinie und der Dreiecksseite b als gegeben betrachten, und bezeichnet man diesen mit χ', so findet man ohne Weiteres

$$v = \chi' + B + A - 90^\circ$$

Hiemit sind alle in unserer Aufgabe vorkommenden Grössen vollständig erklärt.

131.

Die zunächst liegende Anwendung der vorhergehenden Auflösung der allgemeinen Aufgabe bietet die Kugel dar, und es soll daher jetzt angenommen werden, dass die allgemeine Oberfläche in die Oberfläche einer Kugel von dem Halbmesser r übergeht. Aus den Entwickelungen des Art. 113 geht nun hervor, dass in diesem Falle

$$\eta = \frac{1}{r^2}$$

und dass alle übrigen Coefficienten θ, θ', λ, λ' λ'', μ, etc., wie weit man auch die Entwickelungen fortsetzt, Null sind. Es wird folglich

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{r^2}$$

Setzt man nun diese Werthe in den letzten Ausdruck für Δ des Art. 121, so wird zuerst

$$\Delta = \frac{1}{2} ac \sin B \Big\{ 1 + \frac{1}{12r^2}(a^2 - 3ac\cos B + c^2) + \frac{1}{360r^4}(3a^4 - 5a^2c^2 + 3c^4 - 15ab^2c\cos B)\Big\}$$

aber, die sphärische Trigonometrie giebt allgemein

$$(133) \quad ac\cos B = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2$$
$$\frac{1}{24r^2}(a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4)$$

und eliminirt man hiemit cos B aus dem vorstehenden Ausdruck, so wird er

$$\Delta = \frac{1}{2} ac \sin B \Big\{ 1 - \frac{1}{24r^2}(a^2 - 3b^2 + c^2) - \frac{a^4}{480r^4} + \frac{b^4}{96r^4} + \frac{a^2c^2}{144r^4} - \frac{c^4}{480r^4}\Big\}$$

mit dem Art. 82 vollständig übereinstimmend. Macht man dieselben Substitutionen in dem letzten Ausdruck der Summe der Winkel des sphäroidischen Dreiecks des Art. 122, und erwägt, dass jetzt auch alle Coefficienten A, A', A'', M, M', M'', M''', etc. Null werden, so wird dieser

$$A + B + C = 180^0 + \frac{\Delta}{r^2}$$

welches eine bekannte Gleichung der sphärischen Trigonometrie ist. Führt man auch dieselben Substitutionen in die Ausdrücke des Art. 128 ein, so findet man

$$\delta A = \delta B = \delta C = 0$$

welche Gleichungen sich von selbst verstehen. Macht man hingegen in denselben, sonst unveränderten Gleichungen erst r unendlich gross, und führt darauf die oben genannten Substitutionen ein, so bekommt man, nachdem auch B eliminirt worden ist, für die Reduction des sphärischen Dreiecks auf das ebene,

$$\delta A = -\frac{\Delta}{3}\left\{1 - \frac{a^2}{30r^2} + \frac{b^2}{60r^2} + \frac{c^2}{60r^2}\right\}$$

$$\delta B = -\frac{\Delta}{3}\left\{1 + \frac{a^2}{60r^2} - \frac{b^2}{30r^2} + \frac{c^2}{60r^2}\right\}$$

$$\delta C = -\frac{\Delta}{3}\left\{1 + \frac{a^2}{60r^2} + \frac{b^2}{60r^2} - \frac{c^2}{30r^2}\right\}$$

mit den Ausdrücken (96) des Art. 80 vollständig übereinstimmend.

132.

Es soll zweitens die Anwendung der vorhergehenden allgemeinen Formeln auf das abgeplattete Revolutionsellipsoid ausgeführt, und zu dem Ende die Gleichung dieser Oberfläche wie früher in folgender Form aufgestellt werden,

$$\frac{x^2 + y^2}{n^2} + \frac{z^2}{m^2} = 1$$

Hier liegen wieder die Achsen der x und y im Aequator, und es soll ausserdem die Achse der x in dem Meridian liegen, von welchem an man die Längen zählen will; die Achse der z liegt wieder in der Umdrehungsachse des Revolutionsellipsoids. Die grosse Halbachse ist hier, um Verwechselung mit den Dreiecksseiten vorzubeugen mit n, und die kleine Halbachse aus demselben Grunde mit m bezeichnet worden.

Verlegt man nun zuerst den Anfangspunkt dieser Coordinaten in den Punkt der Oberfläche, dessen Coordinaten $\xi, 0, \zeta$ sind, dann wird, wenn die reducirte Breite desselben mit β bezeichnet wird,

$$\xi = n \cos\beta\,, \quad \zeta = m \sin\beta$$

und die Gleichung der Oberfläche geht, wenn man die neuen Coordinaten allgemein mit x', y, z' bezeichnet, über in

$$\frac{x'^2 + y^2}{n^2} + \frac{z'^2}{m^2} + 2\,\frac{x'}{n}\cos\beta + 2\,\frac{z'}{m}\sin\beta = 0$$

Dreht man ferner die Achsen der x' und z' so, dass die der z' in der Normale des Anfangspunkts zu liegen kommt, und im Innern des Revolutionsellipsoids die z' positiv werden, so muss, wenn B die Polhöhe des Anfangspunkts der Coordinaten bezeichnet,

$$x' = \quad x \sin B - z \cos B$$
$$z' = -x \cos B - z \sin B$$

substituirt werden.*) Man erhält hierauf für die Gleichung der Oberfläche

$$x^2\left(\frac{\sin^2 B}{n^2}+\frac{\cos^2 B}{m^2}\right)+\frac{y^2}{n^2}+z^2\left(\frac{\cos^2 B}{n^2}+\frac{\sin^2 B}{m^2}\right)+2xz\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\sin B\cos B$$
$$+2x\left(\frac{\sin B\cos\beta}{n}-\frac{\cos B\sin\beta}{m}\right)-2z\left(\frac{\cos B\cos\beta}{n}+\frac{\sin B\sin\beta}{m}\right)=0$$

Aber, wenn wieder die Excentricität der Meridiane mit e bezeichnet wird, so ist

$$m^2 = n^2(1-e^2)$$

und

$$\sin^2 B = \frac{\sin^2\beta}{1-e^2\cos^2\beta}$$
$$\cos^2 B = \frac{(1-e^2)\cos^2\beta}{1-e^2\cos^2\beta}$$

womit die Gleichung des Revolutionsellipsoids schliesslich in

$$(134) \quad . \quad . \quad x^2 + Ay^2 + Bz^2 + 2Cxz - 2Dz = 0$$

übergeht, nachdem zur Abkürzung

$$A = 1 - e^2\cos^2\beta$$
$$B = \frac{1-(2e^2-e^4)\cos^2\beta}{1-e^2}$$
$$C = \frac{e^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin\beta\cos\beta$$
$$D = n\frac{(1-e^2\cos^2\beta)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-e^2}}$$

gesetzt worden ist. Die Achse der x, die unbeschadet der Umformungen immer in demselben Meridian liegen geblieben ist, liegt hiemit zugleich in der einen der beiden Hauptkrümmungsebenen des Revolutionsellipsoids, da immer auf dieser Oberfläche die Meridiane Hauptkrümmungslinien sind. Es ist ferner, wenn wir uns den Punkt A auf der nördlichen Hälfte des Revolutionsellipsoids denken, der positive Zweig der x Achse nach Süden gerichtet, und die im Art. 130 erklärten Winkel χ und χ' werden die vom Südpunkt des Horizonts zu zählenden Azimuthe der Dreiecksseiten c und b.

---

*) Da hier keine schädliche Verwechselung entstehen kann, so habe ich für die neuen Coordinaten wieder die Bezeichnungen x und z gewählt, obgleich sie mit den oben eben so bezeichneten auf keine Weise identisch sind.

133.

Die erste Differentiation der Gleichung (134) giebt

$$xdx + Aydy + Bzdz + Cxdz + Czdx - Ddz = 0$$

Betrachtet man nun z als Function von x und y, und setzt wie oben,

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$r = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \quad s = \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right), \quad t = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

so erhält man hieraus

$$p = \frac{x + Cz}{D - Cx - Bz}, \quad q = \frac{Ay}{D - Cx - Bz}$$

deren Differentiation

$$r = \frac{1 + Cp}{D - Cx - Bz} + \frac{(x + Cz)\,(C + Bp)}{(D - Cx - Bz)^2}$$

$$s = \frac{Cq}{D - Cx - Bz} + \frac{(x + Cz)\,Bq}{(D - Cx - Bz)^2} = \frac{(C + Bp)\,Ay}{(D - Cx - Bz)^2}$$

$$t = \frac{A}{D - Cx - Bz} + \frac{ABy\,q}{(D - Cx - Bz)^2}$$

giebt. Durch fortgesetzte Differentiationen dieser Gleichungen, und nachdem schliesslich in allen Ausdrücken $x = y = z = 0$ gesetzt worden war, ergab sich

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 0$$

$$r_0 = \frac{1}{D}, \quad s_0 = 0, \quad t_0 = \frac{A}{D}$$

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_0 = 3\,\frac{C}{D^2}, \quad \left(\frac{dr}{dy}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 = \frac{AC}{D^2}, \quad \left(\frac{dt}{dy}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right)_0 = 3\,\frac{B}{D^3} + 12\,\frac{C^2}{D^3}, \quad \left(\frac{d^2r}{dx\,dy}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)_0 = \frac{AB}{D^3} + 2\,\frac{AC^2}{D^3}, \quad \left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2t}{dy^2}\right)_0 = 3\,\frac{A^2B}{D^3}$$

$$\left(\frac{d^3r}{dx^3}\right)_0 = 45\,\frac{BC}{D^4} + 60\,\frac{C^3}{D^4}, \quad \left(\frac{d^3r}{dx^2dy}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^3r}{dx\,dy^2}\right)_0 = 9\,\frac{ABC}{D^4} + 6\,\frac{AC^3}{D^4}$$

$$\left(\frac{d^3t}{dx^2dy}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^3t}{dx\,dy^2}\right)_0 = 9\,\frac{A^2BC}{D^4}, \quad \left(\frac{d^3t}{dy^3}\right)_0 = 0$$

Da allgemein

$$\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2t}{dx^2}\right); \quad \left(\frac{d^3r}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^3t}{dx^2dy}\right); \quad \left(\frac{d^3t}{dx^3}\right) = \left(\frac{d^3r}{dx\,dy^2}\right)$$

ist, so sind hiemit alle erforderlichen Differentialquotienten gegeben.

134.

Da nun allgemein

$$\left(\frac{d.rt}{dx}\right) = t\left(\frac{dr}{dx}\right) + r\left(\frac{dt}{dx}\right);\quad \left(\frac{d.rt}{dy}\right) = t\left(\frac{dr}{dy}\right) + r\left(\frac{dt}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{d^2.rt}{dx^2}\right) = t\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right) + 2\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) + r\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)$$

$$\left(\frac{d^2.rt}{dxdy}\right) = t\left(\frac{d^2r}{dxdy}\right) + \left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) + \left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) + r\left(\frac{d^2t}{dxdy}\right)$$

$$\left(\frac{d^2.rt}{dy^2}\right) = t\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right) + 2\left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) + r\left(\frac{d^2t}{dy^2}\right)$$

$$\left(\frac{d^3.rt}{dx^3}\right) = t\left(\frac{d^3r}{dx^3}\right) + 3\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) + 3\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) + r\left(\frac{d^3t}{dx^3}\right)$$

$$\left(\frac{d^3.rt}{dx^2dy}\right) = t\left(\frac{d^3r}{dx^2dy}\right) + \left(\frac{d^2r}{dx^2}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) + 2\left(\frac{d^2r}{dxdy}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) + 2\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{d^2t}{dxdy}\right) + \left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) + r\left(\frac{d^3t}{dx^2dy}\right)$$

$$\left(\frac{d^3.rt}{dxdy^2}\right) = t\left(\frac{d^3r}{dxdy^2}\right) + \left(\frac{d^2r}{dy^2}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right) + 2\left(\frac{d^2r}{dxdy}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) + 2\left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{d^2t}{dxdy}\right) + \left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) + r\left(\frac{d^3t}{dxdy^2}\right)$$

$$\left(\frac{d^3.rt}{dy^3}\right) = t\left(\frac{d^3r}{dy^3}\right) + 3\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right)\left(\frac{dt}{dy}\right) + 3\left(\frac{dr}{dy}\right)\left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) + r\left(\frac{d^3t}{dy^3}\right)$$

ist, so geben die Entwickelungen des vor. Art. für das Revolutions-Ellipsoid

$$\left(\frac{d.rt}{dx}\right)_0 = 4\,\frac{AC}{D^3};\quad \left(\frac{d.rt}{dy}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{d^2.rt}{dx^2}\right)_0 = 4\,\frac{AB}{D^4} + 20\,\frac{AC^2}{D^5};\quad \left(\frac{d^2.rt}{dxdy}\right)_0 = 0;\quad \left(\frac{d^2.rt}{dy^2}\right)_0 = 4\,\frac{A^2B}{D^4} + 2\,\frac{A^2C^2}{D^4}$$

$$\left(\frac{d^3.rt}{dx^3}\right)_0 = 72\,\frac{ABC}{D^5} + 120\,\frac{AC^3}{D^6};\quad \left(\frac{d^3.rt}{dx^2dy}\right)_0 = 0$$

$$\left(\frac{d^3.rt}{dxdy^2}\right)_0 = 28\,\frac{A^2BC}{D^5} + 8\,\frac{A^2C^3}{D^6};\quad \left(\frac{d^3.rt}{dy^3}\right)_0 = 0$$

und durch die Substitution in die Ausdrücke des Art. 113 erhält man

$$\pi = 4\,\frac{AB}{D^4} + 20\,\frac{AC^2}{D^5} - 4\,\frac{A}{D^4}$$

$$\pi' = 0$$

$$\pi'' = 4\,\frac{A^2B}{D^4} - 4\,\frac{A^2}{D^4}$$

$$\varrho = 72\,\frac{ABC}{D^5} - 88\,\frac{AC}{D^5} + 120\,\frac{AC^3}{D^6}$$

$$\varrho' = 0$$

$$\varrho'' = 24\,\frac{A^2BC}{D^5} - \frac{16}{3}\,\frac{A^2C}{D^5} - 24\,\frac{A^2C}{D^5}$$

135.

Die vorhergehenden Formeln sind strenge, und gelten für jeden Werth der Excentricität des Ellipsoids, betrachtet man aber von jetzt an e als eine kleine Grösse erster Ordnung, und übergeht die mit e^4, etc. multiplicirten Glieder, so werden sie weit einfacher, und gehen in die folgenden über,

$$\pi = \frac{4e^2}{n^4}(1-2\cos^2\beta), \quad \pi' = 0$$

$$\pi'' = \frac{4e^2}{n^4}(1-\cos^2\beta)$$

$$\varrho = -\frac{16e^2}{n^5}\sin\beta\cos\beta, \quad \varrho' = 0$$

$$\varrho'' = -\frac{16e^2}{3n^5}\sin\beta\cos\beta, \quad \varrho''' = 0$$

zufolge der Art. 113 und 130 ergiebt sich hieraus

$$\lambda = \frac{4e^2}{n^4}\sin^2\beta - \frac{4e^2}{n^4}\cos^2\beta\sin^2(\chi+B)$$

$$\lambda' = -\frac{4e^2}{n^4}\cos^2\beta\sin(\chi+B)\cos(\chi+B)$$

$$\lambda'' = \frac{4e^2}{n^4}\sin^2\beta - \frac{4e^2}{n^4}\cos^2\beta\cos^2(\chi+B)$$

$$\mu = -\frac{16e^2}{n^5}\sin\beta\cos\beta\sin(\chi+B)$$

$$\mu' = -\frac{16e^2}{3n^5}\sin\beta\cos\beta\cos(\chi+B)$$

$$\mu'' = -\frac{16e^2}{3n^5}\sin\beta\cos\beta\sin(\chi+B)$$

$$\mu''' = -\frac{16e^2}{n^5}\sin\beta\cos\beta\cos(\chi+B)$$

Es ist ferner strenge

$$\eta = \frac{1-e^2}{n^2(1-e^2\cos^2\beta)^2}$$

also wenn man hier die mit e^4 multiplicirten Glieder mit aufnimmt.

$$\eta = \frac{1}{n^2}\left\{1+\left(e^2+\frac{1}{2}e^4\right)\cos 2\beta + \frac{e^4}{4}(3\cos^2 2\beta - 1)\right\}$$

Bezeichnet man nun, den übrigen Bezeichnungen analog, die reducirten Breiten, die den Dreieckspunkten A, B, C zukommen mit α', β', γ', so erhält man für die Krümmungsmaasse α, β, γ die folgenden Ausdrücke,

$$\alpha = \frac{1}{n^2}\left\{1+\left(e^2+\frac{1}{2}e^4\right)\cos 2\alpha' + \frac{e^4}{4}(3\cos^2 2\alpha' - 1)\right\}$$

$$\beta = \frac{1}{n^2}\left\{1+\left(e^2+\frac{1}{2}e^4\right)\cos 2\beta' + \frac{e^4}{4}(3\cos^2 2\beta' - 1)\right\}$$

$$\gamma = \frac{1}{n^2}\left\{1+\left(e^2+\frac{1}{2}e^4\right)\cos 2\gamma' + \frac{e^4}{4}(3\cos^2 2\gamma' - 1)\right\}$$

und hieraus

$$\alpha^2 = \frac{1}{n^4}\,1 + 2e^2\cos 2\alpha')$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{n^4}(1 + e^2\cos 2\alpha' + e^2\cos 2\beta')$$

$$\alpha\gamma = \frac{1}{n^4}(1 + e^2\cos 2\alpha' + e^2\cos 2\gamma')$$

Durch die vorstehenden Werthe gehen ferner die (131) in die folgenden über,

$$A = \frac{4e^2}{n^4}\{\sin^2\alpha' - \cos^2\alpha'\cos^2\chi\}$$

$$A' = \frac{4e^2}{n^4}\{\sin^2\alpha'\cos B - \cos^2\alpha'\cos\chi\cos(\chi + B)\}$$

$$A'' = \frac{4e^2}{n^4}\{\sin^2\alpha' - \cos^2\alpha'\cos^2(\chi + B)\}$$

$$M = -\frac{16e^2}{n^5}\sin\alpha'\cos\alpha'\cos\chi$$

$$M' = -\frac{16e^2}{3n^5}\sin\alpha'\cos\alpha'\{\cos(\chi + B) + 2\cos B\cos\chi\}$$

$$M'' = -\frac{16e^2}{3n^5}\sin\alpha'\cos\alpha'\{\cos\chi + 2\cos B\cos(\chi + B)\}$$

$$M''' = -\frac{16e^2}{n^5}\sin\alpha'\cos\alpha'\cos(\chi + B)$$

womit alle Hülfsgrössen für das Revolutionsellipsoid entwickelt sind.

136.

Suchen wir nun zuerst den Ausdruck der Fläche des sphäroidischen Dreiecks auf dem Revolutionsellipsoid. Substituiren wir zu dem Ende sowohl den Ausdruck (133) für $\cos B$, indem wir darin den Kugelhalbmesser $r = n$ machen, wie die vorstehenden Ausdrücke für die Krümmungsmaasse α, β, γ, wobei die mit e^4 multiplicirten Glieder weggelassen werden müssen, in den letzten Ausdruck für $\triangle$ des Art. 121, so erhalten wir den Ausdruck für die gesuchte Fläche, aus welchem man durch blose Vertauschung der Buchstaben noch zwei andere ähnliche bekommen kann. Diese drei Ausdrücke sind

$$\begin{aligned}\triangle = \frac{1}{2}bc\sin A\Big\{1 &+ \frac{1}{24n^2}(3a^2 - b^2 - c^2)\\ &+ \frac{1}{1440n^4}(15a^4 - 3b^4 - 3c^4 + 10b^2c^2)\\ &+ \frac{e^2}{40n^2}(2a^2 - b^2 - c^2)\cos 2\alpha'\\ &\ \frac{e^2}{[illegible]n^2}(9a^2 - 3b^2 - c^2)\cos 2\beta'\\ &\ [illegible](9a^2 - b^2 - 3c^2)\cos 2\gamma'\Big\}\end{aligned}$$

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ac\sin B\Big\{1 - \frac{1}{24n^2}(a^2 - 3b^2 + c^2)$$
$$- \frac{1}{1440n^4}(3a^4 - 15b^4 + 3c^4 - 10a^2c^2)$$
$$- \frac{e^2}{240n^2}(3a^2 - 9b^2 + c^2)\cos 2\alpha'$$
$$- \frac{e^2}{40n^2}(a^2 - 2b^2 + c^2)\cos 2\beta'$$
$$- \frac{e^2}{240n^2}(a^2 - 9b^2 + 3c^2)\cos 2\gamma'\Big\}$$

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ab\sin C\Big\{1 - \frac{1}{24n^2}(a^2 + b^2 - 3c^2)$$
$$- \frac{1}{1440n^4}(3a^4 + 3b^4 - 15c^4 - 10a^2b^2)$$
$$- \frac{e^2}{240n^2}(3a^2 + b^2 - 9c^2)\cos 2\alpha'$$
$$- \frac{e^2}{240n^2}(a^2 + 3b^2 - 9c^2)\cos 2\beta'$$
$$- \frac{e^2}{40n^2}(a^2 + b^2 - 2c^2)\cos 2\gamma'\Big\}$$

Jeder dieser Ausdrücke ist bis auf Grössen achter Ordnung richtig, und man sieht, dass die Function, die im Art. 121 mit l bezeichnet wurde, hiezu nichts beigetragen hat.

137.

Für die Summe der Winkel unsers sphäroidischen Dreiecks giebt der letzte Ausdruck des Art. 122, wenn die im Vorstehenden für das Revolutionsellipsoid entwickelten Functionen substituirt werden, zuerst den folgenden Ausdruck

$$A + B + C = 180^0 + \frac{\Delta}{n^2} + \frac{\Delta\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)}{3n^2}\{\cos 2\alpha' + \cos 2\beta' + \cos 2\gamma'\}$$
$$+ \frac{\Delta e^4}{4n^2}\{\cos^2 2\alpha' + \cos^2 2\beta' + \cos^2 2\gamma' - 1\}$$
$$- \frac{\Delta e^2}{180n^4}\{6a^2 + 2ac\cos B - 2c^2\}\cos 2\alpha'$$
$$+ \frac{\Delta e^2}{180n^4}\{4a^2 - ac\cos B - c^2\}\cos 2\beta'$$
$$+ \frac{\Delta e^2}{180n^4}\{2a^2 + 3ac\cos B - c^2\}\cos 2\gamma'$$
$$- \frac{\Delta e^2}{8n^4}\{a^2 - ac\cos B + c^2\}\sin^2\alpha'$$
$$+ \frac{\Delta e^2}{3n^4}\{c^2\cos^2\chi - ac\cos\chi\cos(\chi + B) + a^2\cos^2(\chi + B)\}\cos^2\alpha'$$
$$+ \frac{4\Delta e^2}{45n^5}\{8c^3\cos\chi - 4ac^2\cos(\chi + B) - 8ac^2\cos B\cos\chi$$
$$+ 6a^2c\cos\chi + 12a^2c\cos B\cos(\chi + B) - 7a^3\cos(\chi + B)\}\sin\alpha'\cos\alpha'$$

welcher auch bis auf Grössen achter Ordnung richtig ist. Dieser kann noch dadurch vereinfacht werden, dass man durch die folgenden Gleichungen,

$$
\begin{aligned}
2ac\cos B &= a^2 - b^2 + c^2 \\
a\sin B &= b\sin A \\
a\cos B &= c - b\cos A
\end{aligned}
$$

die hier zulässig sind, B eliminirt. Man erleichtert sich diese Elimination durch die folgende Gleichung,

$$a\cos(\chi + B) = c\cos\chi - b\cos\chi'$$

die in Verbindung mit $\chi' = \chi - A$, die aus dem Art. 130 folgt, aus den vorstehenden leicht erhalten wird. Man bekommt durch Hülfe dieser Gleichungen statt des vorstehenden Ausdrucks für die Summe der drei Winkel den folgenden,

$$
\begin{aligned}
A + B + C = 180^0 &+ \frac{\Delta}{n^2} + \frac{\Delta\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)}{8n^2}\{\cos 2\alpha' + \cos 2\beta' + \cos 2\gamma'\} \\
&+ \frac{\Delta e^4}{4n^2}\{\cos^2 2\alpha' + \cos^2 2\beta' + \cos^2 2\gamma' - 1\} \\
&- \frac{\Delta e^2}{180n^4}\{7a^2 - b^2 - c^2\}\cos 2\alpha' \\
&+ \frac{\Delta e^2}{360n^4}\{7a^2 + b^2 - 3c^2)\}\cos 2\beta' \\
&+ \frac{\Delta e^2}{360n^4}\{7a^2 - 3b^2 + c^2\}\cos 2\gamma' \\
&- \frac{\Delta e^2}{6n^4}\{a^2 + b^2 + c^2\}\sin^2\alpha' \\
&+ \frac{\Delta e^2}{8n^4}\{b^2\cos^2\chi' + c^2\cos^2\chi - bc\cos\chi'\cos\chi\}\cos^2\alpha' \\
&+ \frac{4\Delta e^2}{45n^4}\{(a^2 + 6b^2 - 2c^2)b\cos\chi' + (a^2 - 2b^2 + 6c^2)c\cos\chi\}\sin\alpha'\cos\alpha'
\end{aligned}
$$

ebenfalls bis auf Grössen achter Ordnung richtig.

Man kann aus dem vorstehenden Ausdruck einen andern ableiten, welcher die Fläche des sphäroidischen Dreiecks auf dem Revolutionsellipsoid durch den Ueberschuss der Summe der Winkel desselben über 180^0 giebt; diesen Ausdruck will ich nur kurz andeuten. Multiplicirt man den vorstehenden Ausdruck mit $\frac{n^2}{\Delta}$, bezeichnet hierauf die rechte Seite desselben mit Weglassung des ersten Gliedes mit $1 + x$, und setzt ausserdem

$$\Delta_0 = A + B + C - 180^0$$

so bekommt man

die bis auf Grössen sechster Ordnung richtig sind, und womit die Aufgabe schon gelöst ist.

127.

Die eben erhaltene Auflösung unserer Aufgabe kann durch Einführung der Dreiecksfläche, der oben schon angewandten Krümmungsmaasse, und der Dreiecksseiten und Winkel vereinfacht werden. Die Anwendung der Gleichung (130) giebt

$$\begin{aligned}
\delta A = -\Delta \Big\{ & \tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{1}{12}(2\theta k + \theta'(h+h')) - \tfrac{1}{3r^2} \\
& + \tfrac{\eta^2}{180}(2k^2 - h^2 + 4hh' - h'^2) + \tfrac{\eta}{36r^2}(k^2 + h^2 - hh' + h'^2) \\
& + \tfrac{\eta\theta k}{1080}(9k^2 - 32h^2 + 13hh' - 32h'^2) + \tfrac{\theta k}{360r^2}(6k^2 + 7h^2 - 8hh' + 7h'^2) \\
& + \tfrac{\eta\theta'}{720}(13k^2(h+h') - h^3 - 4h^2h' - 4hh'^2 - h'^3) \\
& \qquad + \tfrac{\theta'}{360r^2}(3k^2(h+h') + 4h^3 - h^2h' - hh'^2 + 4h'^3) \\
& \qquad - \tfrac{1}{180r^4}(7k^2 + 4h^2 - hh' + 4h'^2) \\
& + \tfrac{1}{60}(3\lambda k^2 + 3\lambda' k(h+h') + \lambda''(h^2 + hh' + h'^2)) \\
& + \tfrac{1}{360}(4\mu k^3 + 6\mu' k^2(h+h') + 4\mu'' k(h^2 + hh' + h'^2) \\
& \qquad + \mu'''(h^3 + h^2h' + hh'^2 + h'^3))\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta B = -\Delta \Big\{ & \tfrac{1}{3}\eta + \tfrac{1}{12}(3\theta k + \theta'(2h+h')) - \tfrac{1}{3r^2} \\
& - \tfrac{\eta^2}{180}(k^2 - 2h^2 + 2hh' + h'^2) + \tfrac{\eta}{36r^2}(k^2 + h^2 - hh' + h'^2) \\
& - \tfrac{\eta\theta k}{2160}(21k^2 + 57h^2 + 97hh' + 47h'^2) + \tfrac{\theta k}{360r^2}(6k^2 + 7h^2 - 8hh' + 7h'^2) \\
& + \tfrac{\eta\theta'}{2160}(52k^2h + 17k^2h' + 30h^3 - 21hh'^2 - 27hh'^2 - 3h'^3) \\
& \qquad + \tfrac{\theta'}{360r^2}(3k^2(h+h') + 4h^3 - h^2h' - hh'^2 + 4h'^3) \\
& \qquad - \tfrac{1}{180r^4}(4k^2 + 7h^2 - 7hh' + 4h'^2) \\
& + \tfrac{1}{60}(6\lambda k^2 + 4\lambda' k(2h+h') + \lambda''(3h^2 + 2hh' + h'^2)) \\
& + \tfrac{1}{360}(10\mu k^3 + 10\mu' k^2(2h+h') + 5\mu'' k(3h^2 + 2hh' + h'^3) \\
& \qquad + \mu'''(4h^3 + 3h^2h' + 2hh'^2 + h'^3))\Big\}
\end{aligned}$$

und führt man hierin die Krümmungsmaasse durch die Gleichungen (128) ein, so entstehen

$$\delta A = -\frac{\Delta}{12}\left\{2\alpha+\beta+\gamma\right\} + \frac{\Delta}{3r^2}$$

$$-\frac{\Delta\alpha^2}{1080}\left\{3k^2-4h^2+11hh'-4h'^2\right\} - \frac{\Delta\alpha}{360r^2}\left\{4k^2+3h^2-2hh'+3h'^2\right\}$$

$$-\frac{\Delta\alpha\beta}{2160}\left\{9k^2-3h^2+13hh'-h'^2\right\} - \frac{\Delta\beta}{360r^2}\left\{3k^2+4h^2-4hh'+3h'^2\right\}$$

$$-\frac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\left\{9k^2-h^2+13hh'-3h'^2\right\} - \frac{\Delta\gamma}{360r^2}\left\{3k^2+3h^2-4hh'+4h'^2\right\}$$

$$+\frac{\Delta}{180r^4}\left\{7k^2+4h^2-hh'+4h'^2\right\}$$

$$+\frac{\Delta}{120}\left\{4\lambda k^2+4\lambda' k(h+h')+\lambda''(3h^2-2hh'+3h'^2)\right\}$$

$$+\frac{\Delta}{360}\left\{6\mu k^3+9\mu' k^2(h+h')+\mu'' k(11h^2-4hh'+11h'^2)\right.$$

$$\left.+\mu'''(4h^3-h^2h'-hh'^2+4h'^3)\right\}$$

$$\delta B = -\frac{\Delta}{12}\left\{\alpha+2\beta+\gamma\right\} + \frac{\Delta}{3r^2}$$

$$-\frac{\Delta\alpha^2}{2160}\left\{9k^2-39h^2+73hh'-25h'^2\right\} - \frac{\Delta\alpha}{360r^2}\left\{4k^2+3h^2-2hh'+3h'^2\right\}$$

$$+\frac{\Delta\alpha\beta}{2160}\left\{8k^2-30h^2+54hh'-16h'^2\right\} - \frac{\Delta\beta}{360r^2}\left\{3k^2+4h^2-4hh'+3h'^2\right\}$$

$$+\frac{\Delta\alpha\gamma}{2160}\left\{13k^2-33h^2+43hh'+3h'^2\right\} - \frac{\Delta\gamma}{360r^2}\left\{3k^2+3h^2-4hh'+4h'^2\right\}$$

$$+\frac{\Delta}{180r^4}\left\{4k^2+7h^2-7hh'+4h'^2\right\}$$

$$+\frac{\Delta}{120}\left\{3\lambda k^2+2\lambda' k(2h+h')+\lambda''(4h^2-4hh'+3h'^2)\right\}$$

$$+\frac{\Delta}{360}\left\{5\mu k^3+5\mu' k^2(2h+h')+\mu'' k(15h^2-10hh'+10h'^2)\right.$$

$$\left.+\mu'''(6h^3-3h^2h'-2hh'^2+4h'^3)\right\}$$

auch bis auf Grössen sechster Ordnung richtig. Wenn man nun in diesem Ausdruck von δB um δC zu erhalten, h und h' mit einander vertauscht, so müssen auch β und γ mit einander vertauscht werden.

128.

Führt man endlich in die eben erhaltenen Ausdrücke die Dreiecksstücke a, c, B ein, und schreibt auch den Ausdruck für δC hin, dann wird schliesslich

$$\Delta' = \Delta - \frac{\Delta\sigma^2}{120\,n^2}(a^2 + 2b^2 + 2c^2)\cos 2\alpha'$$
$$- \frac{\Delta\sigma^2}{120\,n^2}(2a^2 + b^2 + 2c^2)\cos 2\beta'$$
$$- \frac{\Delta\sigma^2}{120\,n^2}(2a^2 + 2b^2 + c^2)\cos 2\gamma'$$

welcher auch bis auf Grössen achter Ordnung richtig ist.

140.

Es soll jetzt die Anwendung unserer Ausdrücke durch Beispiele erläutert werden. Nehmen wir zuerst das sphäroidische Dreieck des Art. 77 vor, und betrachten es als ein sphärisches von denselben Seiten. Die betreffenden Formeln der sphärischen Trigonometrie geben unter dieser Voraussetzung, und wenn man A statt n, B statt n', C statt n'' schreibt,

$$\begin{aligned} A + \delta A &= 60^0\,30'\;\;0'',29 \\ B + \delta B &= 69\;\;59\;\;59,51 \\ C + \delta C &= 49\;\;36\;\;53,66 \\ \hline \Delta' &= \;\;0^0\;\;6'\,53'',46 \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Winkel mit den sphäroidischen des Art. 77 giebt

$$\begin{aligned} \delta A &= -\;0'',52 \\ \delta B &= -\;0,49 \\ \delta C &= -\;0,51 \end{aligned}$$

und die Ausdrücke des Art. 138 geben,

$$\begin{aligned} \delta A &= -\;0'',51 \\ \delta B &= -\;0,50 \\ \delta C &= -\;0,53 \end{aligned}$$

welches für eine vollständige Uebereinstimmung gehalten werden muss, da die directe Berechnung der sphärischen Winkel aus den Seiten bei einem so kleinen Dreieck, wie das hier in Rede stehende, von dem Umstande stark beeinflusst wird, dass eine kleine Aenderung der Seiten eine grosse der Winkel verursacht. Die Glieder sechster und siebenter Ordnung sind hier unbedeutend, und ihre Summen sind bez. nur

$$-\,0'',002\;;\quad -\,0'',002\;;\quad -\,0'',003$$

Bei Dreiecken von der Grösse des hier in Rede stehenden, und bei noch grösseren, kann man sich also ohne Nachtheil der Ausdrücke (112) bedienen, in so ferne man die Genauigkeit nicht über die zweite Decimale der Secunde ausdehnen will.

141.

Zum zweiten Beispiel soll das sphäroidische Dreieck des Art. 76 dienen, welches ich ausführlicher behandeln werde. Schreibt man A statt n, B statt n'', C statt n', so werden in den hier eingeführten Bezeichnungen

$$\begin{aligned} A &= 78^0 &, \quad a &= 20^0\, 2'\, 24'',41 \\ B &= 47\;\; 37'\, 39'',59 &, \quad b &= 15 \\ C &= 56\;\; 34\;\; 12,35 &, \quad c &= 17 \\ \alpha' &= 45^0 &, \quad \chi' &= 30^0 \\ \beta' &= 47\;\; 44' &, \quad \chi &= 108 \\ \gamma' &= 31\;\; 36 &, \end{aligned}$$

und durch die sphärische Trigonometrie bekommt man vor Allem

$$\begin{aligned} A + \delta A &= 77^0\, 59'\, 58'',57 \\ B + \delta B &= 47\;\; 37\;\; 38,65 \\ C + \delta C &= 56\;\; 34\;\;\; 8,84 \\ \hline \Delta' &= 2^0\, 11'\, 46'',06 \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Winkel mit den sphäroidischen giebt

$$\begin{aligned} \delta A &= -1'',43 \\ \delta B &= -0,94 \\ \delta C &= -3,51 \end{aligned}$$

Da die Dreiecksseiten hier in Bogentheilen des Aequators angegeben sind, während die im Vorhergehenden abgeleiteten Ausdrücke in der Voraussetzung construirt worden sind, dass diese Seiten in irgend einem Linearmaasse ausgedrückt seien, so muss man in allen diesen Ausdrücken $n=1$ setzen und die Seiten vor ihrer Anwendung in Theile des Kreishalbmessers $=1$ verwandeln. Die Dreiecksfläche wird auf jeden Fall in Bogentheilen ausgedrückt, und man kann unbedenklich Δ' statt Δ anwenden. Aus den oben angegebenen Dreiecksseiten folgt

$$\log a = 9.5437776\ ,\quad a^2 = 0.122336$$
$$\log b = 9.4179687\ ,\quad b^2 = 0.068539$$
$$\log c = 9.4723263\ ,\quad c^2 = 0.088034$$

Es wurde nun zuerst die Fläche des sphäroidischen Dreiecks durch den ersten Ausdruck des Art. 136 berechnet. Zur leichteren Vergleichung werde ich den Betrag jedes einzelnen Gliedes dieses Ausdrucks der Reihe nach anführen. Die Fläche werde ich in Bogentheilen ausdrücken. So fand sich

$$\begin{array}{rr}
\frac{1}{2} bc \sin A = & 2^0\,10'\,36'',002 \\
& 1\quad 8,707 \\
& 1,346 \\
& 0 \\
& -\,0,017 \\
& 0,076 \\
\hline
\Delta = & 2^0\,11'\,46'',114
\end{array}$$

Man sieht dass diese Fläche sehr wenig von der Fläche Δ' des sphärischen Dreiecks verschieden ist. Die Endformel des Art. 137 gab hierauf, wenn wieder die Glieder der Reihe nach angeführt werden,

$$\begin{array}{rr}
& 180^0 \\
& 2\quad 11'\,46'',114 \\
& \left\{\begin{array}{r} +\,6,256 \\ +\,0,021 \end{array}\right\} \\
& -\,0,068 \\
& 0 \\
& -\,0,008 \\
& +\,0,049 \\
& -\,1,227 \\
& +\,0,709 \\
& +\,0,080 \\
\hline
A + B + C = & 182^0\,11'\,51'',926
\end{array}$$

Die oben angeführten Werthe dieser drei Winkel geben ihre Summe

$$A + B + C = 182^0\,11'\,51'',94$$

nur 0",01 vom vorstehenden Resultat verschieden. Aus den Ausdrücken des Art. 138 bekam ich in ähnlicher Aufstellung

$\begin{cases}-1'',564\\-0,005\end{cases}$	$\begin{cases}-1'',145\\-0,004\end{cases}$	$\begin{cases}-3'',547\\-0,012\end{cases}$
$+0,025$	$+0,025$	$+0,020$
0	0	0
$+0,007$	$+0,013$	$+0,010$
$-0,030$	$-0,053$	$-0,059$
$+0,383$	$+0,430$	$+0,413$
$-0,195$	$-0,239$	$-0,276$
$-0,028$	$+0,005$	$-0,057$
$\delta A = -1'',407$	$\delta B = -0'',968$	$\delta C = -3'',508$

Vergleicht man diese mit den oben durch strenge Rechnung erhaltenen Werthen derselben, so findet man die Unterschiede

$$+0'',02 \;;\quad -0'',03 \;;\quad 0'',00$$

die befriedigend sind. Hier haben die Glieder der sechsten und der siebenten Ordnung wesentlichen Einfluss, denn lässt man diese weg, so bleibt blos das erste Glied eines jeden der vorstehenden Ausdrücke übrig, und man erhält die folgenden Unterschiede von den strenge berechneten Werthen

$$-0'',14 \;;\quad -0'',22 \;;\quad -0'',05$$

die nicht unerheblich sind. Rechnet man endlich noch Δ' durch den Ausdruck des Art. 139, so erhält man

$$\begin{array}{rl} \Delta = & 2^0\,11'\,46'',114 \\ & 0 \\ & +0,020 \\ & -0,093 \\ \hline \Delta' = & 2^0\,11'\,46'',04 \end{array}$$

nur 0'',02 von dem oben erhaltenen Werthe verschieden.

Man reicht also bei Dreiecken von der Grösse des jetzt betrachteten mit den Ausdrücken (112) nicht aus, sondern muss für solche die Glieder sechster und siebenter Ordnung mit in Betracht ziehen, mit anderen Worten, die Ausdrücke des Art. 138 anwenden, und dasselbe findet bei weit kleineren Dreiecken statt, wenn man die Genauigkeit weiter wie bis auf Hunderttheile von Secunden treiben will.

Da das hier gewählte Dreieck ziemlich gross ist, so ist es von Interesse auch die Resultate der Ausdrücke des Art. 138 kennen zu lernen,

wenn nach einander die beiden anderen Dreiecksecken als der Punkt A betrachtet werden, und ich habe daher die Rechnungen auch in dieser Annahme ausgeführt. Sei $A{=}n'$, dann wird

$a = 17^0$,		$\alpha' = 31^0\,36'$,	$a^2 = 0.0880$
$b = 15$,	$\chi' = 204^0\,32'$,	$\beta' = 47\;\;44$,	$b^2 = 0.0685$
$c = 20\;\;2'$,	$\chi = 147\;\;58$,	$\gamma' = 45$,	$c^2 = 0.1223$

Schreibt man nun wieder die einzelnen Glieder, und die Winkeländerungen in derselben Reihenfolge hin, wie oben, so entstehen

$\begin{cases} -1'',564 \\ -0,005 \end{cases}$	$\begin{cases} -1'',145 \\ -0,004 \end{cases}$	$\begin{cases} -3'',547 \\ -0,012 \end{cases}$
+ 0, 025	+ 0, 025	+ 0, 020
+ 0, 002	— 0, 011	— 0, 029
+ 0, 006	+ 0, 012	+ 0, 007
0	0	0
+ 0, 210	+ 0, 236	+ 0, 227
— 0, 266	— 0, 305	— 0, 374
+ 0, 166	+ 0, 203	+ 0, 184
$\delta C = -1'',426$	$\delta B = -0'',989$	$\delta A = -3'',524$

Sei jetzt $A{=}n''$, dann bekommt man

$a = 15^0$,		$\alpha' = 47^0\,44'$,	$a^2 = 0,0685$
$b = 17$,	$\chi' = 270^0\,10'$,	$\beta' = 31\;\;36$,	$b^2 = 0.0880$
$c = 20\;\;2'$,	$\chi = 317\;\;47$,	$\gamma' = 45$,	$c^2 = 0,1223$

und hiemit

$\begin{cases} -1'',564 \\ -0,005 \end{cases}$	$\begin{cases} -1'',145 \\ -0,004 \end{cases}$	$\begin{cases} -3'',547 \\ -0,012 \end{cases}$
+ 0, 025	+ 0, 025	+ 0, 020
+ 0, 001	+ 0, 009	+ 0, 003
— 0, 025	— 0, 036	— 0, 045
0	0	0
+ 0, 419	+ 0, 471	+ 0, 452
— 0, 159	— 0, 160	— 0, 213
— 0, 093	— 0, 125	— 0, 161
$\delta C = -1'',401$	$\delta A = -0'',965$	$\delta B = -3'',503$

Vergleicht man diese drei Werthe einer jeden Winkeländerung mit einander, so zeigen sich in den letzten Stellen kleine Verschiedenheiten,

die bis auf 0",02 gehen, und keinen anderen Grund haben, als dass bei einem sphäroidischen Dreieck von der Grösse des hier als Beispiel gewählten die Glieder achter und neunter Ordnung, die hier übergangen worden sind, anfangen merklich zu werden; dieses kann nicht unerwartet kommen, da 20° in Theilen des Kreishalbmessers ausgedrückt grösser wie $\frac{1}{3}$ sind. Diese Verschiedenheiten sind indess nicht so gross, dass man nicht, bei der Genauigkeit, die man in den gewöhnlichen Fällen erreichen will, das im Vorhergehenden entwickelte Verfahren bis auf Dreiecke von der Grösse des hier behandelten sollte anwenden können.

142.

Um die Prüfung der Anwendbarkeit unsers Verfahrens noch umfassender auszuführen, habe ich mich mit den zwei im Vorhergehenden aufgestellten Dreiecken nicht begnügt, sondern noch einige in verschiedenen Lagen auf dem Ellipsoid berechnet. Das im vor. Art. behandelte Dreieck liegt nahe in der Mitte zwischen dem Pol und dem Aequator, die Cosinusse der doppelten Breiten werden daher klein, und daraus folgt, dass die Winkeländerungen auch klein werden müssen. Anders verhält sich dieser Umstand bei Dreiecken, die nahe am Pol oder am Aequator liegen, hier werden unter sonst gleichen Umständen die Winkeländerungen möglichst gross, und deshalb habe ich noch zwei Dreiecke von nahe derselben Grösse, wie das vorhergehende berechnet, von welchen das eine an den Pol, und das andere an den Aequator reicht. Für das an den Pol reichende Dreieck habe ich durch Anwendung der Hauptaufgabe des ersten Abschnittes, und indem ich

$$\beta' = 70^0\,, \quad \alpha' = 120^0\,, \quad \sigma = 18^0$$

als gegeben betrachtete, die folgenden Stücke erhalten, welche in der zu Anfang dieses Abschnittes eingeführten Bezeichnungsart ausgedrückt sind

$\beta = 90^0$.	$\beta' = 70^0$	$\beta'' = 71^0\,10'\,45'',62$
$\alpha' = \ldots$	$\alpha_{\prime} = 120$	$\alpha_{\prime\prime} = 246\;\;39\;\;19,88$
$\alpha'' = \ldots$	$\alpha_{\prime}'' = 180$	$\alpha_{\prime\prime}' = 180$
$n = 56\;\;3'\,37'',31$;	$n' = 60$	$n'' = 66\;\;39\;\;19,88$
$\sigma = 18$	$\sigma' = 18\;\;49'\,6'',420$;	$\sigma'' = 19\;\;59\;\;50,476$

Geht man nun zu den in unserer jetzt vorliegenden Aufgabe eingeführten Bezeichnungen über, und setzt zuerst $A = n$, so bekommt man

$$\begin{array}{llll} a = 18^{0} \; ; & \alpha' = 90^{0} \; ; & \log a = 9.49715 \; ; & a^2 = 0.0987 \\ b = 19\;\; 59'\, 50'' \; ; & \beta' = 71\;\; 11' \; ; & \log b = 9.54284 \; ; & b^2 = 0.1218 \\ c = 18\;\; 49\;\;\; 6 \; ; & \gamma' = 70 & \log c = 9.51646 \; ; & c^2 = 0.1079 \end{array}$$

In diesem Falle sind die Azimuthe, die in unsern Ausdrücken vorkommen, der Natur der Sache zufolge unbestimmt, aber zugleich werden die Glieder der Ausdrücke des Art. 138, die die Azimuthe enthalten gleich Null, und diese Ausdrücke bleiben also demungeachtet bestimmt. Sie geben

$$\begin{array}{rrr} \left\{\begin{array}{r} +\,19'',467 \\ +\,0,065 \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{r} +\,18'',328 \\ +\,0,061 \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{r} +\,18'',187 \\ +\,0,061 \end{array}\right\} \\ -\,0,052 & -\,0,041 & -\,0,040 \\ +\,0,102 & +\,0,013 & +\,0,023 \\ +\,0,087 & +\,0,102 & +\,0,099 \\ +\,0,086 & +\,0,086 & +\,0,109 \\ +\,1,221 & +\,1,171 & +\,1,201 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \delta A = +\,20'',976 \; ; & \delta B = +\,19'',720 \; ; & \delta C = +\,19'',640 \end{array}$$

Setzt man hierauf $A = n'$, womit

$$\begin{array}{llll} a = 18^{0}\, 49'\;\; 6'' \; ; & & \alpha' = 70^{0} & a^2 = 0.1079 \\ b = 18 \; ; & \chi' = 120^{0} \; ; & \beta' = 90 & b^2 = 0.0987 \\ c = 19\;\; 59\;\; 50 \; ; & \chi = 180 \; ; & \gamma' = 71\;\; 11' \; ; & c^2 = 0.1218 \end{array}$$

wird, so ergiebt sich, wenn man die drei ersten Glieder, die immer dieselben Werthe bekommen, in Ein Glied zusammen zieht,

$$\begin{array}{rrr} +\,19'',480 & +\,18'',348 & +\,18'',208 \\ +\,0,013 & +\,0,002 & +\,0,066 \\ +\,0,169 & +\,0,116 & +\,0,110 \\ +\,0,109 & +\,0,123 & +\,0,085 \\ +\,1,079 & +\,1,034 & +\,1,061 \\ -\,0,088 & -\,0,063 & -\,0,085 \\ +\,0,210 & +\,0,162 & +\,0,183 \\ \hline \delta B = +\,20'',972 \; ; & \delta C = +\,19'',722 \; ; & \delta A = -\,19'',628 \end{array}$$

Sei endlich $A = n''$, womit

$a = 19^0\,59'\,50''$; $\alpha' = 71^0\,11'$; $a^2 = 0.1218$
$b = 18$; $\chi' = 246^0\,39'$; $\beta' = 90$; $b^2 = 0.0987$
$c = 18\;49\;\;6$; $\chi = 180$; $\gamma' = 70$; $c^2 = 0.1079$

wird, so erhält man

+ 19″ 480	+ 18″,348	+ 18″,208
0, 000	+ 0, 049	— 0, 004
+ 0, 179	+ 0, 106	+ 0, 136
+ 0, 111	+ 0, 080	+ 0, 132
+ 1, 094	+ 1, 049	+ 1, 076
— 0, 072	— 0, 066	— 0, 051
+ 0, 169	+ 0, 142	+ 0, 125
$\delta B = + 20'',960$;	$\delta A = + 19'',708$;	$\delta C = + 19'',622$

Hier weichen die Resultate der drei verschiedenen Berechnungsarten wieder höchstens 0″,02 von einander ab, obgleich die Winkeländerungen weit grösser sind, wie im vorhergehenden Beispiel. Rechnet man aus den oben gegebenen Seiten die Winkel des sphärischen Dreiecks, so findet man

$A + \delta A = 56^0\;\;3'\;\;58'',23$; $\delta A = + 20'',92$
$B + \delta B = 66\;\;39\;\;39,57$; $\delta B = + 19,69$
$C + \delta C = 60\;\;\;0\;\;19,58$; $\delta C = + 19,58$

Die Abweichung dieser Winkeländerungen von den oben berechneten sind etwas grösser wie im vorigen Beispiel, und zwar bezüglich

+ 0″,06 ;	+ 0″,03 ;	+ 0″,06
+ 0, 05 ;	+ 0, 03 ;	+ 0, 05
+ 0, 04 ;	+ 0, 02 ;	+ 0, 04

welches aber nicht unerwartet ist, da hier der Betrag aller Glieder der Winkeländerungen grösser ist wie im vorigen Beispiel. Uebrigens sind die strengen Rechnungen hier nicht mit Logarithmen von so vielen Decimalen ausgeführt worden, dass die Winkel des sphärischen Dreiecks bis auf 0″,005 verbürgt werden könnten.

143.

Für das am Aequator liegende Dreieck habe ich ein gleichschenkliches gewählt, und die folgenden Stücke gefunden,

$\beta = 15^0\,14'\,30'',05$; $\beta' = 0$; $\beta'' = 0$
$\alpha' = 33\;18\;53,21$; $\alpha_, = 90^0$; $\alpha_{,,} = 270^0$
$\alpha'' = -33\;18\;53,21$; $\alpha_,'' = 148$; $\alpha_{,,}' = 212$
$n = 66\;37\;46,42$; $n' = 58$; $n'' = 58$
$\sigma = 19\;32\;31,42$; $\sigma' = 18$; $\sigma'' = 18$

Durch die Annahme $A = n$ gaben nun die Ausdrücke des Art. 138

$\begin{Bmatrix} -19'',475 \\ -0,065 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -20'',199 \\ -0,067 \end{Bmatrix}$
$-0,056$	$-0,057$
$-0,049$	$+0,002$
$-0,096$	$-0,160$
$-0,096$	$-0,128$
$+0,074$	$+0,076$
$-0,537$	$-0,403$
$-0,124$	$-0,128$
$\delta A = -20'',424$;	$\delta B = \delta C = -21'',064$

und durch die Annahme $A = n'$ fand sich, wenn wieder die drei ersten Glieder in Ein Glied zusammen gezogen werden,

$-19'',596$	$-20'',323$	$-20'',323$
$-0,007$	$-0,085$	$-0,018$
$-0,104$	$-0,093$	$-0,148$
$-0,119$	$-0,085$	$-0,103$
0	0	0
$-0,594$	$-0,446$	$-0,446$
0	0	0
$\delta C = -29'',420$;	$\delta A = -21'',032$;	$\delta B = -21'',038$

Die Annahme $A = n''$ ist hier nicht nöthig durchzuführen, da sie dasselbe Resultat geben muss wie die vorhergehende. Aus der strengen Berechnung des sphärischen Dreiecks ergab sich

$$A + \delta A = 66^0\,37'\,26'',04\;; \quad \delta A = -20'',38$$
$$B + \delta B = 57\;\;59\;\;38,96\;; \quad \delta B = -21,04$$
$$C + \delta C = 57\;\;59\;\;38,96\;; \quad \delta C = -21,04$$

und die Vergleichung dieser Werthe der Winkeländerungen mit den oben erhaltenen giebt bezüglich

$- 0'',04\,; \quad - 0'',02\,; \quad - 0'',02$
$- 0,04\,; \quad + 0,01\,; \quad + 0,01$

Die Umstände sind hier nahe dieselben wie im nächst vorhergehenden Beispiel.

144.

Es wurde oben gesagt, dass die kleinen Verschiedenheiten, die die verschiedenen Berechnungsarten gegeben haben, Folge der hier übergangenen Glieder achter und höherer Ordnungen seien. Demzufolge müssen sie geringer werden, wenn die Dimensionen des Dreiecks kleiner sind, und um darzuthun, dass dieses in der That statt findet, habe ich ausser den drei vorhergehenden Dreiecken von nahe gleicher Grösse ein etwas kleineres sphäroidisches Dreieck, und zwar das folgende, berechnet.

$$\begin{array}{lll}
\beta = 54^0\,42'\,10'',20\,; & \beta' = 38^0\,36'\;\;2'',64\,; & \beta'' = 50^0 \\
\alpha' = 285\;\;32\;\;55,97\,; & \alpha_{,} = 211\;\;55\;\;\;0,55\,; & \alpha_{,,} = 40 \\
\alpha'' = 341\;\;33\;\;25,81\,; & \alpha_{,}'' = 166\;\;28\;\;23,15\,; & \alpha_{,,}' = 120 \\
n = 56\;\;\;0\;\;29,84\,; & n' = 45\;\;26\;\;37,40\,; & n'' = 80 \\
\sigma = 14 \qquad\qquad ; & \sigma' = 12 \qquad\qquad ; & \sigma'' = 16\;\;11'57'',264
\end{array}$$

Nimmt man nun zuerst $A = n$ an, so bekommt man auf dieselbe Art wie vorher

$$\begin{array}{rrr}
\left\{\begin{array}{r}+\,1'',794\\+\,0.006\end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{r}+\,0'',182\\+\,0.001\end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{r}+\,1'',332\\+\,0.004\end{array}\right\} \\
+\,0.015 & +\,0.016 & +\,0.016 \\
+\,0.009 & +\,0.004 & -\,0.001 \\
-\,0.008 & -\,0.012 & -\,0.006 \\
+\,0.006 & +\,0.008 & +\,0.007 \\
+\,0.246 & +\,0.258 & +\,0.227 \\
-\,0.081 & -\,0.098 & -\,0.070 \\
-\,0.066 & -\,0.086 & -\,0.057 \\
\hline
\delta A = +\,1'',921\,; & \delta B = +\,0'',273\,; & \delta C = +\,1'',452
\end{array}$$

Die Annahme $A = n'$ giebt

$$\begin{array}{rrr}
+\ 1'',815 & +\ 0'',199 & +\ 1'',352 \\
-\ 0.004 & -\ 0.009 & -\ 0.002 \\
+\ 0.014 & +\ 0.012 & +\ 0,008 \\
+\ 0.006 & +\ 0.006 & +\ 0.006 \\
+\ 0.144 & +\ 0.151 & +\ 0.132 \\
-\ 0.153 & -\ 0.180 & -\ 0.127 \\
+\ 0.093 & +\ 0.089 & +\ 0.078 \\
\hline
\delta B = +\ 1'',915\ ; & \delta A = +\ 0'',268\ ; & \delta C = +\ 1'',447
\end{array}$$

und die Annahme $A = n''$ giebt

$$\begin{array}{rrr}
+\ 1'',815 & +\ 0'',199 & +\ 1'',352 \\
-\ 0.002 & -\ 0.001 & +\ 0.001 \\
+\ 0.020 & +\ 0.018 & +\ 0.010 \\
-\ 0.010 & -\ 0.014 & -\ 0.007 \\
+\ 0.217 & +\ 0.228 & +\ 0.200 \\
-\ 0.110 & -\ 0.121 & -\ 0.085 \\
-\ 0.010 & -\ 0.037 & -\ 0.019 \\
\hline
\delta C = +\ 1'',920\ ; & \delta B = +\ 0'',272\ ; & \delta A = +\ 1'',452
\end{array}$$

Hier giebt sich in der That, wie oben vorausgesetzt wurde, zu erkennen, dass die Resultate der drei verschiedenen Berechnungsarten weit näher mit einander übereinstimmen, wie bei den vorhergehenden, grösseren Dreiecken der Fall war. Denn während dort der grösste Unterschied auf 0'',02 bis 0'',03 stieg, erreicht er hier höchstens 0'',006. Berechnet man das sphärische Dreieck strenge, so findet man

$$\begin{array}{ll}
A + \delta A = 56^0\ 0'\ 31'',74\ ; & \delta A = +\ 1'',90 \\
B + \delta B = 45\ 26\ 37,\ 68\ ; & \delta B = +\ 0,\ 28 \\
C + \delta C = 80\ \ 0\ \ 1,\ 47\ ; & \delta C = +\ 1,\ 47
\end{array}$$

und hiemit werden die Unterschiede von den oben berechneten Werthen der Winkeländerungen ohne Unterschied

$$-\ 0'',02\ ;\quad +\ 0'',01\ ;\quad +\ 0'',02$$

die für befriedigend gehalten werden müssen. Denn obgleich ich hier wieder die strengen Rechnungen mit Logarithmen von acht Decimalen ausgeführt habe, so zeigte sich doch am Ende derselben, dass dieses nicht ausreichend war um in den Winkeln des sphärischen Dreiecks einen Fehler von nicht mehr wie 0'',005 vollständig verbürgen zu können.

145.

Ausserdem will ich einer Eigenthümlichkeit wegen, die die Winkeländerungen darbieten können, und die in den vorstehenden Dreiecken nicht vorkommt, noch ein Dreieck einschalten, aber ganz kurz behandeln. Die folgenden Stücke, die grösstentheils nur mit Logarithmen von fünf Decimalen berechnet worden sind,

$$\begin{array}{lll}
\beta = 50^0\ 8',0\,; & \beta' = 34^0\ 4',6\,; & \beta'' = 45^0 26',7 \\
\alpha' = 80\ \ 0.0\,; & \alpha_{,}'' = 211\ 41.8\,; & \alpha_{,,} = 339\ 35.7 \\
\alpha'' = 42\ 45.7\,; & \alpha_{,} = 162\ 49.2\,; & \alpha_{,,}' = 244\ \ 7.8 \\
n = 37\ 14.3\,; & n' = 48\ 52.6\,; & n'' = 95\ 27.9 \\
\sigma = 12\ \ 0.0\,; & \sigma' = 15\ \ 0.0\,; & \sigma'' = 20\ \ 0.0
\end{array}$$

gehören einem sphärischen Dreieck an, neben welchem, um die Breiten und Azimuthe zu erhalten, auf der Kugel ein passender Punkt als Pol betrachtet worden ist. Wenn man von den vorstehenden Dreiecksstücken die Anzahl unverändert lässt, die für die Berechnung eines sphäroidischen Dreiecks nothwendig und hinreichend ist, und damit das sphäroidische Dreieck berechnet, so ist es klar, dass die übrigen Stücke des letzteren von den übrigen obigen Stücken nur wenig abweichen werden. Von der anderen Seite betrachtet, ist es für die Erlangung von sehr genauen Werthen der Winkeländerungen durch die Ausdrücke des Art. 138 nicht erforderlich die Dreiecksstücke, die dazu angewandt werden müssen, mit grosser Schärfe zu kennen, und man kann daher aus den obigen Daten schon die Winkeländerungen des angedeuteten sphäroidischen Dreiecks mit vieler Genauigkeit berechnen. Diese Rechnung gab die folgenden Resultate, die ich auf dieselbe Art wie vorher aufgestellt habe.

$A = n.$

$$\begin{array}{rrr}
\left\{\begin{array}{r} 0'',000 \\ 0.000 \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{r} -\ 1'',742 \\ -\ 0.006 \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{r} -\ 0'',515 \\ -\ 0.002 \end{array}\right\} \\
+\ 0.018 & +\ 0.016 & +\ 0.018 \\
+\ 0.012 & +\ 0.006 & +\ 0.002 \\
-\ 0.019 & -\ 0.021 & -\ 0.008 \\
+\ 0.001 & +\ 0.001 & +\ 0.001 \\
+\ 0.317 & +\ 0.298 & +\ 0.258 \\
-\ 0.094 & -\ 0.116 & -\ 0.083 \\
-\ 0.096 & -\ 0.117 & -\ 0.075 \\
\hline
\delta A = +\ 0'',139 & \delta B = -\ 1'',681 & \delta C = -\ 0'',406
\end{array}$$

$A = n'$.

$+\,0'',018$	$-\,1'',732$	$-\,0'',499$
$-\,0.009$	$-\,0.016$	$+\,0.003$
$+\,0.001$	$+\,0.001$	$+\,0,001$
$+\,0.013$	$+\,0.009$	$+\,0.005$
$+\,0.169$	$+\,0.159$	$+\,0.138$
$-\,0.204$	$-\,0.231$	$-\,0.164$
$+\,0.139$	$+\,0.119$	$+\,0.101$
$\delta C = +\,0'',127$,	$\delta A = -\,1'',691$,	$\delta B = -\,0'',415$

$A = n''$.

$+\,0'',018$	$-\,1'',732$	$-\,0'',499$
0.000	0.000	0.000
$+\,0.017$	$+\,0.013$	$+\,0,007$
$-\,0.032$	$-\,0.034$	$-\,0.014$
$+\,0.273$	$+\,0.257$	$+\,0.224$
$-\,0.160$	$-\,0.176$	$-\,0,124$
$+\,0.019$	$-\,0.015$	$-\,0.001$
$\delta B = +\,0'',135$	$\delta C = -\,1'',687$	$\delta A = -\,0'',407$

Die Eigenthümlichkeit, die dieses Dreieck darbietet, besteht darin, dass in der Aenderung des Winkels n das erste Glied, welches in der Regel das grösste ist, Null wird. Im Uebrigen bietet dieses Dreieck in den Winkeländerungen ähnliche Umstände da, wie die vorhergehenden Dreiecke.

146.

Ich meine durch die vorhergehenden Beispiele das in diesem Abschnitt entwickelte Verfahren zur Auflösung von sphäroidischen Dreiecken, durch ihre Reduction auf sphärische, in Bezug auf dessen Anwendbarkeit ausreichend erläutert zu haben, kann aber dieses Thema nicht schliessen, ohne eine interessante und wichtige Eigenschaft, die die Ausdrücke des Art. 138 besitzen, aus einander gesetzt zu haben, und die durch die numerischen Beispiele aufgedeckt worden ist.

Das erste Glied einer jeden der im Vorhergehenden berechneten Winkeländerungen ist das Resultat, welches man erhalten haben würde,

wenn die Rechnung nach den Ausdrücken (112) geführt worden wäre. Denn das erste Glied eines jeden der drei Ausdrücke des Art. 138 ist bez. mit einem der drei Ausdrücke (112) identisch. Analysirt man dieses Glied, so wird man finden, dass es Glieder der vierten, fünften, und der höheren Ordnungen enthält, und diese sind daher auch in dem numerischen Betrage desselben enthalten, in so weit die letztgenannten merklich werden. Es ist aber nur bis auf Grössen sechster Ordnung richtig, weil die anderweitigen Glieder sechster und höherer Ordnungen nicht darin enthalten sind. Diese sind aber in den Ausdrücken des Art. 138 mit enthalten, und es sind überhaupt die Glieder, durch welche sich diese Ausdrücke von den (112) unterscheiden, die in den letzteren fehlenden Glieder sechster und siebenter Ordnung. Von diesen sind die mit $\cos 2\alpha'$, $\cos^2 2\alpha'$, $\sin^2\alpha'$, $\cos^2\alpha'$ multiplicirten blos von der sechsten Ordnung, die mit $\cos 2\beta'$ und $\cos 2\gamma'$ multiplicirten von der sechsten, siebenten und höheren Ordnungen; das letzte endlich, welches mit $\sin\alpha' \cos\alpha'$ multiplicirt ist, enthält blos Glieder der siebenten Ordnung. Die numerischen Angaben der vorhergehenden Artikel zeigen nun für jedes Beispiel den numerischen Betrag eines jeden dieser Glieder, und man kann diese leicht so anordnen, dass die verschiedenen Ordnungen von einander getrennt erscheinen.

Für unsern Zweck ist es nun erforderlich, dass zuerst im ersten Gliede nur die Glieder vierter Ordnung von denen höherer Ordnungen getrennt werden, und da leicht gezeigt werden kann, dass jene sowohl für δA wie für δB und δC sich in das einzige Glied $-\frac{1}{8}\,\Delta\, e^2 \sin 2\alpha'$ zusammen ziehen, so braucht man nur den Werth dieses Gliedes zu berechnen, und denselben vom Betrage des unveränderten Gliedes abzuziehen, um die verlangte Trennung zu erhalten. Wendet man diese Rechnung auf das Beispiel des Art. 141 an, in welchem die hier zu betrachtenden Umstände am Meisten hervortreten, so ergeben sich die folgenden Zusammenstellungen

δA, δB, δC für $A = n$.

	δA	δB	δC
Glieder 4ter Ordn.	0	0	0
„ 5ter, etc. „	— 1″,564	— 1″,145	— 3″,547

δC, δB, δA für $A = n'$.

Glieder 4ter Ordn.	$-7'',932$	$-7'',932$	$-7'',932$
„ 5ter, etc. „	$+6,368$	$+6,787$	$+4,385$
Summen	$-1'',564$	$-1'',145$	$-3'',547$

wie oben.

δC, δA, δB für $A = n''$.

Glieder 4ter Ordn.	$+1'',676$	$+1'',676$	$+1'',676$
„ 5ter, etc. „	$-3,240$	$-2,821$	$-5,223$
Summen	$-1'',564$	$-1'',145$	$-3'',547$

wie oben. Hier bemerkt man zuerst, dass sowohl der Betrag der Glieder vierter Ordnung für sich, so wie der der Glieder höherer Ordnungen sehr verschieden ausfällt, jenachdem die eine oder die andere der drei verschiedenen Berechnungsarten angewandt worden ist, während die Summe aller dieser Glieder einen feststehenden Werth hat. Auch giebt sich zu erkennen, dass die Glieder fünfter Ordnung weit grösser werden können wie die der vierten; dieses ist in unserm Beispiel bei $A = n$ und $A = n''$ der Fall, und im ersteren Falle werden die Glieder vierter Ordnung sogar gleich Null. Man sieht ein, dass diese Umstände, obgleich in verkleinertem Maasse, auch bei den kleinsten Dreiecken vorkommen können, und dass daher die blose Berücksichtigung der Glieder vierter Ordnung jedenfalls nur ein ungenaues Resultat hervorbringen kann.

Betrachten wir jetzt die übrigen Glieder unserer Ausdrücke, so lässt sich eine ähnliche Trennung der Glieder sechster und höherer Ordnungen auch leicht bewerkstelligen, man braucht nur allenthalben $\cos 2\alpha'$ für $\cos 2\beta'$ und $\cos 2\gamma'$ zu setzen, und nach dieser Veränderung den numerischen Betrag der betreffenden Glieder wieder zu berechnen; dieser ist die Summe der in diesen Gliedern enthaltenen Glieder sechster Ordnung, und zieht man ihn vom vollständigen Werthe ab, so ergeben sich die in diesen Gliedern enthaltenen Glieder höherer Ordnungen. Auf diese Art habe ich die folgenden Zusammenstellungen erhalten, denen ich die oben schon angeführten anreihe, um die so geordneten Ausdrücke vollständig beisammen zu haben.

[illegible] für $A = n$.

[illegible]	[illegible]	0	0
[illegible]	[illegible]4	— 1″,145	— 3″,547
[illegible]	[illegible]. 217	+ 0. 220	+ 0. 166
[illegible]	— [illegible]. 060	— 0. 043	— 0. 127
[illegible]	— [illegible].407 ,	— 0″, 968 ,	— 3″,508 ,

[illegible] δB, δA für $A = n'$.

[illegible] Ordn.	— 7″,932	— 7″,932	— 7″,932
[illegible] etc. „	+ 6, 368	+ 6, 787	+ 4, 385
[illegible] „	— 0. 098	— 0. 149	— 0. 226
[illegible] etc. „	+ 0. 236	+ 0. 305	+ 0. 249
[illegible] im Art. 141	— 1″,426 ,	— 0″,989 ,	— 3″,524

δC, δA, δB für $A = n''$.

[illegible] 1ter Ordn.	+ 1″,676	+ 1″,676	+ 1″,676
[illegible] 3ter, etc. „	— 3, 240	— 2, 821	— 5, 223
[illegible] 6ter „	+ 0. 302	+ 0. 362	+ 0. 288
[illegible] 7ter, etc, „	— 0. 139	— 0. 182	— 0. 244
[illegible] wie im Art. 141	— 1″,401	— 0″,965	— 3″,503

[illegible] zeigt sich in Bezug auf die Glieder sechster und siebenter Ordnung ein ähnliches Verhalten wie das oben bei den Gliedern vierter und fünfter Ordnung wahrgenommene. Die Glieder sechster Ordnung für eine und dieselbe Winkeländerung bekommen in den drei verschiedenen Berechnungsarten verschiedene Werthe, deren Schwankungen bis auf 0″,5 steigen, und die Glieder siebenter Ordnung haben dieselben Schwankungen im entgegengesetzten Sinne, so dass, vorbehältlich der kleinen Unterschiede, die von anfangender Wirkung der Glieder höherer Ordnung zeugen, die Summe der Glieder sechster und siebenter Ordnung feststehende Werthe bekommen. Die Rechnung für $A = n'$ zeigt überdiess, dass auch die Summe der Glieder siebenter Ordnung beträchtlich grösser werden kann, wie die der sechsten Ordnung. Es folgt aus diesem, dass die blose Hinzufügung der fehlenden Glieder sechster Ordnung zu den Ausdrücken (112) gar keinen Nutzen herbeigeführt haben würde, und dass nur die Mitaufnahme der Glieder siebenter Ordnung eine wesentliche Vergrösserung der Genauigkeit in den Resultaten bewirkt hat.

In den Dreiecken, die an den Pol, oder an den Aequator reichen, treten diese Umstände auch, nur nicht in so grossem Maasse wie in dem hier betrachteten Dreieck, hervor, aber in dem Dreieck des Art. 144 werden sie, namentlich in der zweiten Berechnungsart, wieder sehr merklich, weshalb ich in Bezug auf diese dieselbe Trennung der Glieder vornehmen will. Man erhält für dieses Dreieck

δB, δA, δC für $A = n'$.

	δB	δA	δC
Glieder 4ter Ordn.	— 2",580	— 2",580	— 2",580
„ 5ter, etc. „	+ 4. 374	+ 2. 762	+ 3. 912
„ 6ter „	— 0. 022	— 0. 045	— 0. 001
„ 7ter, etc. „	+ 0. 143	+ 0. 131	+ 0. 116
Sn. wie im Art. 144	+ 1",915,	+ 0",268,	+ 1",447

Hier sind, wie man sieht, nicht blos die Glieder fünfter Ordnung grösser wie die der vierten, sondern dasselbe findet zugleich in Bezug auf die Glieder siebenter und sechster Ordnung statt. In den Ausdrücken für die Fläche des sphäroidischen Dreiecks, und in den für die Summe der Winkel desselben kann Aehnliches auch vorkommen.

Es ist noch eines Umstandes zu erwähnen. In der Regel ist die Summe der Glieder vierter und fünfter Ordnung bedeutend grösser wie die Summe der Glieder sechster und siebenter Ordnung, und es lässt sich voraus sehen, dass die Summe der Glieder achter und neunter Ordnung auch wesentlich kleiner sein wird, wie die der sechsten und siebenten Ordnung u. s. w., wenn man nur die Dreiecke nicht allzu gross auswählt; hierin spricht sich im Allgemeinen die Convergenz der Ausdrücke aus. Man kann aber auch Dreiecke angeben in welchen diese Regel eine Ausnahme erleidet, und für Einen, ja selbst für zwei Dreieckswinkel das erste Glied, also die Summe der vierten, und der damit verbundenen Glieder fünfter und höherer Ordnungen kleiner wie die Summe der übrigen Glieder sechster und höherer Ordnungen, und sogar gleich Null wird. Um dieses auch durch ein Beispiel, wenigstens an Einem Winkel zu zeigen, ist das Dreieck des Art. 145 berechnet worden. Auf die Convergenz der Ausdrücke hat dieser Umstand übrigens keinen Einfluss.

Schliesslich bemerke ich noch, dass das im Vorhergehenden entwickelte Verfahren nicht blos in dem Falle Anwendung findet, in welchem die drei Dreiecksseiten ursprünglich gegeben sind, sondern allge-

mein bei vielfach anderen gegebenen Stücken des Dreiecks auch angewandt werden kann. Es bildet daher dieses Verfahren eine besondere Auflösungsart von sphäroidischen Dreiecken, die nicht grösser sind, wie die oben beispielsweise betrachteten.

147.

Die Formeln zur Reduction eines sphärischen Dreiecks auf ein ebenes brauchen wohl nicht durch Beispiele erläutert zu werden, da sie so sehr einfach sind, es möchte aber dagegen die Zusammenstellung der Correctionen, die man an die beobachteten Richtungen oder Winkel eines Dreiecksnetzes vor der Ausgleichung desselben anbringen muss, als Schluss dieses Abschnittes nicht am unrechten Platze sein.

Zuerst ist der erste Ausdruck (53) zu berücksichtigen, der ohne die Genauigkeit, die er besitzt, zu beeinträchtigen, wie folgt gestellt werden kann,

$$(135)\quad R = R_0 - \frac{e^2}{6r}\,\sigma^2 \cos^2\beta' \sin\alpha' \cos\alpha' - \frac{e^2}{24r^2}\,\sigma^3 \sin\beta' \cos\beta' \sin\alpha'$$

wo die Bezeichnungen in den Correctionsgliedern die des zweiten Abschnittes sind. Es bedeuten also σ die in Bogentheilen ausgedrückte Dreiecksseite, deren Richtung man eingeschnitten hat, α' das Azimuth derselben, β' die reducirte Breite des Beobachtungsortes, die nur mit geringer Genauigkeit hiefür bekannt zu sein brauchen, und es ist $r = 206265''$. Wenn σ in irgend einem Linearmaasse statt in Bogentheilen ausgedrückt ist, so ist es leicht den Ausdruck der Constante zu finden, die an die Stelle von r gesetzt werden muss; man kann sich auch begnügen für β' die Polhöhe des Stationsortes zu substituiren. Es bezeichnen hier ferner R_0 die beobachtete, und R die verbesserte, aufs geodätische Azimuth hingeführte Richtung.

Wenn nicht Richtungen, sondern Winkel beobachtet worden sind, so zerlegt man diese in die Richtungen ihrer beiden Schenkel und bringt an jedem dieser die durch (135) gegebene Correction an.

Hierauf sind die aus den Ausdrücken (96) und (112) hervorgehenden Correctionen zu berechnen, und an die aus den Richtungen folgenden, oder unmittelbar beobachteten Winkel anzubringen. Oftmals kann man sich begnügen statt der einzelnen Werthe der (96) und (112) die

dabei angegebenen Summen derselben zu benutzen, und damit die Summe der durch die Beobachtungen erhaltenen Winkel der einzelnen Dreiecke zu verbessern. Wenn dieses geschehen ist, kann das ganze Dreiecksnetz als auf der Ebene liegend betrachtet werden, und die trigonometrischen Bedingungen, die zur Ausgleichung desselben erforderlich sind, müssen der ebenen Trigonometrie entnommen werden.

Nach vollendeter Ausgleichung müssen die aus den Ausdrücken (96) und (112) entsprungenen Correctionen, wenn sie vorher an die einzelnen Winkel angebracht worden sind, wieder davon abgezogen werden, die aus der (135) hervorgegangenen hingegen an den Richtungen und Winkeln belassen werden.

Die Ausführung der Berechnung der eben genannten Correctionen setzt eine vorläufige Berechnung des Dreiecksnetzes voraus, die also vorangegangen sein muss, und auch aus anderen Ursachen nicht entbehrt werden kann.

Im Vorhergehenden sind alle nothwendigen Correctionen vollständig enthalten, allein man wird in der Anwendung finden, dass gemeiniglich diejenigen, die sich auf die Uebertragung der sphäroidischen Dreiecke auf sphärische, so wie die Correction der Azimuthe beziehen, unmerklich werden, und nur dann, wenn die Beschaffenheit des Bodens die unmittelbare Messung von besonders grossen Dreiecken gestattet hat, etwas Merkliches geben können. In den Dreiecken gewöhnlicher Ausdehnung kann man sich gemeiniglich begnügen blos die Ausdrücke (96), und zwar mit Weglassung der Glieder vierter Ordnung, mit anderen Worten, den Legendre'schen Satz anzuwenden. Man thut jedoch wohl, sich mit der Wirkung der Ausdrücke (135) und (112) im Allgemeinen bekannt zu machen, um eine Uebergehung derselben in den Fällen, wo sie nicht ganz unmerklich sein sollten, zu vermeiden. *)

Es darf nicht übersehen werden, dass in diesem Artikel blos von den bei der Ausgleichung der wirklich beobachteten Richtungen oder Winkel eines Dreiecksnetzes zu beachtenden Umständen die Rede ist,

---

*) In der englischen Ordonance Survey kommt ein Dreieck vor, in welchem die Summe der Winkel $180^0\,1'\,4'',9$ beträgt. Hier wird $\Delta e^2 = 0'',43$, und die Reduction eines solchen Dreiecks auf ein sphärisches, sowohl wie der Ausdruck (135), können daher sehr wohl etwas Merkliches geben.

und dass nur in Bezug auf diese die Unterschiede zwischen den sphäroidischen Richtungen oder Winkeln häufig unmerklich sind. Diesem steht die weitere Berechnung des Dreiecksnetzes, in welcher die unmittelbar gemessenen Dreiecke zu grösseren mit einander verbunden werden müssen, gegenüber; in diesen Verbindungen ist die Berücksichtigung der Ellipticität der Erdoberfläche unerlässlich nothwendig, da sie bedeutenden Einfluss äussern kann, und hier kommen sowohl die Aufgaben der vorhergehenden Abschnitte, wie die Hauptaufgabe dieses Abschnittes und die, welche im folgenden Abschnitte noch gelöst werden soll, wesentlich in Betracht.

Vierter Abschnitt.

148.

Die im vorigen Abschnitt für beliebig grosse Dreiecksseiten entwickelten Ausdrücke zur Reduction der Winkel des sphäroidischen Dreiecks auf die eines sphärischen sind noch einer anderen Anwendung fähig, die auf die Auflösung einer neuen Klasse von Aufgaben führt. Die in den Artt. 92, 95, 98 für diese Reduction erhaltenen Ausdrücke, die sich noch dazu auf ein besonderes sphäroidisches Dreieck beziehen, sind zu zusammengesetzt als dass sie einer fortgesetzten Anwendung fähig sein könnten, und würden noch zusammengesetzter werden, wenn man sie auf das allgemeine sphäroidische Dreieck ausdehnen wollte. Eine Hinführung derselben auf eine einfachere Form scheint im Allgemeinen nicht möglich zu sein, dagegen giebt es einen besonderen Fall, in welchem sie sich wesentlich vereinfachen, und dieser Fall ist einer mannigfachen Anwendung fähig.

149.

Die grösseren Dreiecke deren Auflösung in der Geodäsie verlangt wird, um von den ausgeglichenen Dreiecksnetzen auf die Gestalt des Erdkörpers zu schliessen, sind grösstentheils solche deren eine Ecke in einem der beiden Pole des Ellipsoids liegt. Solche Dreiecke haben auch die Hauptaufgaben des ersten und des zweiten Abschnittes ge-

bildet, und wendet man die eben erwähnten Reductionsformeln auf ein solches Dreieck an, so werden sie viel einfacher. Zu dem Ende muss man den Punkt D der Figur des Art. 84 in den Pol P verlegen, wodurch die Seite DE mit dem Meridian PC zusammenfällt, und das Dreieck GPE hervorgeht. Da hierauf $\beta = 90^0$ wird, so reduciren sich die genannten Reductionsformeln alle drei auf ihr erstes, von β unabhängiges Glied, und werden folglich viel einfacher.

150.

Für die jetzt zu erreichenden Zwecke wird es dienlich sein eine neue Bezeichnung einzuführen. Setzen wir in dem sphäroidischen Dreieck PGE der Figur die Seiten und die Winkel

$$PG = \Sigma' , \quad PGE = 180^0 - \alpha'$$
$$PE = \Sigma'' , \quad PEG = \alpha''$$
$$EG = \sigma , \quad EPG = \lambda$$

und bezeichnen die reducirte Breite des Punkts G mit β', und die des Punkts E mit β'', dann ist die Analogie mit den früheren Bezeichnungen hergestellt. Seien ausserdem in dem correspondirenden sphärischen Dreieck die Winkel bez.

$$180^0 - A' , \quad A'' , \quad \varDelta$$

und die Winkeländerungen $\varDelta\alpha'$, $\varDelta\alpha''$, $\varDelta\lambda$ so verstanden, dass

$$\alpha' = A' + \varDelta\alpha'$$
$$\alpha'' = A'' + \varDelta\alpha''$$
$$\lambda = \varDelta + \varDelta\lambda$$

werden, so dürfen wir ohne Nachtheil der Genauigkeit in den Reductionsformeln der Artt. 92, 95, 98, nachdem darin $\beta = 90^0$ gemacht worden ist,

$\varDelta\alpha'$	statt	$\varDelta m$
$-\varDelta\alpha''$	„	$\varDelta n'$
$-\varDelta\lambda$	„	$\varDelta\alpha''$
σ	„	φ
Σ'	„	φ'
Σ''	„	χ''
$180^0 - A'$	„	m
A''	„	n'
$\varDelta$	„	α''

setzen, und erhalten damit, wenn zur Abkürzung

$$Q' = \frac{1}{4} e^2 \left\{ \frac{\Sigma'}{\sin\Sigma'} - \frac{\sigma}{\sin\sigma} \cos\Sigma'' \right\}$$

$$Q'' = \frac{1}{4} e^2 \left\{ \frac{\Sigma''}{\sin\Sigma''} - \frac{\sigma}{\sin\sigma} \cos\Sigma' \right\}$$

gesetzt wird,

$$\Delta\alpha' = Q' \operatorname{cotg} A - Q'' \frac{\sin A'}{\sin A'' \sin A}$$

$$+ \frac{1}{4} e^2 \frac{\sigma}{\sin\sigma} \sin A'' \cos A'' \sin^2\Sigma'' - \frac{1}{4} r e^2 \sin A' \cos A' \sin^2\Sigma'$$

$$\Delta\alpha'' = Q' \frac{\sin A''}{\sin A' \sin A} - Q'' \operatorname{cotg} A$$

$$+ \frac{1}{4} e^2 \frac{\sigma}{\sin\sigma} \sin A' \cos A' \sin^2\Sigma' - \frac{1}{4} r e^2 \sin A'' \cos A'' \sin^2\Sigma''$$

$$\Delta\lambda = Q' \operatorname{cotg} A' - Q'' \operatorname{cotg} A''$$

deren Berechnung einfach ist. Ich füge hinzu dass man

$$\log \frac{1}{4} e^2 = 7.22235 \; ; \quad \log \frac{1}{4} r e^2 = 2.53677$$

erhält.

151.

Indem ich nun annehme, dass β', β'', σ gegeben sind, so ist hiemit nur eine Dreiecksseite unmittelbar gegeben, und die beiden anderen müssen erst aus β' und β'' berechnet werden, und dieses geschieht durch die Aufgabe des Art. 63, in welcher die eine Breite, oder Polhöhe $= 90^0$ zu setzen ist. Wendet man die dort gegebene Auflösung, unter der genannten Annahme, auf den Ausdruck (91) an, so findet man leicht

$$(136) \quad . \begin{cases} \chi' = 90^0 - \beta' \; ; \quad \chi'' = 90^0 - \beta'' \\ \Sigma' = \chi' - A'\chi' + B' \sin 2\chi' - C' \sin 4\chi' \\ \Sigma'' = \chi'' - A'\chi'' + B' \sin 2\chi'' - C' \sin 4\chi'' \end{cases}$$

woraus die Dreiecksseiten Σ' und Σ'' hervorgehen, wenn

$$\log A' = 7.2228952 \; ; \quad \log B' = 2.2364718 \; ; \quad \log C' = 8.55719$$

gesetzt werden. Um Alles beisammen zu haben, führe ich noch die ausserdem anzuwendenden Formeln der sphärischen Trigonometrie an.

$$\left.\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}(\Sigma' + \Sigma'' + \sigma) \\ T &= \sqrt{\frac{\sin(S-\Sigma')\sin(S-\Sigma'')\sin(S-\sigma)}{\sin S}} \\ \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A' &= \frac{T}{\sin(S-\Sigma'')} \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A'' &= \frac{T}{\sin(S-\Sigma')} \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varDelta &= \frac{T}{\sin(S-\sigma)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (137)$$

152.

Ich werde nun zuerst an zwei Beispielen zeigen wie nahe die eben erhaltenen Reductionsformeln mit der strengen Rechnung übereinstimmen. Zuerst nehme ich das grösste Dreieck vor, welches in dieser Abhandlung vorkommt, nemlich das zwischen Santiago, Moskau und dem Nordpol der Erde. Nach dem Art. 69 sind in diesem Dreieck

$$\begin{aligned} \beta' &= 55^0\,39'\,38'',49\;, & \alpha' &= 83^0\,23\;\,51^0,20 \\ \beta'' &= -33\;\;20\;\;42,63\;, & \alpha'' &= 42\;\;7\;\;37,98 \\ \sigma &= 126\;\;46\;\;18,17\;, & \lambda &= 108\;\;13\;\;0,00 \end{aligned}$$

Wendet man zuerst die Ausdrücke (136) an, so findet man

$$\begin{aligned} \Sigma' &= 34^0\;19'\;35'',54 \\ \Sigma'' &= 123\;\;5\;\;42,43 \end{aligned}$$

Aus den jetzt bekannten Seiten dieses Dreiecks geben nun die obigen Formeln (137)

$$\begin{aligned} A' &= 83^0\;25'\;58'',0 \\ A'' &= 41\;\;57\;\;58,8 \\ \varDelta &= 108\;\;13\;\;5,1 \end{aligned}$$

und durch die Anwendung der Reductionsformeln des vorvor. Art. bekommt man

$$\begin{aligned} \varDelta\alpha' &= -\;2'\;4'',5 \\ \varDelta\alpha'' &= +\;9\;\;33,3 \\ \varDelta\lambda &= -\;0\;\;6,5 \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} \alpha' &= 83^0\;23'\;53'',5 \\ \alpha'' &= 42\;\;7\;\;32,1 \\ \lambda &= 108\;\;12\;\;58,6 \end{aligned}$$

Die Unterschiede mit den oben angeführten, strenge berechneten Winkeln sind also nur

$$+\,2'',3\,; \quad -\,5'',9\,; \quad -\,1'',4$$

in Betracht der ansehnlichen Grösse dieses Dreiecks, dessen sphärischer Ueberschuss 66°45′ beträgt, sehr geringe.

153.

Als zweites Beispiel soll das langgestreckte, schmale Dreieck zwischen Christiania, Palermo und dem Nordpol der Erde dienen. Die Art. 38 oder 71 geben die genauen Werthe

$$\begin{aligned} \beta' &= 59^\circ\,50'\;\;0'',19\,, & \alpha' &= 5^\circ\,34'\,56'',12 \\ \beta'' &= 38\;\;\;1\;\;24,73\,, & \alpha'' &= 3\;\;33\;\;27,42 \\ \sigma &= 21\;\;50\;\;33,91\,, & \lambda &= 2\;\;38\;\;\;0,00 \end{aligned}$$

und hiemit geben die Ausdrücke (136)

$$\begin{aligned} \Sigma' &= 30^\circ\;\;9'\,28'',12 \\ \Sigma'' &= 51\;\;56\;\;\;9,97 \end{aligned}$$

Die sphärische Trigonometrie giebt hierauf durch die (137)

$$\begin{aligned} A' &= 5^\circ\,34'\,53'',1 \\ A'' &= 3\;\;33\;\;29,2 \\ \varLambda &= 2\;\;38\;\;\;3,6 \end{aligned}$$

*) und die Reductionsformeln des Art. 150

$$\begin{aligned} \log Q' &= 2.15586 \\ \log Q'' &= 1.96057 \end{aligned}$$

hiemit wird

$$\begin{aligned} \Delta\alpha' &= +\,3'',1 \\ \Delta\alpha'' &= -\,1,7 \\ \Delta\lambda &= -\,3,6 \end{aligned}$$

woraus

---

*) Ich bemerke hiezu, dass die Zehntelsecunden in diesen Winkeln möglicher Weise um einige wenige Einheiten unrichtig sein können, da hier 0″,01 Aenderung der Seite Σ'' eine Aenderung von 0″,43 in A' hervorbringt. Das obige Resultat ist durch Anwendung von Logarithmen von nicht mehr wie sieben Stellen erhalten worden.

$$\alpha' = 5^0\,34'\,56'',2$$
$$\alpha'' = 3\;\;33\;\;27,\,5$$
$$\lambda = 2\;\;38\;\;\;0,\,0$$

folgt. Die Unterschiede zwischen diesen und den genauen sphäroidischen Winkeln sind

$$+\,0'',1\;;\quad +\,0'',1\;;\quad 0'',0$$

also verschwindend.

154.

Die vorhergehenden Beispiele zeigen wie nahe bei den grössten und verschiedenartigst geformten sphäroidischen Dreiecken die im Art. 150 abgeleiteten Reductionsformeln die richtigen Resultate geben, und in den Fällen, wo es auf einige wenige Secunden im Resultat nicht ankommt, kann man sie jederzeit anwenden, und zwar nicht blos in den Fällen, wo die drei Seiten des Dreiecks, sondern auch in denen, in welchen andere Stücke desselben gegeben sind.

Aber es lässt sich eine ausgedehntere Anwendung davon machen, und eine Reihe von Aufgaben durch Zuziehung derselben mit beliebiger Genauigkeit und mit Leichtigkeit lösen. Unter diesen soll hier, um diese Abhandlung nicht zu weit auszudehnen, nur die folgende mit ihren Hauptverzweigungen betrachtet werden:

»Gegeben sei eine beliebige geodätische Linie auf dem Erd»ellipsoid, nebst den Polhöhen ihrer beiden Endpunkte. Man fragt »nach dem geographischen Längenunterschiede dieser beiden End»punkte und den Azimuthen der geodätischen Linie an denselben.«

155.

Durch die Polhöhen der Endpunkte der geodätischen Linie ist die Lage dieser auf dem Erdellipsoid unzweideutig gegeben, und die Aufgabe ist daher eine bestimmte. Um sie zu lösen, rechne man zuerst die beiden reducirten Breiten β' und β'', die den gegebenen Polhöhen zukommen, dann durch die (136) die denselben entsprechenden Meridianbögen Σ' und Σ'', und hierauf durch die (137) die sphärischen Winkel A', A'', $\varDelta$. Diese Rechnungen brauchen nicht mit der grössten Schärfe ausgeführt zu werden. Von den Reductionen auf die sphäroidischen Winkel ist jetzt nur die Eine, und zwar $\varDelta\alpha'$, zu berechnen, weshalb ich die dazu erforderlichen Ausdrücke hier wiederholen will.

$$
(138)\begin{cases}
Q' = \frac{1}{4}e^2\left\{\frac{\Sigma'}{\sin\Sigma'} - \frac{\sigma}{\sin\sigma}\cos\Sigma''\right\} \\
Q'' = \frac{1}{4}e^2\left\{\frac{\Sigma''}{\sin\Sigma''} - \frac{\sigma}{\sin\sigma}\cos\Sigma'\right\} \\
\Delta\alpha' = Q'\operatorname{cotg}\Delta - Q''\frac{\sin A'}{\sin A''\sin\Delta} \\
\qquad + \frac{1}{4}e^2\frac{\sigma}{\sin\sigma}\sin A''\cos A''\sin^2\Sigma'' - \frac{1}{4}re^2\sin A'\cos A'\sin^2\Sigma' \\
\alpha' = A' + \Delta\alpha'
\end{cases}
$$

Vermittelst der gegebenen Stücke β', α', σ, von welchen jedoch α' nur näherungsweise richtig ist, rechne man durch die Hauptaufgabe des ersten Abschnittes α'', λ, β'', und wenn dieser Werth von β'' mit dem ursprünglich gegebenen übereinstimmt, so sind auch alle übrigen Grössen so richtig wie möglich, und die Auflösung unserer Aufgabe ist vollendet. In der Regel wird aber der auf diese Art berechnete Werth von β'', den ich mit (β'') bezeichnen will, mit dem ursprünglich gegebenen nicht vollständig übereinstimmen, sondern um eine kleine Grösse davon verschieden sein, setzt man daher, wenn durch β'' der ursprünglich gegebene Werth dieses Bogens bezeichnet wird,

$$\delta\beta'' = \beta'' - (\beta'')$$

so kann man durch einfache Differentialformeln die Berichtigung der übrigen Bögen erhalten.

Da man hier voraussetzen muss, dass auch die erhaltenen Werthe der Hülfsbögen χ und $\Delta\omega$ nicht vollständig genau erhalten worden sind, so muss in den Differentialformeln darauf Rücksicht genommen werden. Die Differentiation der Gleichungen (28) giebt leicht

$$
(139)\quad \dots \begin{cases}
\delta\alpha' = \frac{1}{\sin\chi\sin\alpha''}\delta\beta'' + \frac{\operatorname{cotg}\alpha''}{\sin\chi}\delta\chi \\
\delta\alpha'' = \frac{\operatorname{cotg}\omega}{\cos\beta''}\delta\beta'' + \frac{\operatorname{cotg}\alpha'}{\sin\chi}\delta\chi \\
\delta\omega = \frac{\operatorname{cotg}\alpha''}{\cos\beta''}\delta\beta'' + \frac{1}{\cos\beta'\sin\alpha'}\delta\chi \\
\delta\lambda = \delta\omega + \delta\Delta\omega
\end{cases}
$$

und um $\delta\chi$ zu erhalten dient die Gleichung (17). Lässt man in dieser die mit e^4, etc. multiplicirten Glieder weg, welches hier erlaubt ist, so kann sie wie folgt geschrieben werden,

$$\frac{\sigma}{\sqrt{1-e^2}} = (1+\mu)\chi + \mu\cos(2\varphi'+\chi)\sin\chi$$

wo

$$\mu = \frac{1}{4} e^2 \sin {}^2\beta_0$$

angenommen werden darf. Da nun σ hier unveränderlich ist, so giebt diese Gleichung, wenn man fortfährt μ^2 zu übergehen, zuerst

$$\delta\chi = -(\chi + \cos(2\varphi' + \chi) \sin\chi)\delta\mu + 2\mu \sin(2\varphi' + \chi) \sin\chi\delta\varphi'$$

Eliminirt man hieraus φ' durch die (15), und $\delta\mu$ und $\delta\varphi'$ durch die bez. Gleichungen des Art. 58, so wird $\delta\chi$ in Function von $\delta\alpha'$ dargestellt, und kann darauf durch die erste (139) auf $\delta\beta''$ hingeführt werden. Der Ausdruck für $\delta\omega$ ist mit geringer Abänderung der des Art. 58. Man erhält auf diese Art

$$\left.\begin{aligned} \delta\chi &= -\frac{2\mu}{\operatorname{tg}\beta_0}\left\{\frac{\frac{\chi}{r}\sin\varphi'}{\sin\chi\sin\alpha''} + \frac{\sin\varphi''}{\sin\alpha''}\right\}\delta\beta'' \\ \delta\Delta\omega &= \frac{\Delta\omega}{\chi}\delta\chi + \frac{\Delta\omega}{r}\frac{\operatorname{cotg}\alpha''}{\sin\chi\sin\alpha'}\delta\beta'' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

Wenn daher $\delta\beta''$ nicht unmerklich ist, so rechne man $\delta\chi$ und $\delta\Delta\omega$ aus den (140), worauf die (139) $\delta\alpha'$, $\delta\alpha''$, $\delta\omega$, $\delta\lambda$ geben, die den, wie beschrieben, erhaltenen Werthen von α', α'', λ hinzuzufügen sind. Die Verbesserungen $\delta\chi$ und $\delta\Delta\omega$ werden in der Regel unmerklich.

156.

Die im vor. Art. gegebene Auflösung unserer Aufgabe soll durch das Beispiel erläutert werden, welches das im Vorhergehenden betrachtete Dreieck zwischen Santiago, Moskau und dem Nordpol darbietet. Sehen wir die Hinführung der beiden Polhöhen auf die reducirten Breiten als ausgeführt an, dann sind die gegebenen Stücke der Aufgabe

$$\beta' = 55^0 39' 38'',49\ ; \quad \beta'' = -33^0 20' 42'',63\ ; \quad \sigma = 126^0 46' 18'',17$$

Die zuerst nach den Ausdrücken (136), (137), (138) auszuführenden Reductionen sind schon im Art. 152 gegeben, und es kann der Werth von α', auf den es hier ankommt, dort entnommen werden. Die neuen gegebenen Stücke sind daher

$$\beta' = 55^0 39' 38'',49\ ; \quad \alpha' = 83^0 23' 53'',5\ ; \quad \sigma = 126^0 46' 18'',17$$

auf welche die Auflösung der Hauptaufgabe des ersten Abschnittes anzuwenden ist. Diese giebt

$$\varphi' = 4^\circ 29' 27'',72 \quad , \quad \Omega' = 7^\circ 58' 43'',99$$
$$\log\operatorname{tg}\beta_0 = 0.1697025 \quad , \quad \log\mu = 7.0605872$$
$$S-x = \chi = 127^\circ\ 5'\ 18'',48 \ , \quad \Delta\omega = 14'\ 16'',626$$
$$\alpha'' = 42\ \ 7\ \ 37,51 \ , \quad \Omega'' = 116^\circ 26'\ \ 2'',26$$
$$\lambda = 108\ \ 13\ \ \ 1,64 \ , \quad (\beta') = -33^\circ 20' 41'',40$$

also

$$\delta\beta'' = -\ 1'',23$$

Die Ausdrücke (140) geben hierauf unmerkliche Werthe von $\delta\chi$ ur $\delta\Delta\omega$, weshalb blos die Ausdrücke (139) anzuwenden sind, in welch $\delta\chi=0$ und $\delta\Delta\omega=0$ zu setzen ist. Die Rechnung giebt

$$\delta\alpha' = -\ 2'',30\ ; \quad \delta\alpha'' = +\ 0'',49\ ; \quad \delta\omega = \delta\lambda = -\ 1'',63$$

fügt man diese dem oben zu Grunde gelegten Werthe von α', so w den durch die Rechnung erhaltenen Werthen von α'' und λ hinzu, s wird schliesslich

$$\alpha' = 83^\circ 23' 51'',20$$
$$\alpha'' = 42\ \ 7\ \ 38,00$$
$$\lambda = 108\ \ 13\ \ \ 0,01$$

auf befriedigende Art mit den Angaben des Art. 69 übereinstimmend.

157.

Die in diesem Abschnitte gelöste Hauptaufgabe führt wieder z Auflösung allgemeiner sphäroidischer Dreiecke, in Betreff welcher si ohne Weiteres zwei Fälle darbieten.

1) »Seien zwei Seiten eines sphäroidischen Dreiecks, nebst d »Polhöhen der drei Eckpunkte des letzteren gegeben, hieraus d »übrigen Stücke desselben zu finden.«

2) »Es seien wieder zwei Seiten eines sphäroidischen Dreiec »gegeben, und ausserdem von der einen derselben die Polhöhen ihr »beiden Endpunkte, aber von der anderen das Azimuth des En »punkts, welchen sie mit der ersten gemeinschaftlich hat. Man fra »nach den übrigen Stücken dieses Dreiecks.«

Für die Auflösung der ersten Aufgabe ist die in diesem Abschnit abgehandelte Hauptaufgabe abgesondert auf beide gegebenen Dreieck seiten anzuwenden, wodurch man die in der Hauptaufgabe des zweit

Abschnittes als gegeben betrachteten Stücke erhält, und nunmehr durch diese die übrigen Stücke des Dreiecks berechnen kann.

In Bezug auf die Lösung der zweiten Aufgabe ist einmal die Hauptaufgabe dieses, und einmal die Hauptaufgabe des ersten Abschnittes anzuwenden, worauf die Hauptaufgabe des zweiten Abschnittes die noch zu berechnenden Stücke des Dreiecks giebt. Es brauchen von diesen Aufgaben wohl keine Beispiele gegeben zu werden.

Es wäre ein Leichtes noch eine Anzahl von Aufgaben durch die in dieser Abhandlung aufgestellten Grundsätze zu lösen, allein ich übergehe diese hier, weil sich im Voraus nicht mit Sicherheit beurtheilen lässt, wie weit sie in der praktischen Geodäsie Interesse haben oder Anwendung finden, und ziehe vor sie erst dann der Behandlung zu unterziehen, wenn sich dazu besondere Veranlassung darbieten sollte.

Zusatz zu Art. 79 u. f.

Im dritten Abschnitt sind alle auf das Revolutionsellipsoid sich beziehenden Functionen bis auf Grössen achter Ordnung entwickelt, und dasselbe findet in Bezug auf die Ausdrücke der Fläche des sphärischen Dreiecks statt. Dahingegen sind die Ausdrücke der Winkeländerungen für die Reduction des sphärischen Dreiecks auf das ebene nur bis auf Grössen sechster Ordnung entwickelt worden, und es kann daher wünschenswerth erscheinen diese auch bis auf Grössen achter Ordnung kennen zu lernen; die Glieder sechster Ordnung dieser Ausdrücke sollen hier nachträglich entwickelt werden.

Zu dem Ende sind den betreffenden Ausdrücken des Art. 79 zuerst die folgenden Glieder hinzuzufügen,

zu $\sin a \ldots \quad -\frac{1}{5040}a^6$

zu $\cos a \ldots \quad +\frac{1}{40320}a^8$

zu $\cos b \cos c \ldots \frac{1}{40320}b^8 + \frac{1}{1440}b^6c^2 + \frac{1}{576}b^4c^4 + \frac{1}{1440}b^2c^6 + \frac{1}{40320}c^8$

zu $\frac{\sin b \sin c}{bc} \ldots -\frac{1}{5040}b^6 - \frac{1}{720}b^4c^2 - \frac{1}{720}b^2c^4 - \frac{1}{5040}c^6$

zu $K \ldots \frac{1}{40320}a^8 - \frac{1}{10080}a^2b^6 - \frac{1}{1440}a^2b^4c^2 - \frac{1}{1440}a^2b^2c^4 - \frac{1}{10080}a^2c^6$

$$+\frac{1}{13440}b^8 + \frac{1}{10080}b^6c^2 - \frac{1}{2880}b^4c^4 + \frac{1}{10080}b^2c^6 + \frac{1}{13440}c^8$$

$$\text{zu } \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A \ldots -\frac{1}{320}a^8 \quad +\frac{1}{720}a^6b^2+\frac{1}{720}a^6c^2+\frac{1}{288}a^4b^4$$
$$+\frac{1}{48}a^4b^2c^2+\frac{1}{288}a^4c^4+\frac{1}{720}a^2b^6+\frac{1}{48}a^2b^4c^2$$
$$+\frac{1}{48}a^2b^2c^4+\frac{1}{720}a^2c^6-\frac{1}{820}b^8 \quad +\frac{1}{720}b^6c^2$$
$$+\frac{1}{288}b^4c^4 \quad +\frac{1}{720}b^2c^6-\frac{1}{820}c^8$$

Dehnt man nun die a. a. O. ausgeführte Division auf die vorstehende Glieder aus, so wird vollständig

$$K = -\frac{1}{6}\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A \,.\, L$$

wenn man

$$L = 1+\frac{2}{15}a^2+\frac{1}{10}b^2+\frac{1}{10}c^2$$
$$+\frac{13}{1260}a^4+\frac{13}{630}a^2b^2+\frac{13}{680}a^2c^2+\frac{1}{168}b^4+\frac{5}{252}b^2c^2+\frac{1}{168}c^4$$

setzt. Da aber auch

$$K = \sin b \sin c\,\{\cos A - \cos(A+\varDelta A)\}$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{\cos A - \cos(A+\varDelta A)}{\sin A} = -\frac{1}{6}\sin b \sin c \sin A \,.\, L$$

und nach der Entwickelung durch das Taylorsche Theorem

$$\varDelta A = -\frac{1}{6}\sin b \sin c \sin A\,\Big\{L+\frac{1}{12}\sin b \sin c \cos A \,.\, L^2$$
$$+\frac{1}{108}\sin^2 b \sin^2 c \cos^2 A \,.\, L^3+\frac{1}{216}\sin^2 b \sin^2 c \,.\, L^3\Big\}$$

Dem Vorhergehenden zufolge ist mit der hier erforderlichen Genauigkeit

$$L^2 = 1+\frac{4}{15}a^2+\frac{1}{5}b^2+\frac{1}{5}c^2$$
$$L^3 = 1$$

$$\sin b \sin c \cos A = -\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{24}a^4-\frac{1}{24}b^4-\frac{1}{4}b^2c^2-\frac{1}{24}c^4$$
$$\sin^2 b \sin^2 c \cos^2 A = \frac{1}{4}a^4-\frac{1}{2}a^2b^2-\frac{1}{2}a^2c^2+\frac{1}{4}b^4+\frac{1}{2}b^2c^2+\frac{1}{4}c^4$$
$$\sin^2 b \sin^2 c = b^2c^2$$

durch deren Substitution sich

$$\varDelta A = -\frac{1}{6}\sin b \sin c \sin A\,\Big\{1+\frac{11}{120}a^2+\frac{17}{120}b^2+\frac{17}{120}c^2$$
$$+\frac{151}{30240}a^4+\frac{71}{8780}a^2b^2+\frac{71}{8780}a^2c^2+\frac{397}{30240}b^4+\frac{377}{15120}b^2c^2+\frac{897}{80240}c^4\Big\}$$

ergiebt. Die Elimination von $\sin b \sin c$ durch die Gleichung

$$\sin b \sin c = bc\,\Big\{1-\frac{1}{6}b^2-\frac{1}{6}c^2+\frac{1}{120}b^4+\frac{1}{86}b^2c^2+\frac{1}{120}c^4\Big\}$$

verwandelt den vorstehenden Ausdruck in den folgenden

$$\Delta A = -\tfrac{1}{6} bc \sin A \Big\{ 1 + \tfrac{11}{120} a^2 - \tfrac{1}{40} b^2 - \tfrac{1}{40} c^2$$
$$+ \tfrac{151}{30240} a^4 + \tfrac{53}{15120} a^2 b^2 + \tfrac{53}{15120} a^2 c^2 - \tfrac{13}{6048} b^4 + \tfrac{83}{15120} b^2 c^2 - \tfrac{13}{6048} c^4 \Big\}$$

worin man mittelst der Division durch den Ausdruck

$$\triangle = \tfrac{1}{2} bc \sin A \Big\{ 1 + \tfrac{1}{8} a^2 - \tfrac{1}{24} b^2 - \tfrac{1}{24} c^2$$
$$+ \tfrac{1}{96} a^4 - \tfrac{1}{480} b^4 + \tfrac{1}{144} b^2 c^2 - \tfrac{1}{480} c^4 \Big\}$$

des Art. 82 die Dreiecksfläche $\triangle$ einführen kann. Man bekommt dadurch zum Endresultat, wenn man ausserdem den Kugelhalbmesser R einführt, und zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$\mu = \frac{1}{60R^2}, \qquad \mu' = \frac{1}{30240R^4}$$

anwendet,

$$\Delta A = -\tfrac{1}{3} \triangle \{ 1 - 2\mu a^2 + \mu b^2 + \mu c^2$$
$$- 38\mu' a^4 + \mu' a^2 b^2 + \mu' a^2 c^2 + 19\mu' b^4 - 2\mu' b^2 c^2 + 19\mu' c^4 \}$$

$$\Delta B = -\tfrac{1}{3} \triangle \{ 1 + \mu a^2 - 2\mu b^2 + \mu c^2$$
$$+ 19\mu' a^4 + \mu' a^2 b^2 - 2\mu' a^2 c^2 - 38\mu' b^4 + \mu' b^2 c^2 + 19\mu' c^4 \}$$

$$\Delta C = -\tfrac{1}{3} \triangle \{ 1 + \mu a^2 + \mu b^2 - 2\mu c^2$$
$$+ 19\mu' a^4 - 2\mu' a^2 b^2 + \mu' a^2 c^2 + 19\mu' b^4 + \mu' b^2 c^2 - 38\mu' c^4 \}$$

deren zweite und dritte durch die blose Vertauschung der Buchstaben aus der ersten erhalten worden sind. Diese Ausdrücke sind bis auf Grössen achter Ordnung vollständig, und geben durch die Addition, gleichwie im Art. 81

$$\Delta A + \Delta B + \Delta C = -\triangle$$

welche Gleichung jedenfalls statt finden muss, wie weit man auch die Entwickelungen fortsetzt.

Zusatz zu Art. 133.

Durch die a. a. O. ausgeführten Differentiationen kommt man, ehe die Bedingungsgleichungen eingeführt werden, auf ziemlich verwickelte Ausdrücke, in welchen, wenn nicht mit der grössten Vorsicht verfahren

wird, leicht etwas übersehen werden kann. Es wird daher, um die Richtigkeit der dort angegebenen Resultate darzuthun, nicht überflüssig sein diese Differentiationen auch auf eine andere Art auszuführen; dieses soll hier geschehen. Löst man die Gleichung (134) in Bezug auf z auf, und setzt

$$h^2 = (C^2 - B)x^2 - 2\,CDx - AB\,y^2 + D^2$$

so wird sie

$$Bz = D - Cx - h$$

da das $+$ Zeichen vor h hier nicht in Betracht kommt. Bezeichnet man nun zur Abkürzung die Differentialquotienten von h nach x durch oben, und die nach y durch unten angehängte Striche, so giebt diese Gleichung sogleich

$$Bp = -C - h' \;; \quad Bq = -h_{\prime}$$

$$Br = -h'' \;; \quad Bs = -h_{\prime}' \;; \quad Bt = -h_{\prime\prime}$$

$$B\left(\frac{dr}{dx}\right) = -h''' \;; \quad B\left(\frac{dr}{dy}\right) = -h_{\prime}''$$

$$B\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right) = -h^{\mathrm{IV}} \;; \quad B\left(\frac{d^2r}{dx\,dy}\right) = -h_{\prime}''' \;; \quad B\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right) = -h_{\prime\prime}''$$

etc.

$$B\left(\frac{dt}{dx}\right) = -h_{\prime\prime}' \;; \quad B\left(\frac{dt}{dy}\right) = -h_{\prime\prime\prime}$$

$$B\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right) = -h_{\prime\prime}'' \;; \quad B\left(\frac{d^2t}{dx\,dy}\right) = -h'_{\prime\prime\prime} \;; \quad B\left(\frac{d^2t}{dy^2}\right) = -h_{\mathrm{IV}}$$

etc.

die man beliebig fortsetzen kann. Die obige Gleichung für h^2 giebt ausserdem durch fortgesetzte Differentiationen

$$hh' = (C^2 - B)\,x - CD$$
$$hh'' + (h')^2 = C^2 - B$$
$$hh''' + 3\,h'h'' = 0$$
$$hh^{\mathrm{IV}} + 4\,h'h''' + 3\,(h'')^2 = 0$$
$$hh^{\mathrm{V}} + 5\,h'h^{\mathrm{IV}} + 10\,h''h''' = 0$$

$$hh_{\prime} = -ABy$$
$$hh_{\prime}' + h'h_{\prime} = 0$$
$$hh_{\prime}'' + 2\,h'h_{\prime}' + h''h_{\prime} = 0$$
$$hh_{\prime}''' + 3\,h'h_{\prime}'' + 3h''h_{\prime}' + h'''h_{\prime} = 0$$
$$hh_{\prime}^{\mathrm{IV}} + 4\,h'h_{\prime}''' + 6\,h''h_{\prime}'' + 4\,h'''h_{\prime}' + h^{\mathrm{IV}}h_{\prime} = 0$$

$$hh_{,,} + (h_{,})^2 = - AB$$
$$hh_{,,}' + h'h_{,,} + 2\, h_{,}'h_{,} = 0$$
$$hh_{,,}'' + 2\, h'h_{,,}' + 2\, h_{,}''h_{,} + h''h_{,,} + 2\,(h_{,}')^2 = 0$$
$$hh_{,,}''' + 3\, h'h_{,,}'' + 6\, h_{,}''h_{,}' + 3\, h''h_{,,}' + 2\, h_{,}'''h_{,} + h'''h_{,,} = 0$$

$$hh_{,,,} + 3\, h_{,}h_{,,} = 0$$
$$hh'_{,,,} + h'h_{,,,} + 3\, h_{,}h_{,,}' + 3\, h_{,}'h_{,,} = 0$$
$$hh''_{,,,} + 2\, h'h'_{,,,} + h''h_{,,,} + 3\, h_{,}h_{,,}'' + 6\, h_{,}'h'_{,,} + 3\, h_{,}''h_{,,} = 0$$

$$hh_{IV} + 4\, h_{,}h_{,,,} + 3\,(h_{,,})^2 = 0$$
$$hh'_{IV} + h'h_{IV} + 4\, h_{,}h'_{,,,} + 4\, h_{,}'h_{,,,} + 6\, h'_{,,}h_{,,} = 0$$

$$hh_{V} + 5\, h_{,}h_{IV} + 10\, h_{,,}h_{,,,} = 0$$

Die Substitution von $x = 0$ und $y = 0$, sowohl in die Gleichung für h^2, wie in die vorstehenden Differentiale derselben giebt ohne Mühe

$$h = D$$
$$h' = - C \quad ; \quad h_{,} = 0$$
$$h'' = - \frac{B}{D} \quad ; \quad h_{,}' = 0 \; ; \quad h_{,,} = - \frac{AB}{D}$$
$$h''' = - 3\, \frac{BC}{D^2} \quad ; \quad h_{,}'' = 0 \; ; \quad h'_{,,} = - \frac{ABC}{D^2}$$
$$h^{IV} = - 3\, \frac{B^2}{D^3} - 12\, \frac{BC^2}{D^3} \; ; \quad h_{,}''' = 0 \; ; \quad h''_{,,} = - \frac{AB^2}{D^3} - 2\, \frac{ABC^2}{D^3}$$
$$h^{V} = - 45\, \frac{B^2C}{D^4} - 60\, \frac{BC^3}{D^4} \; ; \quad h_{,}^{IV} = 0 \; ; \quad h'''_{,,} = - 9\, \frac{AB^2C}{D^4} - 6\, \frac{ABC^3}{D^4}$$
$$h_{,,,} = 0$$
$$h'_{,,,} = 0 \; ; \quad h_{IV} = - 3\, \frac{A^2B^2}{D^3}$$
$$h''_{,,,} = 0 \; ; \quad h'_{IV} = - 9\, \frac{A^2B^2C}{D^4} \; ; \quad h_{V} = 0$$

und setzt man diese in die obigen Ausdrücke für p, q, r, s, t nebst deren Differentialen, so gehen daraus dieselben Werthe von p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 nebst den dazu gehörigen Differentialen hervor, die im Art. 133 auf ganz andere Art erhalten worden sind.

Geschichtliche Bemerkung.

In der allgemeinen kurzen Einleitung S. 3 habe ich unter andern gesagt, dass die Aufgabe des zweiten Abschnittes meines Wissens nach,

wenigstens in der neuern Zeit, in Deutschland nicht behandelt worden ist, und wie dieser Satz gedruckt wurde, kannte ich auch keine deutsche Bearbeitung derselben. Erst ganz kürzlich habe ich in Erfahrung gebracht, dass Herr General-Lieutenant Baeyer, dem die Geodäsie so viel verdankt, diese Aufgabe in der neuesten Zeit für kurze geodätische Linien bearbeitet hat, welches ich nicht unterlassen will hier anzuführen.

Druckfehler.

Seite 80 Zeile 13 v. u. lies q'_0 statt g'_0

BESTIMMUNG

DES

LÄNGENUNTERSCHIEDES

ZWISCHEN DEN

STERNWARTEN ZU GOTHA UND LEIPZIG

VON

P. A. HANSEN,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



Des VIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº II.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1866.

Vom Verfasser übergeben den 3. März 1866.
Der Abdruck vollendet den 10. April 1866.

P. A. HANSEN,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

BESTIMMUNG DES LÄNGENUNTERSCHIEDES ZWISCHEN DEN STERNWARTEN ZU GOTHA UND LEIPZIG

UNTER SEINER MITWIRKUNG AUSGEFÜHRT

VON

DR. AUWERS UND PROF. BRUHNS

IM APRIL DES JAHRES 1865.

MIT EINER FIGURENTAFEL.

Zu den, auf der ersten allgemeinen Conferenz der Bevollmächtigten zur mitteleuropäischen Gradmessung, aufgestellten, wünschenswerthen astronomischen Bestimmungen gehört auch die telegraphisch auszuführende Bestimmung der Längendifferenz zwischen den Sternwarten zu Gotha, Leipzig und Göttingen. Die Längendifferenz zwischen Gotha und Leipzig ist im April des vorigen Jahres bestimmt worden, und es soll in dieser Abhandlung davon ausführlicher Bericht erstattet werden.

Bevor wir aber auf diese Materie eingehen, ist es unsere Pflicht den hohen Staatsregierungen, nämlich der Königlich Sächsischen und der Herzoglich Sachsen-Coburg-Gothaischen Staatsregierung, die bereitwilligst die dazu erforderlichen Mittel gewährten, für diesen der Wissenschaft geleisteten erheblichen Dienst unseren ehrfurchtvollsten Dank darzubringen. Insgleichen fühlen wir uns zu tiefen Gesinnungen des Dankes gegen die verehrlichen Königlich Preussischen und Königlich Sächsischen Directionen der Telegraphenanstalten verpflichtet, die im Laufe des ganzen Monats April des vorigen Jahres von 9 Uhr Abends bis gegen Morgen einen Leitungsdrath zu diesem Zweck zu unserer Verfügung stellten, und uns somit in den Stand setzten, bei dieser Längenbestimmung verschiedene Verfahrungsarten in Anwendung bringen zu können.

Unter diesen halte ich die sogenannte Registrirungsmethode, die ich schon vor einer Reihe von Jahren mehreren astronomischen Freunden empfohlen habe, für die vorzüglichste, da sie von der geringsten Anzahl von Fehlerquellen begleitet ist. Zufolge dieses Verfahrens wird jeder beobachtete Fadenantritt unmittelbar auf dem Registrirapparat einer

Registrirsterne II. Reihe.

20	9 H. Bootis.
21	$\varkappa$ Virginis.

Nivelliren.

22	φ Virginis.
23	B. A. C. 4805.

Umlegen.

24	B. A. C. 4863.
25	109 Virginis.

Nivelliren.

26	1 Serpentis.
27	40 Bootis.

Nach der ersten Reihe der Registrirsterne wurde α Ursae min. in der unteren Culmination mit Auge und Ohr beobachtet, um dadurch das Azimuth des Instruments sicherer bestimmen zu können. In der letzten Zeit wurden auch noch die Coincidenzuhren, erst die Leipziger und dann die Gothaer, eingeschaltet und durch die Registrirapparate gleichzeitig die Secundenschläge der Normal- und der Coincidenzuhren auf den Papierstreifen verzeichnet. Die Coincidenzen zwischen den Secundenpunkten der beiden Uhren lassen sich sehr scharf ablesen, und diese Coincidenzen wollen wir, zum Unterschiede von den gehörten, die registrirten Coincidenzen nennen.

Zur zweiten Zeitbestimmung für Auge und Ohr wurden noch folgende Sterne an einigen Abenden beobachtet.

Nivelliren.

26	1 Serpentis.
27	40 Bootis.
28	44 Bootis.
29	B. A. C. 4993.
30	3 Serpentis.
Polstern	323 B. Cephei.

Umlegen.

Polstern	323 B. Cephei.
31	α Serpentis.
32	μ Serpentis.
33	χ Herculis.
34	4 Herculis.

Nivelliren.

Die Instrumente, welche in Gotha angewandt wurden, sind der Meridiankreis von Ertel, dessen Fraunhofersches Objectiv 34 par. Linien Oeffnung und 42 Zolle Brennweite hat. Um die zum Umlegen desselben erforderliche Zeit möglichst abzukürzen waren vorher, mit Ausnahme des Kreises, alle zur Beobachtung der Zenithdistanzen gehörigen Theile von demselben abgenommen worden. Ferner die Pendeluhr von Tiede mit Quecksilberpendel, ein Registrirapparat von Siemens und Halske, welcher durch einen Windfang regulirt wird, und deshalb die Secundenlänge auf dem Papierstreifen in verschiedenen Temperaturen etwas verschieden angiebt, welches aber auf die Beobachtungen keinen nachtheiligen Einfluss äussern kann, da sonst in den Secundenlängen Gleichförmigkeit besteht,*) und strenge genommen nur von Secunde zu Secunde Gleichförmigkeit der Bewegung erforderlich ist. Zur Coincidenzuhr wurde eine alte Klindworthsche Uhr ausersehen, und da die erforderliche Verkürzung des Pendels derselben durch die Schraube unter der Linse nicht bewirkt werden konnte, so wurde ohngefähr in der Mitte des Pendels eine zweite Linse von Blei befestigt, deren Gewicht ich vorher berechnet hatte, und wodurch die erforderliche, weiter unten angegebene Beschleunigung des Ganges der Uhr hervorgebracht wurde.

Die Linienbatterie bestand aus dreissig Bunsenschen Elementen, von der Art wie sie auf den K. Preuss. Telegraphenstationen eingeführt sind, und die von der hiesigen Station dargeliehen worden waren. Das Relais war von Prof. Bruhns dargeliehen worden, und genau eben so construirt wie das in Leipzig angewandte. Der mit der Normaluhr verbundene Contactapparat ist von neuer, eigenthümlicher Construction, und wird weiter unten ausführlich beschrieben werden.

---

*) Während der Längenbestimmung traten jedoch zuweilen Unregelmässigkeiten ein, die eine kurze Zeitdauer hatten, und deren Erklärung wir bis jetzt noch nicht aufgefunden haben.

In Leipzig wurde zu den Beobachtungen das dortige Liebherr'sche Passageninstrument, dessen Objectiv eine Oeffnung von 29 par. Linien und eine Brennweite von 30 Zollen hat, verwendet. Die Normaluhr war die von Tiede mit Rostpendel, und einem Krille'schen Contactapparat versehen. Der Registrirapparat war von Ausfeld, dessen Bewegung durch ein sogenanntes Centrifugalpendel regulirt wird. Die Coincidenzuhr war die von Naumann, deren Pendel hinreichend verkürzt werden konnte, um die erforderliche Beschleunigung des Ganges hervorzubringen. Die Linienbatterie bestand aus 40 Meidingerschen Elementen. Das Relais, ein Dosenrelais von Siemens und Halske in Berlin, war, wie schon oben erwähnt, dem in Gotha angewandten völlig gleich.

Von April 4 bis 11 beobachteten
in Gotha Herr Dr. Auwers,
in Leipzig Herr Prof. Bruhns,
von April 13 bis 23
in Gotha Prof. Bruhns,
in Leipzig Dr. Auwers,
am April 24
wieder in Gotha Dr. Auwers
und in Leipzig Prof. Bruhns.

Mit dem Wechsel der Beobachter wurden auch die Relais und die Signaldrücker gewechselt. Man findet leicht, dass bei dem angewandten Verfahren eine Umwechselung der Registrirapparate überflüssig ist, wogegen aber eine Umwechselung der Meridianinstrumente und der Uhren vorzüglich wegen der Aug- und Ohr-Beobachtungen wünschenswerth gewesen wäre, im gegenwärtigen Falle aber nicht ausgeführt werden konnte. Die Erfahrung hat nämlich gezeigt, dass die persönliche Gleichung zwischen zwei Beobachtern bei Aug- und Ohr-Beobachtungen verschieden ausfallen kann, je nachdem andere Instrumente angewandt wurden, und die Beobachter an diese mehr oder weniger gewöhnt sind. Man wird weiter unten aus der Abhandlung der Herren Auwers und Bruhns ersehen, welche Mittel angewandt worden sind, um diesen Umstand möglichst unschädlich zu machen.

Die in Rede stehende Längenbestimmung wurde von der Witterung sehr begünstigt, indem während des Verlaufes derselben der Himmel ungewöhnlich häufig wolkenfrei war. In Gotha trat jedoch ein Umstand ein, der unerwartet kam, weil er vorher und nachher sich nie gezeigt

hat. Die Pfeiler des Meridiankreises waren vorzüglich in verticaler Richtung fast fortwährend in demselben Sinne veränderlich. Die Erklärung dieses Umstandes ist in den damals stattfindenden Witterungsverhältnissen zu suchen. Im Laufe des Februars und des März des vorigen Jahres hatten wir fortwährend bedeutende Kälte, die bis Ende des zuletzt genannten Monats ununterbrochen dauerte, und dann Anfangs April einer für das hiesige Klima in diesem Monate ungewöhnlichen Wärme wich. Das Fundament der Instrumente des Meridianzimmers der Gothaer Sternwarte besteht aus einem aus Quadersteinen (Sandstein) vom Standboden, unter dem Terrain der Umgebung, an aufgeführten Mauerwerk, welches bis einige Zolle unter den Tragbalken des Fussbodens hinauf reicht. In der Aussenmauer der Sternwarte, die diesen Raum umgiebt, befindet sich je nach Norden, Osten und Süden ein schmales Fenster, welche drei Fenster in den ersten Jahren nach der Erbauung der Sternwarte so oft wie möglich geöffnet wurden um der Feuchtigkeit Ausgang zu verschaffen, seit mehreren Jahren aber mit Ausnahme des nördlichen, welches statt der Glasscheiben mit Drathgittern versehen ist, verschlossen gehalten werden.

Dass die plötzlich eingetretene Wärme im Monat April eine Ausdehnung des Fundaments bewirken musste, ist klar, aber sie wäre wahrscheinlich so gleichförmig gewesen, dass sie keine Wirkung geäussert hätte, wenn nicht ein zweiter nachtheiliger Umstand eingetreten wäre. Das südliche Fenster war, ohne dass mir die Ursache davon bekannt ist und ohne dass es sogleich bemerkt wurde, eingestürzt und liess einen grossen Theil der Tageszeit hindurch den Sonnenstrahlen Freiheit einen Theil der Südseite des Fundaments ungehindert zu bescheinen. Dadurch und durch die geringe Wärmeleitungsfähigkeit des Gesteins ist bewirkt worden, dass der mittlere Theil des Fundaments, von Osten nach Westen gerechnet, sich mehr ausgedehnt hat wie die übrigen Theile desselben. Da nun der Meridiankreis westlich von der Mitte des Meridianzimmers aufgestellt ist, so musste eine Erhebung des östlichen Pfeilers desselben die Folge davon sein, und eine solche allmähliche Erhebung zeigen die Nivellirungen. In Folge der häufigen, im oben angeführten Plan vorgeschriebenen, Nivellirungen, und der sorgfältigen Discussion, die Herr Dr. Auwers denselben hat angedeihen lassen, kann dieser Umstand keinen nachtheiligen Einfluss auf das Resultat ausgeübt haben.

Diese Erscheinung steht auf dieser Sternwarte einzig da, aber frei-

lich kenne ich auch keinen zweiten so plötzlichen und grossen Temperaturwechsel wie den eben angeführten. Im Gegentheil ist die Horizontalität der Achse des hiesigen Meridiankreises sehr beständig, und die bemerkten Azimuthaländerungen sind eher grösser, so hat z. B. die Neigung dieser Achse sich vom vorigen Augustmonat bis jetzt (Mitte des Februars) nicht um einen ganzen Niveautheil im Mittel geändert. Ich sage im Mittel, weil eine kleine tägliche Periode zwar in der Aufstellung vorhanden zu sein scheint, allein aus den Erfahrungen, die man auch auf andern Sternwarten hierüber gemacht hat, scheint eine solche Periode allenthalben stattzufinden.

Ich wende mich jetzt zur Beschreibung des neuen Contactapparates, dessen ich oben erwähnt habe. Während die beiden Registrirapparate, die die hiesige Sternwarte besitzt, nämlich der oben erwähnte von Siemens und Halske im Meridianzimmer, und ein zweiter von Ausfeld mit Centrifugalpendel im Thurme bei dem Repsold'schen Aequatoreal die gewünschten Dienste leisteten, und noch fortwährend leisten, war dieses bei den angewandten Contactvorrichtungen in den Uhren nicht der Fall. Ich habe die verschiedensten Einrichtungen dieser Art angewandt, bin aber nie befriedigt worden; die Uebelstände, von welchen ich mich gern unabhängig machen wollte, bestanden hauptsächlich darin, dass die Apparate eine häufige Reinigung verlangten, bei welcher oftmals die Uhr angehalten werden musste, dass sie auf den Gang der Uhr Einfluss übten, oder derselben einen wesentlichen Theil der Kraft raubten. Von dem letzten Uebelstande ist freilich der sinnreiche Krille'sche Contactapparat, den ich auch versucht habe, frei, aber die Bedingungen, an die dieser Apparat gebunden ist, sind in so enge Grenzen eingeschlossen, dass sie leicht im Laufe der Zeit dieselben überschreiten und mangelhafte Wirkung, oder gar das Stillestehen der Uhr im Gefolge haben. Von mehreren Astronomen, die diesen Contactapparat auf ihren Sternwarten eingeführt haben, habe ich die Mittheilung erhalten, dass es ihnen sehr viele Mühe und Zeit gekostet hat, um demselben eine gewünschte, und länger andauernde Wirksamkeit zu ertheilen.

Durch diese Erfahrungen und Mittheilungen veranlasst, kam ich endlich auf den Gedanken die Arbeit des Schliessens und Oeffnens der galvanischen Kette der Uhr gänzlich abzunehmen, und einem besonderen Räderwerke zuzutheilen, welches seine eigene Triebkraft (Gewicht)

besitzt, und nur von der Uhr ausgelöst zu werden braucht. Das Auslösen dieses Werkes kann, wie man weiter unten sehen wird, so eingerichtet werden, dass es der Uhr nicht die mindeste Kraft raubt, ja man könnte es sogar so einrichten, dass es mit dazu beitrüge dem Pendel, gleichwie das Uhrwerk selbst, die bei jeder Oscillation verlorene Kraft zu ergänzen.

Dieser Contactapparat befindet sich nun schon länger wie 1½ Jahre in der hiesigen Tiede'schen Normaluhr, hat von Anfang an bis jetzt die vollkommensten Dienste geleistet, und wird sie lange noch ohne einer Nachhülfe zu bedürfen leisten können. Er hat in dem genannten Zeitraum nur ein einziges Mal einer Reinigung bedurft, und dieses trat, wie man weiter unten sehen wird, während der Längenbestimmung ein. Die Reinigung ist, wenn sie erforderlich wird, sehr leicht zu bewerkstelligen, man braucht nur einen Streifen Schmirgelpapier, ein Mal die Schmirgelseite nach unten und ein Mal dieselbe nach oben gewendet, zwischen den beiden Iridiumplättchen, welche den Contact bilden, durchzuziehen, während man mit dem Zeigefinger der anderen Hand leise auf den Arm drückt, an welchem das obere Iridiumplättchen angelöthet ist. Seit jener Zeit bis jetzt ist keine zweite Reinigung erforderlich gewesen.

Auf der anliegenden Figurentafel sind die Theile, aus welchen dieser Contactapparat besteht, in natürlicher Grösse abgebildet.

Fig. 1 zeigt die hintere Platte *aa*.. des Contactwerks von vorne gesehen. Diese Platte liegt in Einer Ebene mit der hinteren Platte des Uhrwerks, und befindet sich oberhalb dieser, der bogenförmige Ausschnitt ist deshalb angebracht, weil die obere Kante der Uhrplatte diese Form hat. Sie ist vermittelst zweier Barren und vier Schrauben an der Uhrplatte befestigt, die aber in der Zeichnung nicht mit aufgenommen worden sind, da sie jeder leicht ergänzen kann. Beide Werke sind auf diese Art fest mit einander verbunden. *A* ist das erste, oder das Walzrad, mit 120 Zähnen, *A'* die Walze, die die Schnur (Darmsaite) aufnimmt, wovon *s* ein Stück bezeichnet. Mit dieser Schnur ist durch das Zwischenmittel einer Rolle auf gewöhnliche Art das Gewicht verbunden. Das Walzrad trägt noch das Gesperr und die Hülfsfeder nebst der Stellung, die in der Zeichnung nicht aufgenommen worden sind, da sie auf bekannte Art eingerichtet werden können. Das Walzrad *A* greift in das Getriebe *b* von 10 Zähnen, das an diesem befestigte Rad *B* von

100 Zähnen in das Getriebe *c* von 10 Zähnen, das an diesem befestigte Rad *C* von 90 Zähnen in das Getriebe *d* von 10 Zähnen, und endlich das an diesem befestigte Rad *D* von 80 Zähnen in das Getriebe *e* von 10 Zähnen. In Folge dessen macht das Getriebe *e* 8640 Umläufe, während das Walzrad *A* Einen Umlauf vollbringt, und da, wie man weiter unten sehen wird, das Getriebe *e* in vier Zeitsecunden Einen Umlauf macht, so wird das Walzrad *A* in 9^h 36^m Einen Umlauf, und im Zeitraum einer Woche 17½ Umläufe machen. Die Walze *A'* ist indess mit 23 Gängen versehen, damit das Contactwerk, gleichwie die Uhr, ohngefähr 9 Tage in Einem Aufzuge gehen könne. An der Welle des Getriebes *e*, am hinteren Ende derselben, befindet sich, gedrange aufgesteckt, der kleine Cylinder *e* Fig. 4 mit 4 Zähnen, und zwischen diesem und dem Getriebe selbst der Windfang *f f*, Fig. 1, welcher wie in den Schlagwerken durch eine Feder angedrückt wird. Innerhalb der beiden Platten des Contactwerks, und zwar nahe an der hinteren Platte, befindet sich ausserdem der Arm *g g*, welcher mit der um zwei sehr dünne Zapfen drehbaren Frictionsrolle *h* und der Lamelle *i* versehen ist. Der Arm *g g* sitzt auf einer Welle, deren zwei Zapfen, gleichwie die der Getriebe ihre Löcher in den beiden Platten des Contactwerks haben, und ist in geringer Ausdehnung um diese drehbar. Die Fig. 4 zeigt, dass die Frictionsrolle *h* mit den vier Zähnen des Cylinders *e* in Berührung kommt, der Arm *g g* wird also während Eines Umlaufes des Getriebes und des Cylinders *e* vier Mal ein wenig gehoben, und wird sich, wenn der Cylinder *e* eine andere Stellung einnimmt, wie die in der Fig. 4 gezeichnete, durch seine Schwere ein wenig senken. Wie durch dieses Heben und Senken des Arms *g g* die galvanische Kette geöffnet und geschlossen wird, zeigt die Fig. 5, die die betreffenden Theile des Contactwerks darstellt. Sie giebt die Ansicht dieser Theile, so wie sie sich dem Auge darbieten, wenn man sich rechter Hand an der Uhr hinstellt. *aa* ist also die hintere, *a'a'* die vordere Platte des Contactwerks, *p p* sind die beiden Pfeiler, die in der Fig. 1 eben so bezeichnet sind. *g* ist der Arm *g g* vom rechten Ende desselben gesehen, *i* die daran befestigte Lamelle, an deren äusserem Ende unten ein Plättchen Iridium angelöthet ist. An der Platte *a a* ist der isolirte Messingwürfel *k* angeschraubt, dessen Isolirung durch die beiden Elfenbeinplatten *l l*, nebst einem durch die Platte gehenden Elfenbeinrohr, welches in der Zeichnung nicht mit aufgenommen werden konnte, bewirkt ist. Durch den Würfel

k geht die Schraube *m*, an deren oberem Ende auch ein Plättchen Iridium angelöthet ist. Diese Schraube ist so gestellt, dass zwischen den beiden Iridiumplättchen ein kleiner Zwischenraum statt findet, wenn der Cylinder *e* die Stellung hat, die die Fig. 4 zeigt, in Folge dessen der Arm *gg* sich auf seinem höchsten Punkt befindet. Wenn während der Bewegung die Zähne des Cylinders *e* eine andere Stellung einnehmen, und in Folge dessen der Arm *gg* sich senkt, dann treten die beiden Iridiumplättchen mit einander in Berührung, die so lange dauert, bis der nächste Zahn des Cylinders *e* die Stellung der Fig. 4 hat. Während jedes Umlaufes des Getriebes *e* der Fig. 1 werden also in vier Zeiträumen die beiden Iridiumplättchen in Berührung, und während den Zwischenzeiten von einander getrennt sein. Befestigt man daher vermittelst der Schraube *n* den einen Leitungsdrath einer galvanischen Batterie an den Würfel *k*, und den anderen an irgend einem anderen Theil der Uhr, so wird während Eines Umlaufes des Getriebes *e* der galvanische Strom vier Mal geschlossen, und vier Mal geöffnet werden, ist in die galvanische Kette ein Registrirapparat eingeschaltet, so wird der Uhrmagnet desselben in diesem Zeitraume vier Zeichen geben.

Die Figur 2 stellt das Contactwerk von oben gesehen dar, und wird in Folge des Vorhergehenden, und weil dieselben Buchstaben angewandt worden sind, schon fast vollständig verstanden werden. Vor Allem bemerke ich, dass in Fig. 1 die Grösse der Räder zwar so genau wie möglich, aber sowohl dort wie in Fig. 2 die Grösse der Getriebe nur annähernd angegeben ist, deren Grössen daher bei der Anfertigung eines solchen Apparats auf gewöhnliche Weise bestimmt werden müssen. Auch habe ich in Fig. 2 der leichteren Zeichnung wegen die Wellen der Getriebe blos durch einfache Linien angegeben. Hinzuzufügen ist noch, dass an A'' sich der Aufziehzapfen befindet, der in der linken, oberen Ecke des Zifferblatts der Uhr zum Vorschein kommt, so wie dass *F*, *G*, *H* Stege, und *q q* ein Arm sind, die in der Fig. 3 sich wiederholen.

Es ist nun die Verbindung des Contactwerks mit dem Uhrwerk zu erklären, und hiezu dient die Fig. 3. Sie stellt die vordere Platte des Contactwerks und einen Theil der Platten des Uhrwerks dar. $a'a'$... ist jene Platte, und unter *K* muss man den verticalen Durchschnitt des Uhrwerks in der Ebene von $a'a'$... verstehen. Die Stege *F* und *G*, die die vorderen Zapfen der Getriebe *b*, *c*, *d* aufnehmen, liegen flach auf,

aber die Brücke *H*, die den vorderen Zapfen des Getriebes *e* aufnimmt, ist mit einem Knie versehen, um Platz für den Arm *qq* zu gewinnen, wie aus der Fig. 2 zu ersehen ist, wo aber, um Undeutlichkeit zu vermeiden, von der Brücke *H* nur der untere Theil (gleichsam ein Durchschnitt) angegeben werden konnte.

In der Verticalebene des Arms *qq* befindet sich der Anker *rruvw*, welcher an der Welle des Grahamschen Ankers der Uhr, und zwar innerhalb der beiden Uhrplatten befestigt ist. Die beiden Paletten *rr* dieses Ankers sind aus glashartem Stahl verfertigt, und bilden kreiscylindrische Flächen aus dem Mittelpunkt *t*, oder dem Drehungspunkt der Ankerwelle. In so fern gleicht dieser Anker dem Grahamschen, er unterscheidet sich aber von diesem dadurch, dass er keine Hebeflächen besitzt. Vermöge des mit der Schnur *s* verbundenen Gewichts wird nun stets das eine Ende des Arms *qq* sich an die eine der Paletten anzulegen bestreben, und bei jeder Oscillation des Secundenpendels der Uhr wird hierin, eben so wie beim Steigrad und dem Grahamschen Anker ein Wechsel eintreten, nur wird hier in jeder Secunde der Arm *qq* einen Bogen oder Winkel von 90° beschreiben. In den Zeitmomenten, in welchen der Arm an einer der beiden Paletten anliegt, hat der Cylinder *e* die Stellung, die in der Fig. 4 angegeben ist, und die galvanische Kette ist geöffnet, so wie aber der Arm von der linken Palette abfällt, und sich zur rechten Palette hinbewegt, schliesst sich die Kette und der Registrirapparat giebt das Uhrzeichen. So wie der Arm die andere Palette erreicht hat, ist die Stellung der Fig. 4 wieder erreicht, und die Kette wieder geöffnet.*) Wenn der Arm *q* von der Palette rechter Hand abfällt, so wird das andere Ende desselben an die Palette linker Hand anfallen, und die Kette wieder geschlossen und geöffnet werden, u. s. f. Es wird also der Registrirapparat in jeder Secunde ein Zeichen geben, und dieses wird mit dem Pendelschlage zugleich eintreffen. Um zu verhindern, dass der Arm *qq* sich zu schnell bewege, wodurch ein allzu kurzer Schluss der Kette entstehen würde, dient der Windfang *ff* Fig. 1, und dieser übt noch eine zweite Function aus, indem er bewirkt, dass

*) Die vortheilhafteste Anordnung ist die, dass man dem Cylinder *e* eine solche Stellung giebt, dass der bez. Zahn desselben die grade Linie, die durch die Mittelpunkte von *e* und *h* geht, eben passirt hat, wenn der Arm *qq* auf einer der beiden Paletten des Ankers anliegt.

der Arm qq beim Anfallen an die Palette nicht zurückprallt, wodurch ein zweiter Schluss der Kette entstehen könnte, sondern ruhig liegen bleibt. Es ist zu bemerken, dass sowohl der Windfang ff, wie der Arm qq, jeder für sich, genau äquilibrirt werden müssen.

Es ist die Einrichtung des Ankers noch näher zu beschreiben. Der Arm r desselben, an welchem sich oben ein kreisförmiger Theil befindet, ist unveränderlich an der Ankerwelle befestigt, während jede Palette für sich, nebst dem Arm, woran sie befestigt ist und bei den Armen u und w um einen kleinen Bogen drehbar ist. Diese Drehung wird bewirkt und gehemmt durch die Zugschraube x und die Druckschraube y. Vermittelst dieser Einrichtung wird der Anker beim Aufstellen des Apparats ein für alle Mal so corrigirt, dass das Anfallen des Ankers des Uhrmagneten des Registrirapparats genau mit dem Pendelschlage der Uhr zusammen fällt. Für die annähernde Berichtigung kann man das Gehör anwenden, die genaue Ausführung derselben erkennt man daran, dass auf dem Papierstreifen jede Secunde gleiche Länge hat. Um die letzt genannte Bedingung zu erfüllen, ist übrigens nicht nur die richtige Stellung des neuen Ankers in Bezug auf den Grahamschen Anker erforderlich, sondern es muss auch die Uhr richtig ins Echappement gestellt sein, denn auch von der Erfüllung dieser Bedingung hängt die Gleichförmigkeit der Secundenlänge auf dem Papierstreifen ab. Ich habe gefunden, dass man durch dieses Mittel auch die letzt genannte Bedingung viel genauer herstellen kann wie durch das Gehör, dessen man sich sonst ausschliesslich dazu bediente.

Die Fig. 6 endlich zeigt die Construction des neuen Ankers. Sei wieder e der Drehungspunkt des Getriebes e, und t der Drehungspunkt der Ankerwelle der Uhr, man halbire die Linie et in γ, beschreibe von diesem Punkt aus mit dem Halbmesser γe oder γt den Kreis $taea't$, und ziehe die Senkrechte $\alpha\gamma\alpha'$ auf $e\gamma t$, dann sind die Durchschnittspunkte α und α' des Kreises und der Senkrechten die Berührungspunkte des Arms qq mit den Paletten rr. Die halbe Länge des Arms qq ist $= \alpha e$, und der Halbmesser der Berührungsflächen der Paletten ist $= \alpha t$. Diese Construction erfüllt die zwei hier erforderlichen Bedingungen, nämlich 1) dass der Arm qq bei jeder Bewegung einen Bogen von 90° beschreibt, und 2) dass die beiden an den Berührungspunkten an den Kreis $\beta\delta\beta'$ gezogenen Tangenten durch den Punkt e gehen.

Man erkennt aus dieser Beschreibung, dass der Arm qq einen ge-

wissen Druck auf die Palette des Ankers ausübt, und folglich in aller Strenge betrachtet dem Pendel etwas von der bewegenden Kraft raubt, aber dieser Druck ist so geringe, dass daraus gar keine merkliche Wirkung entsteht. Das Gewicht, welches das Contactwerk treibt, ist bis auf sehr weniges eben so schwer wie das Gewicht, welches das Uhrwerk treibt, der Durchmesser der Walze des Contactwerks verhält sich zum Durchmesser der Walze des Uhrwerks nahe wie 2:3, der Arm qq vollendet seinen Umlauf in 4, und das Steigrad den seinigen in 60 Zeitsecunden, da ausserdem die Länge des Arms qq nahe dem Durchmesser des Steigrades gleich ist, so folgt hieraus, dass der Druck des Arms qq auf die Paletten rr nahe 23 Mal kleiner ist wie der Druck der Zähne des Steigrades auf die Paletten des Grahamschen Ankers, und dieser geringe Druck ist gänzlich bedeutungslos. Wenn er irgend wie merklich wäre, so müsste sich dieses durch eine Verminderung der Amplitude des Pendels zu erkennen geben, aber die angestellten Versuche zeigen in dieser nicht die mindeste Aenderung, es mag das Contactwerk in oder ausser Thätigkeit sein. Es giebt übrigens ein Mittel, die hemmende Wirkung dieses Drucks strenge Null zu machen, und dieses besteht darin, dass man den Paletten des neuen Ankers nicht die kreiscylindrische Form giebt, sondern sie so ausführt, dass der Halbmesser derselben im Sinne der Bewegung stetig kleiner wird. Wenn diese Verminderung gross ist, so nimmt der Anker den Character des Ankers der sogenannten zurück fallenden Hemmung an, die fast immer in den gewöhnlichen Pendeluhren angebracht wird, und kann für sich allein das Pendel in Bewegung erhalten. Der hemmende Druck kann also durch dieses Mittel in eine die Bewegung des Pendels befördernde Kraft verwandelt werden, und folglich giebt eine gewisse geringe Verminderung der Halbmesser der Paletten, die die Wirkung des Drucks des Arms qq auf dieselben in Bezug auf die Bewegung des Pendels strenge Null macht. Aber in Anbetracht des so sehr geringen vorhandenen Druckes halte ich die Anwendung dieses Kunstgriffes für überflüssig, und die Anwendung von kreiscylindrischen Paletten für ganz unschädlich.

Ich kann noch erwähnen, dass die Grösse und Anordnung der einzelnen Theile dieses Contactwerks so bestimmt wurden, dass es im Uhrgehäuse, ohne daran etwas zu ändern, Platz fand.

Da es sehr wünschenswerth war, dass die Zusammenstellung aller zur Längenbestimmung angestellten Beobachtungen in Eine Hand gelegt würde, so übernahm Herr Dr. Auwers diese Arbeit, deren Einzelnheiten in der nachfolgenden Abhandlung niedergelegt sind. Bevor wir diese folgen lassen, scheint mir angemessen eine Vergleichung des neuen Resultats mit dem früher vorhandenen einzuschalten.

Von Möbius und d'Arrest ist im Jahre 1849 der Längenunterschied zwischen dem Seeberge und der Pleissenburg aus Pulversignalen, durch die Bestimmung des Unterschiedes zwischen der Pleissenburg und dem Petersberge bei Halle im Anschluss an die Bestimmung des Unterschiedes zwischen dem Seeberge und dem Petersberge aus Zach's Brockensignalen vom Jahre 1803 zu $6^m\ 33^s.83$ gefunden worden.*) Die neue Leipziger Sternwarte liegt nach einer trigonometrischen Messung von Bruhns $4^s.00$ östlich von der Pleissenburg, und der Thurm der neuen Gothaer Sternwarte nach trigonometrischen Messungen von mir $4^s.60$ westlich vom Standpunkt des Passageninstruments der vormaligen Sternwarte auf dem Seeberge. Die Summe dieser drei Unterschiede ist $= 6^m\ 42^s.43$, und vergleicht man dieses Resultat mit der neuen Bestimmung, die, wie man sehen wird,

$$6^m\ 43^s.485$$

gegeben hat, so findet man, dass es $1^s.06$ kleiner ist wie diese.

Der Längenunterschied zwischen Berlin und Leipzig ist nach Bruhns und Förster $= 4^m\ 0^s.895$,**) also nach der neuen Bestimmung Gotha von Berlin westlich $10^m\ 44^s.38$. Da für den Längenunterschied zwischen Berlin und Paris einstweilen das Mittel der Verbindungen über Brüssel und Greenwich ($= 44^m\ 14^s.75$) und über Altona und Greenwich ($= 44^m\ 14^s.30$), das ist $44^m\ 14^s.52$ als der wahrscheinlichste Werth anzunehmen ist, so findet sich die Länge der neuen Gothaer Sternwarte von Paris vorläufig $= 33^m\ 30^s.14$, und daraus für den Seeberg $33^m\ 34^s.74$, zufällig so gut wie identisch mit der früheren Annahme nach Wurms Bestimmung, nämlich $33^m\ 34^s.8$ aus 11 Sternbedeckungen.

Für die Polhöhe der neuen Gothaer Sternwarte habe ich durch trigonometrische Messungen (N. St. $=$ Seeberg $+\ 33''.11$) den Werth

---

*) S. Astr. Nachr. B. 29. No. 690.

**) S. Bestimmung der Längendifferenz zwischen den Sternwarten zu Berlin und Leipzig auf telegraphischem Wege ausgeführt im April 1864 von C. Bruhns und W. Förster. Leipzig 1865.

von 50° 56′ 38″.3 gefunden. Eine directe Bestimmung derselben ist von dem Major von Pläncker in den Jahren 1859 und 1860 ausgeführt worden, welcher aus Beobachtungen von α Ursae min. am Meridiankreise, zu welchen der Horizontalpunkt vermittelst eines Collimators bestimmt wurde, mit der Declination des Nautical-Almanac's folgende Werthe abgeleitet hat:

Lage I von Objectiv und Ocular.

Obere Culm. 50° 56′ 38″.22 aus 85 Einstellungen.
Untere „ 38.59 „ 67 „

Lage II von Objectiv und Ocular.

Obere Culm. 50° 56′ 36″.52 aus 56 Einstellungen.
Untere „ 36.51 „ 105 „

Alle Beobachtungen sind in derselben Lage des Kreises, und bei einer Culmination gewöhnlich fünf Einstellungen gemacht. Die Mittel für die beiden Lagen von Objectiv und Ocular, nämlich 50° 56′ 38″.40 und 50° 56′ 36″.51 unterscheiden sich um den doppelten Betrag der Biegung, von welcher ihr Mittel, nämlich

50° 56′ 37″.46

als frei anzusehen ist. Die Theilungsfehler werden bei den Beobachtungen am Gothaer Meridiankreise bekanntlich ebenfalls vollständig eliminirt.

Zu der jetzt hier folgenden Abhandlung sind die in Gotha angestellten Beobachtungen von Herrn Dr. Auwers, die in Leipzig angestellten von Herrn Professor Bruhns berechnet, über die Ableitung der Resultate haben die genannten Herren sich berathen, die Zusammenstellung und die Ableitung der Resultate ist von Herrn Dr. Auwers gemacht und schliesslich von Herrn Professor Bruhns noch durchgesehen worden.

I. Zusammenstellung der beobachteten Sterne und Ermittelung der Instrumentalcorrectionen.

Es sind für die correspondirend anzustellenden Beobachtungen zwei Gruppen von Zeitsternen so ausgewählt, dass in der einen die südlichen Meridian-Zenithdistanzen im Mittel ungefähr der nördlichen Zenithdistanz der angewandten Polarsterne gleich wurden, die Sterne der andern Gruppe dagegen nahe am Zenith selbst culminirten. Die Wahl der ersten Gruppe war durch die Erwägung bedingt, dass aus Polarsternbeobachtungen die Elemente zur Reduction auf den Meridian nur für Sterne von der angegebenen Zenithdistanz — im Mittel für Beobachtungen in beiden Kreislagen — richtig gefunden werden, wenn die von einer Normale auf die Drehungsachse des Instruments beschriebene Curve kein grösster Kreis ist, während die Zenithsterne auf Grund der Ergebnisse der Längenbestimmung zwischen Berlin und Leipzig hinzugenommen wurden, welche zu dem Schlusse geführt hatten, dass der überwiegende Theil der in den Längendifferenzen zu befürchtenden Fehler von den zufälligen Beobachtungsfehlern der Azimuthe herrührte, welche auf die Reduction der Beobachtungen von Sternen in der Nähe des Zeniths einen geringeren Einfluss ausüben.

Die benutzten Zeitsterne sind nebst ihren Grössen und ihren genäherten Oertern für 1865 in der folgenden Tafel zusammengestellt.

Nummer.	Stern.	Grösse.	Gerade Aufsteig.			Abweichung.		
1.	31 Ursae maj.	5	9^h	46^m	53^s	+	$50°$	$27'.4$
2.	π Leonis	5	9	53	5	+	8	41.4
3.	η Leonis	3.4	9	59	59	+	17	25.2
4.	34 Leonis	7	10	4	22	+	14	1.2
5.	λ Ursae maj.	3.4	10	8	37	+	43	35.2
6.	[illegible] Leonis	5	10	12	10	+	11	13.5
7.	ω Ursae maj.	5	10	46	12	+	43	54.5
8.	47 Ursae maj.	5	10	51	54	+	41	9.0
9.	χ Leonis	5	10	58	3	+	8	3.9
10.	ν Virginis	4.5	11	38	55	+	7	17.1
11.	β Leonis	2	11	42	10	+	15	19.6
12.	67 Ursae maj.	5	11	55	15	+	43	47.7
13.	o Virginis	4	11	58	20	+	9	[illegible]

16*

Nummer.	Stern.	Grösse.	Gerade Aufsteig.	Abweichung.
14.	2 Canum venat.	6	12h 9m 21s	+ 41° 24.'7
15.	η Virginis	3.4	12 13 0	+ 0 5.0
16.	Virginis (191)	7	12 23 42	+ 10 27.9
17.	β Canum venat.	4.5	12 27 20	+ 42 5.5
18.	32 Virginis	6	12 38 48	+ 8 24.7
19.	11 Canum venat.	6	12 42 28	+ 49 12.2
20.	9 H. Bootis	5.6	14 2 32	+ 44 29.9
21.	κ Virginis	4.5	14 5 42	— 9 38.8
22.	φ Virginis	5	14 21 14	— 1 37.3
23.	B. A. C. 4805	7	14 24 17	+ 42 24.3
24.	B. A. C. 4863	8	14 37 12	+ 37 20.0
25.	109 Virginis	3.4	14 39 25	+ 2 27.8
26.	1 Serpentis	6	14 50 38	+ 0 22.7
27.	40 Bootis	5	14 54 26	+ 39 48.1
28.	44 Bootis	6	14 59 20	+ 48 10.8
29.	B. A. C. 4993	7	15 2 43	+ 25 37.6
30.	3 Serpentis	6	15 8 29	+ 5 26.5
31.	α Serpentis	2.3	15 37 37	+ 6 51.2
32.	μ Serpentis	3.4	15 42 35	— 3 0.8
33.	χ Herculis	4.5	15 48 0	+ 42 49.8
34.	4 Herculis	6	15 50 58	+ 42 57.6

No. 14, 16 und 28 sind Doppelsterne. Bei dem ersten wurde indess der 11″ entfernte Begleiter 8m wegen der Helligkeit der angewandten Beleuchtung in der Regel gar nicht bemerkt. Der zweite Stern besteht aus zwei 1.″2 von einander entfernten Sternen 7.8m und 8m, zwischen welchen die Mitte beobachtet wurde, wenn der Stern überhaupt doppelt erschien; von No. 28 endlich wurden beide nur 5″ von einander abstehende und an Helligkeit nicht sehr verschiedene Componenten (6m und 7m) an den verschiedenen Fäden abwechselnd beobachtet.

Zur Bestimmung des Azimuths der Instrumente wurden zwischen No. 5 und 6 der Stern 32 Hev. Draconis (5.6m), nach No. 19 α Ursae minoris und zwischen No. 30 und 31 642 Groombr. (6m), alle drei in der unteren Culmination, beobachtet. Die scheinbaren Rectascensionen sind für α Ursae minoris nach dem Berliner Jahrbuch mit Berücksichtigung der von Förster gefundenen Correction $\Delta\alpha = +0.^s60$, für die beiden Hülfspolarsterne den Bestimmungen Förster's von 1864*) gemäss angenommen, aus welchen sich die mittleren Oerter für 1865.0

	AR.	δ
32 Hev. Draconis	= 22h 23m 34.s851,	= + 85° 25′ 37.″21
642 Groombr.	3 22 25.512	86 12 47.63

*) »Bestimmung der Längendifferenz zwischen Berlin und Leipzig« pag. 10. 11.

und, in AR. mit Berücksichtigung der von 2☾ abhängenden Glieder, folgende scheinbaren Oerter für die Zeiten der unteren Culminationen an den einzelnen Beobachtungstagen ergeben:

1865	32 Hev. Draconis (Polstern I.)	
April 4.	$22^h\ 23^m\ 26^s.95$	$+ 85^0\ 25'\ 35''.3$
7.	27.45	34.7
8.	27.62	34.4
9.	27.83	34.2
10.	28.04	34.0
11.	28.27	33.8
16.	29.46	32.8
17.	29.66	32.7
18.	29.86	32.5
19.	30.05	32.4
20.	30.26	32.2
21.	30.48	32.0
24.	31.23	31.6
25.	31.50	31.5
	642 Groombr. (Polstern II).	
April 4.	$3^h\ 22^m\ 32^s.94$	$+ 86^0\ 12'\ 57''.4$
17.	30,92	53.7
19.	30.74	53.1

Wesentlich war es bei der Kleinheit des Polhöhenunterschiedes zwischen Gotha und Leipzig nur, dass an beiden Orten zur Reduction der Beobachtungen dieselben Rectascensionen der Polarsterne angewandt wurden, und es war daher überflüssig, zur Uebertragung der Förster'schen Positionen auf 1865 die, nach beiläufiger Vergleichung der älteren Beobachtungen nur unbedeutenden, Eigenbewegungen der Hülfspolarsterne zu bestimmen.

Zur Ermittelung des Collimationsfehlers dienten Umlegungen, welche regelmässig während der Durchgänge der Hülfspolarsterne sowie gelegentlich bei Beobachtungen der oberen Culmination von α Ursae minoris in Gotha und beider Culminationen dieses Sternes in Leipzig vorgenommen wurden. Das Leipziger Passageninstrument lässt sich wegen seines geringen Gewichts vermittelst einer einfachen Hebelvorrichtung, und zwar, weil alle Nebentheile immer an ihrem Orte verbleiben, in Zeit von einer Minute leicht und sicher umlegen, so dass es möglich

war, trotz der Umlegung α Ursae minoris an allen 25 (5 Gruppen von je 5, im Aequator etwa 3''2 von einander entfernten) Fäden und die Hülfspolarsterne in jeder Lage an 12 Fäden zu beobachten. Bei dem Gothaer Meridiankreis blieb dagegen, obwohl der zur Bestimmung der Declinationen dienende Apparat von dem Instrumente entfernt war, das Umlegen eine beschwerliche, durchschnittlich 10 Minuten erfordernde und bei Abend in dieser Zeit kaum ohne schädliche Erschütterungen der Zapfenlager ausführbare Operation. Damit die Durchgänge der Hülfspolarsterne überhaupt in beiden Lagen beobachtet werden konnten, mussten die 9 Fäden, welche das Instrument hatte, und welche zur genauesten Beobachtung der Durchgänge der Zeitsterne jedenfalls vollkommen ausreichten, um zwei weiter vom Mittelfaden entfernte Gruppen von je 5 Fäden vermehrt werden; ausserdem wurden zu jeder der drei alten Gruppen noch zwei weitere Fäden hinzugefügt, so dass das Instrument, wie das Leipziger, ein Netz von 5 Gruppen von je 5, 3ˢ0 von einander entfernten, Fäden erhielt. Die Genauigkeit der Beobachtungen der einzelnen Antritte scheint unter dieser grossen Zahl etwas gelitten zu haben, und für die Polarsterne noch mehr unter dem Umstande, dass die neu hinzugefügten Fäden zu dick waren.

Zur Bestimmung der Neigung, welche an jedem Abend nach geeigneten Zwischenzeiten mehrfach — bis acht Mal — ausgeführt ist, war in Gotha auf dem in gewöhnlicher Weise eingerichteten (anzuhängenden) Ertel'schen Niveauträger an Stelle des zum Meridiankreis gehörigen Spiritusniveaus, damit die Nivellements in kürzerer Zeit gemacht werden könnten, ein Repsold'sches Aetherniveau befestigt, welches für gewöhnlich zum Nivellement eines Collimators für den Meridiankreis dient. Bei der Untersuchung desselben, welche erst nach Beendigung der Beobachtungen für die Längenbestimmung vorgenommen werden konnte, zeigte sich eine Verschiedenheit der Theilwerthe an verschiedenen Stellen der Röhre; innerhalb der Grenzen jedoch, zwischen welchen sich die Blasen-Enden bei den Beobachtungen bewegt hatten, — bis zu Entfernungen von 60 — 65 Theilen vom Mittelpunct — liessen sich zahlreiche im Mai 1865 bestimmte Werthe der Theile durch die Formel $1^p = 0''939 + 0''0000817\,nn$ darstellen, wo n den Abstand des betreffenden Theils vom Mittelpunct — durch die Scale selbst gemessen — bezeichnet. Da der Collimationsfehler des Niveaus immer nahe $= 0$ gewesen ist, so konnten die in Theilen desselben gefundenen Neigungen

einfach mit Hülfe einer aus der angegebenen Formel berechneten Tafel mit dem doppelten Argument »Neigung und Blasenlänge« in Winkelwerthe verwandelt werden. Die Blasenlängen ändern sich mit der Temperatur sehr stark und variirten in Folge dessen bei der Längenbestimmung zwischen 65 und 110 Theilen (entsprechend den Ständen des innern Thermometers 20°9 und 4°0 C.), während die Untersuchungen, auf welchen die Formel beruht, nur bei sehr hohen Temperaturen (zwischen 16 und 25°) angestellt werden konnten; erst nach Abschluss aller Reductionen fand sich im November Gelegenheit zu einer Bestimmung des Theilwerthes bei 4° C., welche indess keine zu verbürgende Abweichung von der Formel gab.

Das Leipziger Niveau von Pistor und Martins wird auf die Zapfen über den Stellen aufgesetzt, in welchen dieselben die Lager berühren. Der Werth eines Theils der Scale ist früher im Sommer = 1."60 ± 0."03 und im Winter = 1."65 ± 0."02 gefunden; zur Verwandlung der kleinen hier vorkommenden Neigungen ist 1^p = 0:11 gesetzt.

Die beobachteten Neigungen selbst (Erhebungen des West-Endes = *i* und die daraus abgeleiteten Werthe) sind in Gotha folgende gewesen.

1865.	Stzt.	Kreis.	Beob. *i*.	L.	*i* in Zeit.		Angen. für Kr. W.
					beob.	für Kr. W.	
April 1.	9h8	O.	+ 0p11	114p2	+0s009	+0s284	+0s284
4.	1.0		− 2.06	104.0	−0.159	+0.116	+0.116
	9.6		− 4.25	110.0	−0.336	−0.061	
	11.1	W.	− 0.25	108.8	−0.020	−0.020	
	11.8		− 0.04	108.8	−0.003	−0.003	
	12.6	O.	− 3.99	108.9	−0.315	−0.040	−0.036
	14.7		− 3.75	109.7	−0.296	−0.021	
	16.0	W.	− 0.90	109.6	−0.071	−0.071	
7.	1.2		− 2.99	96.0	−0.224	−0.224	−0.224
	9.6		− 5.14	95.9	−0.382	−0.382	−0.382
8.	1.8		− 4.44	89.2	−0.347	−0.347	−0.347
	9.6		− 4.82	93.4	−0.357	−0.357	
	11.2	O.	− 8.58	94.5	−0.642	−0.367	
	11.8		− 8.89	95.1	−0.665	−0.390	−0.339 − 0s0264 (t − 9h6)
	12.6	W.	− 5.25	96.6	−0.396	−0.396	
	13.8		− 6.23	99.7	−0.475	−0.475	
	0.4		− 5.78	86.9	−0.424	−0.424	−0.395
9.	1.8	O.	− 8.80	85.2	−0.640	−0.365	
	9.5		− 9.60	88.7	−0.700	−0.425	−0.455
	11.1	W.	− 6.54	92.1	−0.485	−0.485	
10.	1.8		− 6.11	82.3	−0.439	−0.439	−0.439
	9.5		− 7.19	83.9	−0.520	−0.520	
	11.2	O.	−10.22	83.9	−0.741	−0.466	−0.503
	11.8		−11.00	83.7	−0.798	−0.523	

1865.	Stzt.	Kreis.	Beob. i.	L.	i in Zeit. beob.	i in Zeit. für Kr. W.	Angen. für Kr. W.
April 10.	12h6	W.	−11p24	85p0	−0s818	−0s808	−0s811
	13.9		−10.97	87.6	−0.805	−0.815	
	0.4		−11.84	89.0	−0.872	−0.872	−0.872
11.	1.8	O.	−12.99	87.7	−0.955	−0.680	−0.680
	7.5	Das östliche Lager 17p1 erniedrigt.					
	9.6		+ 2.18	90.8	+0.160	+0.435	
	11.1	W.	+ 7.11	92.8	+0.530	+0.530	
	11.8		+ 6.71	94.2	+0.501	+0.501	+0.474
	12.6	O.	+ 2.46	94.6	+0.184	+0.459	
	13.6		+ 2.24	95.5	+0.168	+0.443	
	1.0		+ 2.80	87.0	+0.204	+0.479	+0.479
13.	10.2	W.	+ 5.26	83.1	+0.380	+0.380	
	11.3		+ 5.31	84.5	+0.385	+0.385	+0.360
	11.8		+ 4.37	84.3	+0.316	+0.316	
	12.3	O.	−12.06	84.3	−0.876	−0.601	−0.608
	13.3		−12.24	84.5	−0.890	−0.615	
	1.4		−10.92	77.3	−0.777	−0.502	
14.	1.8		−10.16	75.7	−0.718	−0.443	−0.480
	2.0	W.	− 7.06	74.8	−0.502	−0.502	
	2.2	O.	−10.60	74.8	−0.747	−0.472	
15.		Das östliche Lager erniedrigt.					
	9.7		+ 1.67	80.7	+0.119	+0.394	+0.394
	23.2		+ 1.19	83.3	+0.086	+0.361	+0.365
	0.7		+ 1.30	79.5	+0.093	+0.368	
		An das Fernrohr gestossen.					
16.	1.8		+ 4.65	76.4	+0.330	+0.605	+0.605
	7.3		+ 4.05	75.4	+0.284	+0.559	+0.559
	9.5		+ 2.56	81.0	+0.185	+0.460	+0.460
	10.7	W.	+ 2.55	82.3	+0.183	+0.183	+0.183
	11.7		+ 2.54	84.3	+0.183	+0.183	
	13.8		+ 0.98	86.2	+0.071	+0.071	+0.071
	1.7		+ 2.62	74.4	+0.184	+0.184	+0.184
17.	7.7		+ 1.50	75.1	+0.105	+0.105	+0.105
	9.5		+ 0.90	80.7	+0.064	+0.064	
	10.6	O.	− 2.28	80.2	−0.163	+0.112	+0.064
	11.5		− 3.65	80.4	−0.260	+0.015	
	12.2	W.	+ 1.69	80.1	+0.121	+0.121	
	14.2		+ 0.59	84.1	+0.043	+0.043	+0.128 − 0s0488 (t − 12h3
	14.8	O.	− 3.57	85.1	−0.258	+0.017	
	15.9		− 4.67	87.0	−0.340	−0.065	
	0.4		− 4.72	75.8	−0.333	−0.058	−0.066
18.	2.5		− 4.99	73.7	−0.350	−0.075	
	5.4		− 3.75	72.5	−0.262	+0.013	+0.013
	7.3		− 2.60	65.0	−0.178	+0.097	+0.097
	9.6		− 3.70	73.0	−0.258	+0.017	+0.022
	10.6	W.	+ 0.37	74.3	+0.026	+0.026	
	22.3		+ 0.02	80.0	+0.001	+0.001	
	0.5		+ 0.37	74.2	+0.026	+0.026	
	1.7	O.	− 4.10	70.0	−0.284	−0.009	−0.006
	1.8		− 4.60	69.2	−0.318	−0.043	
19.	4.6		− 4.09	66.0	−0.280	−0.005	−0.005

1865.	Stzt.	Kreis.	Beob. i.	L.	i in Zeit.		Angen. für Kr. W.
					beob.	für Kr. W.	
April 19.	9ʰ5	O.	— 6ᵖ05	74ᵖ0	—0ˢ424	—0ˢ149	
	10.6	W.	— 2.01	74.3	—0.142	—0.142	—0ˢ151
	11.5		— 2.32	74.7	—0.163	—0.163	
	12.3	O.	— 1.52	75.2	—0.107	+0.168	+0.122
	14.2		— 2.78	78.7	—0.198	+0.077	
	14.8	W.	— 3.67	79.0	—0.261	—0.261	—0.261
	15.9	O.	—10.12	80.9	—0.724	—0.449	—0.449
	22.9		— 9.90	75.6	—0.697	—0.422	—0.422
	0.4		—11.22	74.6	—0.790	—0.515	—0.506
	1.7	W.	— 7.15	70.7	—0.497	—0.497	
20.	7.7		— 6.60	68.9	—0.457	—0.457	—0.457
	9.6		— 7.84	75.0	—0.552	—0.552	
	10.7	O.	—10.95	75.8	—0.775	—0.500	
	11.6		—11.75	76.0	—0.832	—0.557	—0.532
	12.3	W.	— 7.32	76.5	—0.518	—0.518	
	13.5		— 7.50	78.5	—0.534	—0.534	
	0.6		—11.47	72.9	—0.804	—0.804	—0.765
	1.7	O.	—14.37	70.1	—1.001	—0.726	
21.	7.7		—11.62	70.6	—0.810	—0.535	
	9.7		—13.29	77.9	—0.948	—0.673	
	10.7	W.	— 9.50	78.8	—0.677	—0.677	—0.729 — 0ˢ0574 (t — 11ʰ0)
	11.6		—10.26	81.3	—0.738	—0.738	
	12.3	O.	—15.98	79.8	—1.148	—0.873	
	14.0		—15.88	83.2	—1.151	—0.876	
23.	0.5	Das östliche Ende 41ᵖ erniedrigt.					
	0.8		+19.22	72.0	+1.354	+1.629	+1.634
	1.7	W.	+23.39	68.7	+1.640	+1.640	
24.	9.6		+22.84	70.4	+1.606	+1.606	
	10.6	O.	+19.02	72.5	+1.341	+1.616	+1.602
	11.8		+18.85	74.5	+1.337	+1.612	
	12.6	W.	+22.00	77.0	+1.576	+1.576	
	13.9		+21 28	79.5	+1.534	+1.534	+1.534
	0.5		+22.56	70.9	+1.589	+1.589	+1.610
	1.7	O.	+19.42	68.7	+1.356	+1.631	
25.	10.6		+17.50	70.8	+1.226	+1.501	+1.501
	1.9		+18.23	71.5	+1.280	+1.555	+1.555
27.	10.6		+15.82	77.0	+1.127	+1.402	+1.402
	1.0		+16.60	77.0	+1.183	+1.458	+1.458

Jedes dieser 109 Nivellements beruht auf je zwei Anhängungen des Niveaus in den beiden entgegengesetzten Horizontalstellungen des Fernrohrs; nur April 4, 11ʰ8, wurde aus Versehen zwei Mal bei Obj. S. nivellirt und die gefundene Neigung um — 0ᵖ94 corrigirt, da aus allen Nivellements eine — bis auf etwa 0ᵖ03 sichere — Differenz von 1ᵖ88 zwischen den scheinbaren Neigungen bei Obj. S. und Obj. N. hervorgieng ($i\,N$ kleiner als $i\,S$ bis April 11, und nachher, nach der Vertauschung von Objectiv und Ocular, ebensoviel grösser).

Die beobachteten i zeigen eine ungewöhnlich starke Veränderlichkeit der Neigung des Instruments. Um den Gang derselben besser anschaulich zu machen, sind in der Columne »i in Zeit für Kr. West« die Zahlen der vorhergehenden Columne (beobachtete scheinbare Neigung in Zeitsecunden) alle auf die Lage des Instruments »Kr. West« reducirt angegeben, indem zu den bei Kr. O. gefundenen Werthen von i, + 0ˢ275 addirt ist. Diese Differenz ergibt sich nämlich für i (W — O) aus 27 zur Bestimmung derselben geeigneten Umlegungen zwischen April 4 und 24 und weicht nur um eine nicht zu verbürgende Quantität von dem Resultate (+ 0ˢ266) von 17 vor 39 Jahren vorgenommenen Umlegungen ab.

Es ist nun aus dem obigen Tableau zunächst ersichtlich, dass während der ganzen Beobachtungszeit eine rasch fortschreitende relative Erhebung des östlichen Endes stattgefunden hat, deren ostensibler Grund das Eindringen der am Anfang des April ungewöhnlich stark (vom Morgen des 21. März bis zum Mittag des 10. April von der Temperatur — 20° C. bis + 20° C.) zunehmenden Wärme in das Fundament des Instruments ist. Der besondere Umstand, dass die äussere Luft (ausser April 11 — 19) durch ein zu spät beachtetes Fenster in der Nähe des östlichen Pfeilers des Meridiankreises Zutritt zu diesem, aus einem bis in das erste Stockwerk, in welchem der Kreis aufgestellt ist, hinaufreichenden Gewölbe bestehenden, Fundament hatte, ist Veranlassung einer neben der fortschreitenden Aenderung in der Neigung ersichtlichen täglichen periodischen geworden, deren Amplitude an heiteren Tagen etwa 1″5 in Bogen betragen hat. Ausserdem aber sind endlich noch unregelmässige Aenderungen der Neigung vorgekommen, welche grösstentheils durch Erschütterungen der Lager beim Umlegen verursacht sein werden, obwohl sich gerade an den Stellen, wo die stärksten Sprünge vorkommen, (April 10. 12ʰ6, April 13. 12ʰ3, April 19. 12ʰ3 und 14ʰ8, April 21. 12ʰ3) im Beobachtungsjournal keine solche notirt finden.

Das häufige Vorkommen dieser Sprünge hat es unmöglich gemacht, das Gesetz der fortschreitenden und periodischen Aenderungen der Neigung genauer zu ermitteln und mit Anwendung desselben die verschiedenen Nivellements der einzelnen Beobachtungstage zu einem für die Reduction anzunehmenden Gesammtresultat zu combiniren. Es blieb vielmehr nichts übrig, als für jede Gruppe von Beobachtungen die

Neigung so anzunehmen, wie das nächstliegende Nivellement dieselbe angegeben hatte, oder auch, so lange keine zu verbürgende Aenderung erschien, ein gemeinschaftliches Mittel für mehrere Gruppen; an drei Stellen endlich, wo eine Reihe aufeinander folgender Nivellements eine sehr nahe der Zeit proportionale Aenderung zeigt, ist diese Form der Ausgleichung derselben gewählt. Die Genauigkeit der Reductionen auf den Meridian wird übrigens durch die nothwendige Trennung der Nivellements in viele verschiedene Gruppen nicht wesentlich beeinträchtigt worden sein, da Dank der Constanz des Niveaus die einzelnen Nivellements eine grosse Sicherheit besitzen. Der mittlere Fehler eines einzelnen findet sich nämlich aus den Abweichungen der für i (Obj. N.) — i (Obj. S.) gefundenen Werthe von ihrem Mittel für A ± 0ˢ015, für B ± 0ˢ038 (auf einem anderen Wege ergibt sich für letztere Zahl aber der durchschnittlich wohl richtigere Werth ± 0ˢ028), abgesehen von dem in der Verwandlung der Scalentheile in Winkelwerthe zu befürchtenden mittleren Fehler, welcher allerdings für die grossen vorgekommenen Neigungen nicht ganz unmerklich sein mag; am letzten Beobachtungstage ist dem Instrumente aber, da bis dahin negative Neigungen vorgeherrscht hatten, eine so starke positive Neigung gegeben worden, dass das Mittel aller an den Beobachtungstagen vorgekommenen Neigungen nahe = 0 und das Resultat für die Längendifferenz demnach von dem Einflusse eines etwaigen Fehlers des angewandten Scalenwerthes frei geworden ist.

Die zur Reduction angenommenen Werthe der scheinbaren Neigung für Kr. W. sind in der letzten Columne des obigen Tableaus zusammengestellt. Die scheinbaren Neigungen für Kr. O. erhält man daraus durch Subtraction von 0ˢ275.4. Diese Differenz ist aber nicht die reine Wirkung der Ungleichheit der Zapfendurchmesser, sondern aus dieser und dem Einfluss der Mehrbelastung des einen Pfeilers durch den Kreis und das zu demselben gehörige Gegengewicht zusammengesetzt. Zur Ermittelung des Antheils der letzteren wurden einige Experimente — theils Nivellements, theils Polarsternbeobachtungen bei verschiedenen Belastungen eines Pfeilers mit Gewichten von 4 bis 19 Kilogramm — angestellt, welche eine nahezu der Mehrbelastung proportionale Aenderung der Neigung anzeigten. Für die Umsetzung einer Mehrbelastung von 5.3 Kilogramm, welcher der Kreispfeiler während der Längenbestimmung unterworfen gewesen ist, folgte daraus eine Aenderung von

0?179 (bei $i = 15^p$ und $L = 70^p$) = 0"013.4; die Ungleichheit der Zapfen würde demnach allein eine Differenz in den scheinbaren Neigungen von W. — O. = + 0?289 hervorgebracht haben, und die wahre Neigung wird damit, indem die Zapfenlager Winkel von 72° die Niveauarme solche von 90° haben, = der scheinbaren ∓ 0"066 für Kr. $\left\{\begin{matrix}W.\\O.\end{matrix}\right\}$.

Die demnach zur Reduction der Gothaer Beobachtungen angewandten Werthe der wahren Neigung sind folgende.

April.	Neigung für	Kr. Ost.	Kr. West.	April.	Neigung für	Kr. Ost.	Kr. We
4.	α Urs. min. O. C.	−0"093	—	17.	12h2 — 12h7	—	+0"0
	Abends	−0.245	−0"102		α Urs. min. U. C.	—	+0.0
7.	α Urs. min. O. C.	—	−0.290		Reg.-St. II.	−0"203	−0.0
	Abends	—	−0.448		Pol. II.	−0.232	—
8.	α Urs. min. O. C.	—	−0.383		15h6 — 15h9	−0.244	—
	9h8 — 10h2	—	−0.416	18.	7h5	−0.112	—
	Pol. I.	−0.572	−0.423		Abends	−0.187	−0.0
	10h7 — 11h0	−0.581	—		α Urs. min. O. C.	−0.215	−0.0
	Reg.-Sterne	−0.606	−0.479	19.	9h8 — 12h0	−0.360	−0.2
	α Urs. min. U. C.	—	−0.498		12.2 — 14.5	−0.087	—
	η Urs. maj.	—	−0.514		14.5 — 15.3	—	−0.3
8/9.	α Urs. min. O. C.	−0.604	−0.461		15.4 — 15.9	−0.658	—
9.	Abends	−0.664	−0.521		α Urs. min. O. C.	−0.715	−0.5
	α Urs. min. O. C.	—	−0.505	20.	7h5	—	−0.5
10.	9h8 — 12h0	−0.712	−0.569		Abends	−0.741	−0.5
	12.1 — 13.7	—	−0.877		α Urs. min. O. C.	−0.974	−0.8
	α Urs. min. O. C.	−0.889	−0.938	21.	7h5	−0.737	—
11.	Abends	+0.252	+0.395*)		Auge- u. Ohr-St.	−0.884	−0.7
	α Urs. min. O. C.	+0.270	—		Pol. I.	−0.895	−0.7
13.	Abends	−0.817	+0.294		Reg.-Sterne	−1.018	−0.8
	α Urs. min. O. C.	−0.689	—		α Urs. min. U. C.	−1.070	—
14.	Abends	−0.75:	—		η Urs. maj.	−1.092	—
15.	α Urs. min. O. C.	+0.396	—	23.	α Urs. min. O. C.	+1.425	+1.5
16.	7h5	+0.350	—	24.	Ab. bis 12h8	+1.393	+1.5
	Ab. bis 12h0	+0.251	+0.117		α Urs. m. u. α Virg.	—	+1.4
	α Urs. min. U. C.	—	+0.005		α Urs. min. O. C.	+1.401	+1.5
	α Urs. min. O. C.	—	+0.118	25.	Abends	+1.292	—
17.	7h5	—	+0.039	27.	Abends	+1.193	—
	9h6 — 12h0	−0.145	−0.002		α Urs. min. O. C.	+1.249	—

*) Die für diesen Abend angenommenen Neigungen entsprechen der scheinbaren + 0"461 für Kr. W., welcher Werth an Stelle des oben gegebenen Mittels + 0"471 zunächst aus Versehen angewandt, aber absichtlich nicht verbessert wurde, weil das April 11. 11h1, ausgeführte Nivellement, welches die grösste Neigung für diesen Abend gegeben hatte, weniger sicher schien.

Mit diesen Neigungen geben die Umlegungen folgende Werthe an, aus denen der Collimationsfehler c abzuleiten ist:

April.	Stern.	Secunde der Durchgangszeit durch den Mittelfaden.	Correct. für i.	W. — O. $= \mp 2c \sec. \delta$.	Gew. c.
4.	Pol. I. U. C.	Kr. O. $24^s.85$ 5 F.	+ $2^s.22$	+ $7^s.86$	13.33
		W. 34.00 10 ,,	+ 0.93		
	Pol. II. U. C.	O. 29.64 6 ,,	+ 2.72	+ 8.30	12.00
		W. 39.53 6 ,,	+ 1.13		
8.	Pol. I. U. C.	W. 33.70 7 ,,	+ 3.84	+ 8.60	15.75
		O. 23.83 9 ,,	+ 5.11		
	α Urs. min.	W. 35.93 10 ,,	—14.84	—28.36	20.95
		O. 68.89 11 ,,	—19.44		
9.	Pol. I. U. C.	O. 23.92 7 ,,	+ 6.02	+ 7.67	15.75
		W. 32.84 9 ,,	+ 4.77		
10.	Pol. I. U. C.	W. 33.27 5 ,,	+ 5.16	+ 8.96	10.00
		O. 23.01 5 ,,	+ 6.46		
	α Urs. min.	W. 46.98 10 ,,	—30.19	—28.46	20.00
		O. 73.87 10 ,,	—28.62		
11.	Pol. I. U. C.	O. 36.00 5 ,,	— 2.29	+ 8.38	12.31
		W. 45.67 8 ,,	— 3.58		

Am 13. April wurden Ocular und Objectiv vertauscht, der Collimationsfehler demnach ein anderer. Die weiteren Werthe sind:

April.	Stern.	Secunde der Durchgangszeit durch den Mittelfaden.	Correct. für i.	W. — O. $= \mp 2c \sec. \delta$.	Gew. c.
17.	Pol. I. U. C.	Kr. W. $8^s.13$ 8 F.	+ $0^s.02$	+ $2^s.96$	12.31
		O. 3.88 5 ,,	+ 1.31		
18.	Pol. I. U. C.	O. 1.98 8 ,,	+ 1.69	+ 2.99	10.67
		W. 6.26 4 ,,	+ 0.40		
	α Urs. min.	W. 31.98 13 ,,	— 2.32	—11.95	22.61
		O. 48.53 10 ,,	— 6.92		
19.	Pol. I. U. C.	O. 4.52 8 ,,	+ 3.26	+ 2.57	8.73
		W. 8.39 3 ,,	+ 1.96		
	Pol. II. U. C.	W. 14.31 5 ,,	+ 3.63	— 2.59	13.33
		O. 13.23 10 ,,	+ 7.30		
	α Urs. min.	O. 42.62 13 ,,	—23.01	— 9.30	22.61
		W. 27.72 10 ,,	—18.41		
20.	Pol. I. U. C.	W. 15.07 5 ,,	+ 5.42	+ 4.34	12.31
		O. 9.43 8 ,,	+ 6.72		
	α Urs. min.	W. 31.98 12 ,,	—26.75	—12.08	20.57
		O. 48.66 9 ,,	—31.35		
21.	Pol. I. U. C.	O. 10.03 5 ,,	+ 7.99	+ 3.02	11.67
		W. 13.92 7 ,,	+ 7.12		
23.	α Urs. min.	O. 20.35 8 ,,	+45.87	— 9.11	17.78
		W. 6.64 10 ,,	+50.47		
24.	Pol. I. U. C.	W. 34.11 5 ,,	—13.93	+ 3.93	13.33
		O. 28.89 10 ,,	—12.64		
	α Urs. min.	W. 6.19 8 ,,	+49.69	—12.88	19.81
		O. 23.67 13 ,,	+45.09		

Als Gewichtseinheit ist für die Zahlen der letzten Columne das Gewicht eines Fadenantritts des betreffenden Sterns angenommen. Es haben sich aber für die mit cos δ multiplicirten mittleren Fehler eines Antritts der Polsterne am Gothaer Instrument folgende Werthe ergeben:

	A	p	B	p
für P. I.	$= \pm$ 0ˢ0453	$=$ 1.22	$= \pm$ 0ˢ0661	$=$ 0.57
P. II.	0.0538	0.86	0.0924	0.29
α U. m.	0.0397	1.59	0.0403	1.54

Die vorhin angegebenen Gewichte sind hiernach mit den Zahlen p zu multipliciren, wenn man für die Gewichtseinheit einen mittlern Fehler $\pm$ 0ˢ05 annehmen will, und man erhält:

		c	G	G'
April 4.	I.	$=$ — 0ˢ314	$=$ 16.3	$=$ 4.8
	II.	— 0.274	10.3	4.1
8.	I.	— 0.343	19.2	5.1
	α Urs.	— 0.349	33.3	5.7
9.	I.	— 0.306	19.2	5.1
10.	I.	— 0.357	12.2	4.3
	α Urs.	— 0.350	31.8	5.6
11.	I.	— 0.334	15.0	4.7
April 17.	I.	$=$ — 0.118	$=$ 7.0	$=$ 3.5
18.	I.	— 0.119	6.1	3.2
	α Urs.	— 0.147	34.8	5.7
19.	I.	— 0.103	5.0	2.9
	(II.	+ 0.085	3.9	—)
	α Urs.	— 0.114	34.8	5.7
20.	I.	— 0.173	7.0	3.5
	α Urs.	— 0.149	31.7	5.6
21.	I.	— 0.120	6.7	3.4
23.	α Urs.	— 0.111	28.3	5.6
24.	I.	— 0.157	16.2	4.8
	α Urs.	— 0.158	31.5	5.7

Das Zeichen von c gilt für Kr. Ost. Die nach den Gewichten G genommenen Mittel sind — 0ˢ336 und — 0ˢ136; die Abweichungen von denselben geben aber durch ihre Grösse zu erkennen, dass neben den Beobachtungsfehlern der Antritte noch eine andere Fehlerquelle, und zwar in stärkerem Grade als jene, auf die Bestimmungen von c eingewirkt hat; wahrscheinlich sind beim Umlegen jedes Mal kleine Verstellungen der Lager vorgekommen. Als mittlerer hiervon herrührender

Fehler eines c findet sich $\pm$ 0ˢ019 und damit das Gewicht $= G'$ $= 0.050^2 : \left(0.019^2 + \frac{0.050^2}{G}\right)$, und die wahrscheinlichsten Mittel für c werden:

bis April 11: — 0ˢ330 mittl. Fehler ± 0ˢ008
von April 13 an: — 0.135 „ „ ± 0.007

Dabei ist aus der zweiten Gruppe das gänzlich abweichende Resultat der Beobachtung von Polstern II am 19. April ausgeschlossen. Da die Beobachtung selbst nach der Uebereinstimmung der in den beiden Lagen erhaltenen 5 resp. 10 Fäden durchaus sicher ist, muss angenommen werden, dass durch die Umlegung eine beträchtliche Veränderung des Azimuths veranlasst ist, was um so wahrscheinlicher ist, als zugleich nach der Umlegung in den Nivellements ein Sprung von fast drei Theilen erscheint.

Bei der Reduction sind statt der obigen Mittel die Werthe c = — 0ˢ329 und — 0ˢ131 angewandt, welche anfangs nach einer vorläufigen Rechnung gefunden waren.

Die zur Ableitung der Azimuthe aus den Polarstern-Beobachtungen nothwendigen Uhrcorrectionen sind aus allen während der Längenbestimmung gemachten Beobachtungen der Fundamentalsterne (der Tabulae Red.) und der unter den Längensternen ausserdem vorkommenden Sterne des Nautical Almanac-Katalogs π, l und χ Leonis und η Virginis durch wiederholte Annäherung berechnet. Für die eben genannten vier Sterne sind die um 0ˢ021 vergrösserten Rectascensionen des Greenwicher Seven-Year-Catalogue angewandt, indem zu den Oertern des Nautical Almanac folgende Correctionen hinzugefügt wurden:

π Leonis	+ 0ˢ023
l Leonis	+ 0.047
χ Leonis	+ 0.009
η Virginis	+ 0.066

Mit Berücksichtigung dieser Correctionen finden sich folgende Unterschiede zwischen den Uhrcorrectionen aus Registrirbeobachtungen und den Uhrcorrectionen nach Auge- und Ohr-Beobachtungen:

für A. April 4. $\Delta U(R) - \Delta U(A.O) =$	— 0ˢ35
8.	— 0.43
10.	— 0.41
11.	— 0.45
24.	— 0.45

für *B*. April 16. $\Delta U(R) - \Delta U(A.O) = -$ 0ˢ25
19. — 0.31
20. — 0.25
21. — 0.51

im Mittel — 0ˢ42 für *A*. und — 0ˢ33 für *B*. Diese Differenzen mussten hier aufgeführt werden, weil sie, wie sich später zeigen wird, für die Beurtheilung einer Gruppe von Beobachtungen von Wichtigkeit geworden sind. — Mit Benutzung derselben ergaben sich die zur Berechnung der Azimuthe anzunehmenden Uhrcorrectionen (für Beobachtungen nach dem Gehör) und die täglichen Uhrgänge, wie folgt:

April.	Uhrzt.	Corr.	Gang.
4.	11ʰ9	— 7ˢ54	
			— 0ˢ26
7.	9.9	— 8.29	
			— 0.61
8.	11.5	— 8.94	
	0.6	— 9.01	— 0.50
9.	10.5	— 9.42	— 0.64
	0.6	— 9.66	— 0.55
10.	11.5	— 9.99	— 0.59
	0.6	— 10.25	— 0.90
11.	11.5	— 10.89	
			— 0.82
14.	9.9	— 13.30	
			— 0.66
16.	9.9	— 14.61	
			— 0.57

April.	Uhrzt.	Corr.	Gang.
17.	10ʰ0	— 15ˢ18	
			— 1ˢ15
18.	9.5	— 16.31	
			— 0.88
19.	12.1	— 17.29	
			— 1.02
20.	10.5	— 18.24	
			— 1.27
21.	10.2	— 19.49	
			— 0.7:
23.	0.6	— 14.94	
24.	11.5	— 15.18	— 0.57
	0.6	— 15.51	— 0.60
25.	10.4	— 15.78	
			— 0.63
27.	10.7	— 17.04	
	0.6	— 17.62	

Am 22. April wurde die Uhr angehalten und der Contact gereinigt, weil am Abend vorher der elektrische Apparat einige Mal versagt hätte; der Stand wurde dabei 6 — 7ˢ geändert. Die Uhr ist nicht unbeträchtlich übercompensirt, welchem Umstande auch die Schwankungen in den eben aufgeführten täglichen Gängen entsprechen, sowie das kleine durch die Beobachtungen von α Cassiopeiae (0ʰ6) angedeutete Zurückbleiben von vielleicht 0ˢ1 gegen die Abendstände, welches jedoch, wenn es auch reell sein sollte, nicht die Möglichkeit eines stärkeren Voreilens in Folge der Ungleichheit der Wärmewirkungen auf die Pendelstange und das Quecksilber gerade während der abendlichen Beobachtungszeiten ausschliesst, von welchem sich bei der Ableitung der Längendifferenzen Spuren gezeigt haben.

Mit den angegebenen Werthen der Neigungen, Collimationsfehler und Uhrcorrectionen verbessert und mit Berücksichtigung der täglichen Aberration (Corr. der AR. ± 0ˢ53 für α Urs. min. $\left\{\begin{matrix}O.\\U.\end{matrix}\right\}$ C., — 0ˢ16 für Polst. I. U. C. und — 0ˢ20 für Polst. II. U. C.) sind nun die Beobachtungen der Polsterne mit den für letztere angenommenen Rectascensionen

Datum	Zeit	k
April 4.	9^h8 bis 10^h2	$k = +0^s44$
	10.7 „ 11.0	+0.42
	11.6 „ 12.0	+0.41
	12.1 „ 12.7	+0.40
	14.8 „ 15.2	+0.37
	15.6 „ 15.9	+0.36
7.	9.8 „ 10.0	+0.37
8.	9.8 „ 10.2	+0.35
	10.7 „ 11.0	+0.34
	11.6 „ 12.0	+0.33
	12.1 „ 12.7	+0.33
	η Urs. maj.	+0.32
	α Cassiop.	+0.38
9.	9^h8 bis 10^h2	+0.40
	10.7 „ 11.0	+0.39
	α Cassiop.	+0.48
10.	9^h8 bis 10.2	+0.42
	10.7 „ 11.0	+0.41
	11.6 „ 12.0	+0.39
	12.1 „ 12.7	+0.38
	η Urs. maj.	+0.35
	α Cassiop.	+0.19
11.	9^h8 bis 10^h2	+0.11
	10.7 „ 11.0	+0.11
	11.6 „ 12.0	+0.09
	12.2 „ 12.7	+0.07
	η Urs. maj.	0.00
13.	11^h6 bis 12^h0	−0.07:
	12.4 „ 12.7	−2.64
14.	9.8 „ 10.0	−2.38
16.	7.4 „ 7.6	−2.16
	9.8 „ 10.2	−2.22
	10.7 „ 11.0	−2.26
	11.6 „ 11.7	−2.32
	η Urs. maj.	−2.48
17.	7^h4 bis 7^h6	−2.34
	9.8 „ 10.2	−2.46
	10.7 „ 11.0	−2.50
April 17	11^h6 bis 12^h0	$k = -2.52$
	12.1 „ 12.7	−2.53
	14.0 „ 14.4	−2.55
	14.6 „ 14.9	−2.55
	15.6 „ 15.9	−2.55
18.	α Geminor.	−2.13
	9^h8 bis 10^h2	−2.18
	10.8 „ 11.0	−2.23
19.	9.8 „ 10.2	−2.57
	10.7 „ 11.0	−2.61
	11.6 „ 12.0	−2.65
	12.2 „ 12.7	−2.68
	η Urs. maj.	−2.78
	14^h0 bis 14^h4	−2.79
	14.6 „ 14.9	−2.80
	15.0 „ 15.2	−2.81
	15.6 „ 15.9	−3.35
20.	7.5 „ 7.6	−3.38
	9.8 „ 10.2	−3.44
	10.7 „ 11.0	−3.46
	11.6 „ 12.0	−3.48
	12.1 „ 12.7	−3.50
	η Urs. maj.	−3.53
21.	7^h4 bis 7^h6	−3.42
	9.8 „ 10.2	−3.45
	10.7 „ 11.0	−3.46
	11.6 „ 12.0	−3.51
	12.1 „ 12.7	−3.60
	η Urs. maj.	−3.83
23.	α Cassiop.	−3.70
24.	9^h8 bis 10^h2	−3.69
	10.7 „ 11.0	−3.68
	11.6 „ 12.0	−3.67
	12.1 „ 12.7	−3.66
	α Virginis	−3.65
	α Cassiop.	−3.70
25.	10^h7 bis 11^h0	−3.88

In Leipzig sind die Neigungen mit dem Aufsatzniveau unmittelbar für die Einstellungen des Instruments auf die Zenithdistanz des Pols und

eine entsprechende südliche bestimmt. Die Mittel aus je zwei solchen Bestimmungen, zwischen denen kein beständiger Unterschied merklich ist (der aus den 68 Nivellements für die Längenbestimmung folgende Werth N.—S. = + 0^{p}09 = + 0$''$010 ist wenigstens kaum dem Zeichen nach zu verbürgen), sind folgende:

April.	Stzt.	Non.	Beob. *i*.	Für N. W.		
2.	9^{h}5	W	−1^{p}68	−1^{p}68	10^{h}3	−1^{p}56
	11.1	O	+4.25	−1.43		
4.	9.5	W	−2.07	−2.07		
	11.1	O	+3.40	−2.28		
	11.8		+3.55	−2.13	12.4	−1.76
	12.3	W	−1.30	−1.30		
	14.0		−1.15	−1.15		
	15.9	O	+4.05	−1.63		
6.	9.7		+2.87	−2.81	9.7	−2.81
8.	9.7		+2.47	−3.21		
	11.1	W	−3.16	−3.16	11.2	−3.02
	11.8		−2.90	−2.90		
	12.3	O	+2.85	−2.83		
9.	9.5	W	−3.22	−3.22	10.3	−3.34
	11.1	O	+2.22	−3.46		
10.	9.5	W	−3.67	−3.67		
	11.1	O	+2.05	−3.63	11.2	−3.44
	11.8		+1.99	−3.69		
	12.3	W	−2.78	−2.78		
11.	9.5	O	+2.55	−3.13		
	11.1	W	−3.02	−3.02	11.2	−3.65
	11.8		−2.05	−2.05		
	12.3	O	+3.27	−2.41		
13.	11.8	W	−3.19	−3.19		
	12.6	O	+1.60	−4.08	12.7	−3.80
	13.7		+1.54	−4.14		
15.	10.6	W	−4.11	−4.11	12.1	−4.20
	13.7	O	+1.38	−4.30		
16.	9.6		+2.05	−3.63		
	11.1	W	−3.82	−3.82	10.8	−3.78
	11.8		−3.89	−3.89		
	1.7		−3.87	−3.87	1.7	−3.87
17.	9.7		−3.90	−3.90		
	11.1	O	+1.78	−3.90		
17.	11^{h}9	O	+2^{p}01	−3^{p}67		
	12.6	W	−4.31	−4.31	12^{h}9	−3^{p}86
	14.2		−4.00	−4.00		
	14.8	O	+2.31	−3.37		
	16.0	W	−3.86	−3.86		
18.	1.0		−3.89	−3.89	1.1	−3.93
	1.2	O	+1.70	−3.98		
19.	9.7		+1.71	−3.97		
	11.1	W	−3.86	−3.86		
	11.8		−4.04	−4.04		
	12.6	O	+1.88	−3.80	13.0	−3.67
	13.8	W	−3.44	−3.44		
	14.2	O	+2.30	−3.38		
	14.8	W	−3.35	−3.35		
	16.0	O	+2.18	−3.50		
	1.2		+1.98	−3.70	1.3	−3.66
	1.5	W	−3.62	−3.62		
20.	9.6		−3.45	−3.45		
	11.1	O	+2.09	−3.59		
	11.8		+2.26	−3.42	11.8	−3.32
	12.5	W	−3.27	−3.27		
	13.8	O	+2.81	−2.87		
21.	9.7		+2.30	−3.38		
	11.1	W	−3.41	−3.41		
	11.8		−3.11	−3.11	11.8	−3.20
	12.6	O	+2.69	−2.99		
	13.8	W	−3.12	−3.12		
24.	7.7		−3.78	−3.78		
	10.2		−3.60	−3.60		
	10.6	O	+2.25	−3.43	10.9	−3.33
	11.1		+2.77	−2.91		
	12.3	W	−2.80	−2.80		
	13.7		−3.44	−3.44		

Da der Aufsuchungskreis des Instruments am westlichen Pfeiler fest ist, werden die beiden Lagen durch diejenigen eines am durchbohrten Ende befindlichen Nonius unterschieden. Für die Differenz der scheinbaren Neigungen in beiden Lagen geben die vorstehenden Nivellements O.—W. = + 5^{p}62 (= + 0$''$62), während aus einer grösseren Anzahl früherer Bestimmungen + 5^{p}68 folgt, mit welchem W Alles zunächst auf die Lage Non. West reducirt ist. Die redu

Werthe, deren Mittel für jeden Tag in der letzten Columne angegeben sind, zeigen eine langsam fortschreitende Veränderung an, und zwar ist das Ost-Ende mit der Temperatur gestiegen. Daneben zeigen sich, da auch in Leipzig die äussere Luft Zutritt zum Fundamente gehabt hat, Spuren einer täglichen Periode, indem fast an jedem Abend ein zwar geringes, aber entschiedenes Steigen des Ost-Endes beobachtet ist, welcher Gang dem fortschreitenden in der ganzen Reihe nicht widerspricht, da das tägliche Temperaturmaximum des Fundaments wohl erst auf späte Nachtstunden gefallen sein wird. Zur nahen Darstellung der zwischen 7^h7 und 16^h0 vertheilten abendlichen Nivellements ist es ausreichend, das Steigen der Zeit proportional und für alle Abende gleich stark anzunehmen, unter welcher Voraussetzung sich die stündliche Veränderung der Neigung während dieses Zeitraums = + 0^p094 = + 0^s0103 ergibt. Mit diesem Werthe sind aus den oben angeführten Mitteln der an jedem Abend beobachteten Neigungen, welche eine vorzügliche Sicherheit besitzen, obwohl die Genauigkeit der einzelnen Nivellements etwas durch eine starke Veränderlichkeit der Collimation des Niveaus beeinträchtigt wurde, die zur Reduction der einzelnen Beobachtungsgruppen anzuwendenden Neigungen berechnet, zunächst die scheinbaren Neigungen für Non. W. und aus diesen durch Addition von + 1^p42 resp. + 4^p26 die wahren Neigungen für Non. W. resp. Non. O., und zwar sind bei der Kleinheit der stündlichen Aenderung alle Auge- und Ohr-Beobachtungen der Sterne 1—9 und des Polsterns I mit dem für 10^h4 berechneten, alle Registrirbeobachtungen der Sterne 10—19 mit dem Werthe für 12^h1 reducirt u. s. w., wie aus der folgenden Tafel ersichtlich ist, welche die angewandten Neigungen in Zeitsecunden angibt:

April.	Stzt.	Non. W.	Non. O.	April.	Stzt.	Non. W.	Non. O.
2.	10^h4	— 0^s014	+ 0^s298	11.	10^h4	— 0^s144	+ 0^s168
4.	10.4	— 0.058	+ 0.254		12.1	— 0.125	+ 0.187
	12.1	— 0.041	+ 0.272		13.1	— 0.115	+ 0.197
	13.1	— 0.030	+ 0.283	13.	10.4	— 0.286	+ 0.026
	15.4	— 0.007	+ 0.306		12.1	— 0.268	+ 0.044
8.	10.4	— 0.185	+ 0.128		13.1	— 0.257	+ 0.055
	12.1	— 0.166	+ 0.146	15.	10.4	— 0.323	— 0.011
	13.1	— 0.156	+ 0.156		12.1	— 0.306	+ 0.007
9.	10.4	— 0.210	+ 0.102		13.1	— 0.296	+ 0.016
10.	10.4	— 0.231	+ 0.081	16.	10.4	— 0.264	+ 0.048
	12.1	— 0.212	+ 0.100		12.1	— 0.246	+ 0.066
	13.1	— 0.202	+ 0.110		13.1	— 0.236	+ 0.076

April.	Stzt.	Non. W.	Non. O.	April.	Stzt.	Non. W.	Non. O.
16.	1h1	— 0s269	+ 0s043	19.	15h4	— 0s222	+ 0s090
17.	10.4	— 0.295	+ 0.018		1.1	— 0.246	+ 0.066
	12.1	— 0.277	+ 0.035	20.	10.4	— 0.223	+ 0.089
	13.1	— 0.266	+ 0.046		12.1	— 0.206	+ 0.107
	14.6	— 0.251	+ 0.062		13.1	— 0.196	+ 0.117
	15.4	— 0.242	+ 0.070	21.	10.4	— 0.210	+ 0.102
18.	1.1	— 0.275	+ 0.037		12.1	— 0.192	+ 0.120
19.	10.4	— 0.274	+ 0.038		13.1	— 0.183	+ 0.130
	12.1	— 0.256	+ 0.056	24.	10.4	— 0.216	+ 0.097
	13.1	— 0.246	+ 0.066		12.1	— 0.198	+ 0.114
	14.6	— 0.231	+ 0.081		13.1	— 0.187	+ 0.125

Das Material zur Bestimmung des Collimationsfehlers wird dann folgendes:

April.	Stern.	Sec. der Durchgangszeit durch den Mittelfaden.			Correct. für *i*.	W. — O.	Gew. ε.
2.	I. U. C.	Non. W.	38s33	11 F.	+ 0s13	+ 1s84	20.95
		O.	39.37	10 ,,	— 2.72		
4.	I. U. C.	W.	37.75	13 ,,	+ 0.53	+ 2.53	21.27
		O.	38.09	9 ,,	— 2.34		
	II. U. C.	W.	42.39	13 ,,	+ 0.08	+ 1.77	21.82
		O.	44.12	10 ,,	— 3.42		
8.	I. U. C.	O.	33.74	13 ,,	— 1.17	+ 0.30	22.61
		W.	31.19	10 ,,	+ 1.68		
	α Urs. min. U. C.	O.	31.32	9 ,,	— 4.85	— 0.38	18.00
		W.	21.24	9 ,,	+ 4.85		
9.	I. U. C.	W.	31.56	13 ,,	+ 1.92	+ 1.67	22.61
		O.	32.73	10 ,,	— 0.92		
10.	α Urs. min. U. C.	W.	34.71	8 ,,	+ 6.28	+ 3.37	12.31
		O.	41.04	5 ,,	— 1.42		
11.	I. U. C.	O.	46.00	12 ,,	— 3.53	+ 0.01	21.82
		W.	43.16	10 ,,	+ 1.32		
15.	I. U. C.	O.	35.35	10 ,,	— 1.05	+ 0.49	20.95
		W.	33.00	11 ,,	+ 0.79		
	α Urs. min. U. C.	W.	23.87	12 ,,	+ 2.21	+ 2.87	24.00
		O.	30.71	12 ,,	— 9.50		
16.	I. U. C.	O.	34.10	10 ,,	— 0.40	— 0.04	21.82
		W.	31.29	12 ,,	+ 0.37		
	α Urs. min.	O.	58.88	12 ,,	+ 2.39	— 2.77	20.57
		W.	66.20	9 ,,	— 8.70		
17.	I. U. C.	W.	30.86	11 ,,	+ 2.69	+ 0.30	20.95
		O.	33.41	10 ,,	— 0.16		
	II. U. C.	O.	35.27	10 ,,	— 0.78	+ 0.52	20.95
		W.	32.31	11 ,,	+ 2.70		
18.	α Urs. min.	W.	69.62	12 ,,	— 8.90	+ 3.28	24.96
		O.	56.25	13 ,,	+ 1.19		
19.	I. U. C.	O.	30.75	11 ,,	— 0.35	+ 1.17	22.96
		W.	29.07	12 ,,	+ 2.50		
	α Urs min. U. C.	O.	26.62	8 ,,	— 2.05	+ 3.01	19.20
		W.	19.93	12 ,,	+ 7.65		

April.	Stern.	Sec. der Durchgangszeit durch den Mittelfaden.	Correct. für *i*.	W. — O.	Gew. *c*.
19.	II. U. C.	Non. W. 29ˢ23 12 F. O. 31.69 12 ,,	+ 2ˢ48 — 1.00	+ 1ˢ02	24.00
	α Urs. min.	O. 0.01 8 ,, W. 2.93 7 ,,	+ 2.13 — 7.96	— 7.17	14.93
20.	I. U. C.	W. 28.23 11 ,, O. 29.82 13 ,,	+ 2.04 — 0.81	+ 1.26	21.67
	α Urs. min. U. C.	W. 18.72 11 ,, O. 22.26 12 ,,	+ 6.10 — 3.64	+ 6.20	22.96
21.	I. U. C.	O. 29.64 12 ,, W. 27.22 12 ,,	— 0.93 + 1.92	+ 0.43	24.00
	α Urs. min. U. C.	O. 25.00 11 ,, W. 14.78 11 ,,	— 4.04 + 5.69	— 0.49	22.00
24.	I. U. C.	W. 24.18 13 ,, O. 26.18 9 ,,	+ 1.97 — 0.89	+ 0.86	21.27

Die mit cos δ multiplicirten mittlern Antrittsfehler für die Beobachtungen der Polsterne am Leipziger Instrument sind:

	B.	p	A.	p
für P. I.	± 0ˢ0641	= 0.61	±0ˢ0481	= 1.41
P. II.	0.0716	0.49	0.0501	1.00
α Urs. min. O. C.	—	—	0.0479	1.09
α Urs. min. U. C.	0.0570	0.77	0.0431	1.35

Lässt man also einem mitleren Fehler ± 0ˢ05 das Gewicht $G = 1$ entsprechen, so wird

April		c	G	c'	G'
2.	aus I.	+0ˢ072	12.8	+0ˢ051	3.6
4.	I.	+0.101	13.0	+0.080	3.6
	II.	+0.058	10.7	+0.037	3.5
8.	I.	+0.012	13.8	+0.033	3.7
	α U. m.	—0.005	13.9	+0.016	3.7
9.	I.	+0.067	13.8	+0.046	3.7
10.	α U. m.	+0.042	9.5	+0.021	3.4
11.	I.	0.000	13.3	+0.021	3.7
15.	I.	+0.020	29.5	+0.041	4.4
	α U. m.	+0.035	32.4	+0.014	4.4
16.	I.	—0.002	30.8	+0.019	4.4
	α U. m.	+0.034	22.4	+0.013	4.2
17.	I.	+0.012	29.5	—0.009	4.4
	II.	+0.017	20.9	+0.038	4.1
18.	α U. m.	—0.040	27.2	—0.019	4.3
19.	I.	+0.047	32.4	+0.068	4.4
	α U. m.	+0.037	25.9	+0.058	4.3

April 19.	aus II.	$c = +0^s.034$	$G = 24.0$	$c' = +0^s.013$	$G' = 4.3$
	α U.m.	+0.088	16.3	+0.067	3.9
20.	I.	+0.050	30.5	+0.029	4.4
	α U.m.	+0.076	31.0	+0.055	4.4
21.	I.	+0.017	33.8	+0.038	4.5
	α U.m.	−0.006	29.7	+0.015	4.4
24.	I.	+0.034	13.0	+0.013	3.6

Das Zeichen von c gilt für Non. W. Zwischen den Werthen von c zeigt sich eine beträchtliche Differenz, je nachdem die Beobachtung bei Non. W. oder Non. O. begonnen ist; im Mittel findet sich mit Berücksichtigung der Gewichte G aus 13 Bestimmungen mit dem Anfang bei Non. W. U. C. oder Non. O. O. C. $c = +0^s.052$ (G. 258.9) und aus 11 Bestimmungen mit dem Anfang bei Non. O. U. C. oder Non. W. O. C. $c = +0^s.010$ (G. 271.2). Die jedenfalls reelle Differenz von $0^s.042$ findet ihre Erklärung in einer auch bei der Reduction der Registrirbeobachtungen merklich gewordenen — für diese Längenbestimmung aber völlig gleichgültigen — Ungenauigkeit der für die Fadendistanzen nach viel älteren Bestimmungen angewandten Werthe. Werden die c um $\mp 0^s.021$ geändert, so finden sich die Werthe c' für den Collimationsfehler, deren Abweichungen von ihrem Mittel $+0^s.031$ der

$$\text{mittlere Fehler eines } c = \sqrt{0^s.022^2 + \frac{0^s.050^2}{G}}$$

entspricht. Hieraus ergeben sich die Gewichte G' (= 1 für m. F. $\pm 0^s.05$) und damit die Mittel aus den beiden Gruppen der c' $+0^s.032$ ($G' = 51.4$) und $+0^s.030$ ($G' = 45.9$), oder der Collimationsfehler im Mittel $= +0^s.031$ mit dem m. F. $\pm 0^s.005$. Bei der Reduction der Beobachtungen ist statt dessen der anfangs gefundene Werth $+0^s.036$ angewandt.

Die Abweichungen der Uhrcorrectionen aus den registrirten Durchgängen von β Leonis und η Virginis von den Uhrcorrectionen aus den Auge- und Ohr-Beobachtungen fanden sich in Leipzig:

für B. April	4.	$-0^s.45$	für A. April 16.	$-0^s.69$
	8.	−0.41	17.	−0.70
	10.	−0.46	19.	−0.80
	11.	−0.41	20.	−0.78
	24.	−0.41	21.	−0.76

im Mittel für B. — 0ˢ43 und für A. — 0ˢ75. Hiermit werden die Uhrcorrectionen für die Beobachtungen nach dem Gehör (und zwar für Nachtbeobachtungen, von denen die Correctionen aus den Tagbeobachtungen von α und β Geminorum und α Canis min. beständig etwa — 0ˢ1 abweichen) und die täglichen Gänge:

April	Uhrzeit.	Corr.	Gang.	April.	Uhrzeit.	Corr.	Gang.
2.	10ʰ3	+ 53ˢ03	+ 0ˢ97	15.	10ʰ8	— 0ˢ81	+ 1ˢ48
4.	11.8	+ 55.02	+ 1.03	16.	10.8	+ 0.67	+ 1.12
8.	11.1	+ 59.12	+ 0.92	17.	11.8	+ 1.84	+ 1.02
9.	10.2	+ 60.01		19.	12 1	+ 3.90	+ 0.82
10.	10.5	— 16.09	+ 2.81	20.	11.8	+ 4.71	+ 0.87
11.	11.1	— 13.32	+ 2.26	21.	11.8	+ 5.58	+ 0.63
13.	12.4	— 8.68		24.	11.8	+ 7.48	

Nach den Beobachtungen des 9. und des 13. April blieb die Uhr stehen; das erste Mal hatte sich das Glimmerblättchen an den Elfenbeinspitzen gerieben und nachher die Gewichtschnur sich verwickelt. Der letztere Umstand wird auch wohl den starken Gang zwischen April 10 und 13 veranlasst haben. Vor den täglichen Schwankungen der Temperatur ist die Uhr durch ihre Aufstellung geschützt.

Für das Azimuth geben die Beobachtungen der Polarsterne, und zwar, wo Umlegungen vorgenommen sind, die einfachen Mittel aus beiden Lagen, mit Benutzung der aufgeführten Werthe der Uhrcorrectionen, der Neigung und des Collimationsfehlers:

April.	Stern.	Stzeit.	k.	April.	Stern.	Stzeit.	k.
2.	I.	10ʰ4	— 0ˢ461	17.	I.	10ʰ4	— 0ˢ661
4.	I.	10.4	— 0.559		α Urs. min.	13.2	— 0.545
	α Urs. min.	13.2	— 0.557		II.	15.4	— 0.595
	II.	15.4	— 0.392	18.	α Urs. min.	1.2	— 0.619
8.	I.	10.4	— 0.446	19.	I.	10.4	— 0.568
	α Urs. min.	13.2	— 0.417		α Urs. min.	13.2	— 0.504
9.	I.	10.4	— 0.597		II.	15.4	— 0.458
10.	α Urs. min.	13.2	— 0.340		α Urs. min.	1.2	— 0.607
11.	I.	10.4	— 0.346	20.	I.	10.4	— 0.488
	α Urs. min.	13.2	— 0.393		α Urs. min.	13.2	— 0.368
13.	α Urs. min.	13.2	— 0.576	21.	I.	10.4	— 0.482
15.	I.	10.4	— 0.673		α Urs. min.	13.2	— 0.358
	α Urs. min.	13.2	— 0.566	24.	I.	10.4	— 0.244
16.	I.	10.4	— 0.586		α Urs. min.	13.2	— 0.279
	α Urs. min.	1.2	— 0.698				

Neben einem nicht bedeutenden fortschreitenden Gang spricht sich in diesen Zahlen sehr deutlich eine tägliche Periode aus, indem der negative Werth von k fast an jedem einzelnen Abend abnimmt, im

Beobachtungen in Gotha.

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Längen-Differenz.
			April 7.			
Kr. West						
α Urs. min.	1ʰ 9ᵐ 31ˢ.48	24				
Nr. 1	9 47 4.06	11	— 0ˢ.18	3ˢ.88		
2	9 53 14.81	9	+ 0.25	15.06	— 8ˢ.29	
3	10 0 8.34	7	+ 0.17	8.51		
Pol. I	10 23 32.56	25				
			April 8.			
α Urs. min.	1 9 31.20	25				
Nr. 1	9 47 4.56	7	— 0.13	4.43		6ᵐ 42ˢ.76
2	9 53 15.45	7	+ 0.26	15.71	— 8.95	43.01
3	10 0 9.07	7	+ 0.18	9.25		43.09
4	10 4 33.33	7	+ 0.21	33.54		43.19
5	10 9 7.88	7	— 0.05	7.83		42.72
Pol. I	10 23 33.70	7				
Kr. Ost						
Pol. I	10 23 23.83	9				
Nr. 6	10 42 21.34	7	— 0.57	20.77	— 8.94	42.97
7	10 46 24.31	7	— 1.20	23.11		42.85
8	10 52 6.27	7	— 1.12	5.15		42.82
9	10 58 14.91	7	— 0.53	14.38	— 8.94	43.00

Gehörte Coincidenzen

mit L. 11ʰ 3ᵐ 43ˢ	mit G. 11ʰ 19ᵐ 23ˢ	Δu = 5ᵐ 34ˢ.853
11 6 41	11 21 36	34.934
11 9 43	11 23 55	34.941
11 12 39	11 26 11	34.934
	11 28 30	34.902

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Längen-Differenz.
Kr. West						
α Urs. min.	13ʰ 9ᵐ 15ˢ.10	24				
η Urs. maj.	13 42 24.83	7	— 0ˢ.28	24ˢ.55	— 8ˢ.95	
α Cassiop.	0 33 1.18	23	— 0.29	0.89	— 9.02	
			April 9.			
α Urs. min.	1 9 35.93	10				
Kr. Ost						
α Urs. min.	1 10 8.89	11				
Nr. 1	9 47 6.44	7	— 1.55	4.89		
2	9 53 16.74	7	— 0.56	16.18	— 9.44	
3	10 0 10.34	7	— 0.69	9.65		
4	10 4 34.57	8	— 0.64	33.93		
5	10 9 9.54	7	— 1.29	8.25		
Pol. I	10 23 23.92	7				
Kr. West						
Pol. I	10 23 32.84	9				
Nr. 6	10 42 21.00	7	+ 0.18	21.18	— 9.36	
7	10 46 23.84	7	— 0.19	23.65		
8	10 52 5.68	7	— 0.16	5.52		
9	10 58 14.70	7	+ 0.21	14.91	— 9.48	

weshalb die Beobachtungen nicht fortgesetzt wurden.

II. Beobach-

A. Beobachtungen nach den gehörten

Beobachtungen in Leipzig.

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Differenz der Uhrcorr.
	Beobachter: Bruhns.					
	April 4.					
Non. West						
α^2 Gemin.	7h 25m 6s22	9	— 0s30	5s92	+ 54s60	
α Can. min.	7 31 21.30	9	— 0.49	20.81	+ 54.76	
β Gemin.	7 36 10.28	9	— 0.34	9.94	+ 54.85	
Nr. 1	9 46 0.75	9	— 0.05	0.70		+ 1m 2s49
2	9 52 12.22	9	— 0.40	11.82	+ 54.98	+ 1 2.56
3	9 59 5.71	9	— 0.35	5.36		+ 1 2.44
4	10 3 29.92	9	— 0.37	29.55		+ 1 2.64
5*)	10 7 59.52	9	— 0.13	4.39		+ 1 2.19
Pol. I	10 22 37.75	13	— 4.73	33.02		
Non. Ost						
Pol. I	10 22 38.09	9	— 6.72	31.37		
Nr. 6	10 41 17.02	9	— 0.20	16.82	+ 55.04	+ 1 2.57
7	10 45 19.37	9	+ 0.20	19.57		+ 1 2.15
8	10 51 1.07	8	+ 0.15	1.22		+ 1 2.51
9	10 57 10.70	9	— 0.23	10.47	+ 54.99	+ 1 2.56

Gehörte Coincidenzen

mit L.	$\Delta u =$	mit G.
11h 11m 40s	5m 40s622	11h 23m 32s
11 14 40	40.633	11 25 46
11 17 35	40.604	11 28 1
11 20 35		11 30 11
		11 32 30

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Differenz der Uhrcorr.
Non. West						
α Urs. min.	13h 8m 35s02	13	—13s40	21s62		
Nr. 26	14 49 45.60	9	— 0.32	45.28		+ 1m 2s77
27	14 53 33.32	9	— 0.08	33.24		+ 1 2.79
28 pr.	14 58 26.54	9	+ 0.01	26.55		+ 1 3.15
28 seq.	14 58 27.39	6	+ 0.01	27.40		+ 1 2.78
29	15 1 50.00	8	— 0.19	49.81		+ 1 2.60
30	15 8 36.32	9	— 0.31	36.01		+ 1 2.74
Pol. II	15 21 42.39	13	— 5.11	37.28		
Non. Ost						
Pol. II	15 21 44.12	10	— 7.51	36.61		
Nr. 31	15 36 44.49	6	— 0.14	44.35	+ 55s12	+ 1 2.71
32	15 41 41.81	9	— 0.22	41.59		+ 1 2.99
33	15 47 7.02	9	+ 0.28	7.30		+ 1 2.70
34	15 50 4.61	9	+ 0.28	4.89		+ 1 2.42

*) Zur beobachteten Durchgangszeit sind 5s addirt.

tungen.

Pendelschlägen (Auge und Ohr).

Beobachtungen in Gotha.

Beobachter: Auwers.

April 4.

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Längen-Differenz.
Kr. Ost						
α Urs. min.	1^h 9^m $54^s.41$	10				
Nr. 1	9 47 4.09	7	— $0^s.90$	$3^s.19$		6^m $43^s.13$
2	9 53 14.60	7	— 0.22	14.38	— $7^s.59$	43.20
3	10 0 8.10	7	— 0.30	7.80		43.07
4	10 4 32.46	7	— 0.27	32.19		43.27
5	10 9 7.29	8	— 0.71	6.58		42.82
Pol. I	10 23 24.85	5				
Kr. West						
Pol. I	10 23 34.00	10				
Nr. 6	10 42 18.86	7	+ 0.53	19.39	— 7.55	43.17
7	10 46 21.33	7	+ 0.39	21.72		42.75
8	10 52 3.33	7	+ 0.40	3.73		43.11
9	10 58 12.50	7	+ 0.53	13.03	— 7.58	43.15

Gehörte Coincidenzen

mit L. 11^h 7^m 6^s mit G. 11^h 16^m 37^s $\Delta u = 5^m$ $40^s.544$

11 10 4 — 11 18 49 — 40.559

11 13 4 — 11 21 10 — 40.515

11 23 25 — 40.478

11 25 39 — 40.515

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Längen-Differenz.
Kr. Ost						
α Urs. min.	13^h 8^m $50^s.83$	20				
Nr. 26	14 50 48.25	7	— $0^s.20$	$48^s.05$		6^m $43^s.18$
27	14 54 36.68	7	— 0.65	36.03		43.20
28 pr.	14 59 30.54	5	— 0.84	29.70 }		43.37
28 seq.	14 59 31.01	3	— 0.83	30.18 }		
29	15 2 52.85	8	— 0.44	52.41		43.00
30	15 8 39.00	7	— 0.25	38.75		43.13
Pol. I	15 22 29.64	6				
Kr. West						
Pol. I	15 22 39.53	6				
Nr. 31	15 37 46.55	7	+ 0.51	47.06	— $7^s.61$	43.08
32	15 42 44.02	7	+ 0.56	44.58		43.36
33	15 48 9.62	7	+ 0.38	10.00		43.06
34	15 51 6.93	7	+ 0.38	7.31		42.78

Beobachtungen in Leipzig.

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Differenz der Uhrcorr.
			April 11. Forts.			
Non. Ost						
α Urs. min.	13^h 9^m 42ˢ89	10	—13ˢ42	29ˢ47		
			Beobachter: Auwers.			
			April 13.			
α Urs. min.	13 9 39.43	11	—15.31	24.12		
α Virginis	13 18 17.02	11	— 0.52	16.50	— 8ˢ60	
			April 14.			
	Trübe.					
			April 15.			
Nr. 5	10 8 59.95	15	— 0.16	59.79		
Pol. I	10 23 35.35	10	— 5.22	30.13		
Non. West						
Pol. I	10 23 33.00	11	— 3.26	29.74		
Nr. 6	10 42 13.26	7	— 0.64	12.62	— 0.86	
7	10 45 15.55	15	— 0.51	15.04		
8	10 51 57.34	9	— 0.53	56.81		
9	10 58 6.89	9	— 0.65	6.24	— 0.87	
α Urs. min.	13 9 23.87	12	— 7.56	16.31		
Non. Ost						
α Urs. min.	13 9 30.71	12	—14.31	16.40		
			April 16.			
Nr. 1	9 46 54.80	15	0.00	54.80		+ 15[illegible]
2	9 53 6.49	9	— 0.41	6.08	— 0.58	+ 15[illegible]
3	9 59 59.97	9	— 0.35	59.62		+ 15[illegible]
4	10 4 24.20	10	— 0.37	23.83		+ 1[illegible]
5	10 8 58.31	15	— 0.10	58.21		+ 1[illegible]
Pol. I	10 23 34.10	10	— 4.99	29.11		
Non. West						
Pol. I	10 23 31.29	12	— 3.10	28.19		+ [illegible]
Nr. 6	10 42 11.63	10	— 0.55	11.08	+ 0.65	+ [illegible]
7						
8	10 51 55.86	10	— 0.43	55.43		
9	10 58 5.31	10	— 0.56	4.75	+ 0.61	+ [illegible]
Non. Ost						
α Urs. min.	1 8 58.88	12				
Non. West						
α Urs. min.	1 9 6.20	9				

Beobachtungen in Gotha.

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Längen-Differenz.
	April 11. Forts.					
Kr. Ost						
α Urs. min.	13h 9m 22s.28	13				
η Urs. maj.	13 42 26.73	15	— 0s.12	26s.61	— 10s.99	
α Urs. min.	1 9 33.54	5				
	Beobachter: Bruhns.					
	April 13.					
α Urs. min.	13 10 6.89	9				
α Urs. min.	1 8 58.69	10				
	April 14.					
Nr. 1	9 47 10.12	12	— 1.42	8.70		
2	9 53 22.31	10	— 2.33	19.98	— 13.30	
3	10 0 15.96	11	— 2.19	13.77		
	April 15.					
	Trübe.					
α Urs. min.	1 8 30.25	19				
	April 16.					
α² Gemin.	7 26 15.52	9	— 0.58	14.94	— 14.67	
α Can. min.	7 32 31.29	9	— 1.45	29.84	— 14.49	
β Gemin.	7 37 19.82	9	— 0.73	19.09	— 14.54	
Nr. 1	9 47 9.70	9	+ 0.16	9.86		6m 43s.65
2	9 53 22.69	8	— 1.46	21.23	— 14.57	43.74
3	10 0 16.10	9	— 1.20	14.90		43.86
4	10 4 40.44	10	— 1.40	39.04		43.77
5	10 9 13.62	9	— 0.23	13.39		43.74
Pol. I	10 24 3.87	9				
Kr. West						
Nr. 6	10 42 27.75	7	— 1.25	26.50	— 14.75	43.93
7	10 46 28.77	10	— 0.04	28.73		
8	10 52 10.77	9	— 0.23	10.54		43.62
9	10 58 21.48	9	— 1.33	20.15	— 14.78	43.90
α Urs. min.	13 10 44.91	13				
η Urs. maj.	13 42 30.07	9	+ 0.15	30.22	— 14.58	
α Urs. min.	1 8 26.94	19				

Beobachtungen in Leipzig.

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Differenz der Uhrcorr.
	April 17.					
Nr. 1	9^h 46^m $54^s.03$	10	$-0^s.44$	$53^s.59$		$+16^s.90$
2	9 53 5.50	10	-0.65	4.85	$+1^s.82$	$+16.94$
3	9 59 59.01	10	-0.61	58.40		$+16.99$
4	10 4 23.31	10	-0.62	22.69		$+17.02$
5	10 8 57.51	10	-0.48	57.03		$+16.65$
Pol. I	10 23 30.86	11	-3.42	27.44		
Non. Ost						
Pol. I	10 23 33.41	10	-5.39	28.02		
Nr. 6	10 42 10.39	10	-0.45	9.94	$+1.81$	$+17.05$
7	10 46 12.39	10	-0.40	11.99		$+17.13$
8	10 51 54.40	10	-0.18	54.22		$+17.11$
9	10 58 4.02	10	-0.47	3.55	$+1.81$	$+17.13$
	Gehörte Coincidenzen mit L. $11^h 29^m 38^s$ $\Delta u = 6^m 26^s.638$ mit G. $11^h 35^m 30^s$ (zu spät?) Unsicher wegen mehrfacher Störungen in der Verbindung, deshalb später wiederholt.					
Non. West						
α Urs. min.	13^h 9^m $22^s.21$	21	$-8^s.62$	$13^s.59$		
	Gehörte Coincidenzen mit L. 13^h 47^m 45^s $\Delta u = 6^m$ $26^s.463$ mit G. 13^h 53^m 35^s; 13 50 49, 26.458, 13 55 50; 13 58 4					
Non. Ost						
Nr. 28 pr.	14^h 59^m $20^s.42$	6	$+0^s.01$	$20^s.43$		
28 seq.	14 59 20.87	6	$+0.01$	20.88		
29	15 2 43.22	9	-0.24	42.98		
30	15 8 29.84	10	-0.39	29.45		
Pol. II	15 22 35.27	10	-5.87	29.40		
Non. West						
Pol. II	15 22 32.31	11	-3.49	28.82		
Nr. 31	15 37 38.21	10	-0.54	37.67	$+2^s.03$	$+17^s.49$
32	15 42 35.82	10	-0.55	35.27		$+17.55$
33	15 48 1.15	10	-0.38	0.77		$+17.29$
34	15 50 58.55	10	-0.39	58.16		$+17.39$
	April 18.					
	Trübe.					
α Urs. min.	1 9 9.62	12				

Beobachtungen in Gotha.

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Längen-Differenz.
	April 17.					
α^2 Gemin.	7ʰ 26ᵐ 16ˢ04	7	— 0ˢ69	15ˢ35	— 15ˢ11	
α Can. min.	7 32 31.92	9	— 1.51	30.41	— 15.00	
β Gemin.	7 36 20.31	9	— 0.83	19.48	— 14.94	
Nr. 1	9 47 10.32	9	+ 0.17	10.49		6ᵐ43ˢ70
2	9 53 23.33	9	— 1.54	21.79	— 15.15	43.73
3	10 0 16.68	9	— 1.29	15.39		43.77
4	10 4 41.10	9	— 1.39	39.71		43.80
5	10 9 13.94	9	— 0.26	13.68		43.42
Pol. I	10 24 8.13	8				
Kr. Ost						
Pol. I	10 24 3.88	5				
Nr. 6	10 42 28.87	9	— 1.88	26.99	— 15.26	43.78
7	10 46 30.18	9	— 0.80	29.38		43.85
8	10 52 12.26	9	— 0.93	11.33		43.82
9	10 58 22.64	8	— 1.96	20.68	— 15.32	43.83
	Gehörte Coincidenzen					
	mit L. 11ʰ 21ᵐ 13ˢ mit G. 11ʰ 25ᵐ 30ˢ					
	11 24 15 — 11 27 43 Δu = 6ᵐ 26ˢ589					
	11 29 55					
Kr. West						
α Urs. min.	13ʰ 10ᵐ 44ˢ43	9				
	Gehörte Coincidenzen					
	mit L. 13ʰ 39ᵐ 56ˢ mit G. 13ʰ 48ᵐ 9ˢ Δu = 6ᵐ 26ˢ551					
	13 43 1 — 13 50 31 — 26.500					
	13 45 58 — 13 52 48 — 26.478					
Kr. Ost						
Pol. II	15ʰ 23ᵐ 8ˢ03	8				
Nr. 31	15 37 57.26	9	— 2ˢ10	55ˢ16	— 15ˢ45	6ᵐ43ˢ81
32	15 42 55.16	9	— 2.34	52.82		43.87
33	15 48 19.06	7	— 1.00	18.06		43.60
34	15 51 16.54	9	— 0.99	15.55		43.70
	April 18.					
α^2 Gemin.	7 26 17.49	9	— 1.08	16.41	— 16.18	
Nr. 1	9 47 12.04	9	— 0.53	11.51		
2	9 53 24.70	9	— 1.76	22.94	— 16.31	
5	10 9 15.77	10	— 0.82	14.95		
Pol. I	10 24 1.98	8				
Kr. West						
Pol. I	10 24 6.26	4				
Nr. 7	10 46 30.49	9	— 0.26	30.23		
8	10 52 12.53	11	— 0.39	12.14		
9	10 58 23.25	9	— 1.43	21.82	— 16.47	
α Urs. min.	1 8 31.98	13				

Beobachtungen in Leipzig.

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Differenz der Uhrcorr.
			April 18. Forts.			
Non. Ost						
α Urs. min.	$1^h\ 8^m\ 56^s.25$	13				
			April 19.			
α¹ Gemin.	7 25 56.46	7	$-0^s.28$	$56^s.18$	$+3^s.58$	
α² Gemin.	7 25 56.97	6	− 0.28	56.69		
α Can. min.	7 32 12.18	10	− 0.50	11.68	+ 3.63	
β Gemin.	7 37 1.16	10	− 0.33	0.83	+ 3.67	
Nr. 1	9 46 51.55	10	− 0.01	51.54		$+20^s.70$
2	9 53 3.24	10	− 0.41	2.83	+ 3.79	+ 20.78
3	9 59 56.73	10	− 0.35	56.38		+ 20.80
4	10 4 21.08	10	− 0.47	20.61		+ 20.75
5	10 8 55.00	10	− 0.10	54.90		+ 20.93
Pol. I	10 23 30.75	11	− 4.82	25.93		
Non. West						
Pol. I	10 23 29.07	12	− 2.85	26.22		
Nr. 6	10 42 8.37	10	− 0.54	7.83	+ 3.88	+ 21.38
7	10 46 10.55	10	− 0.43	10.12		+ 21.26
8	10 51 52.55	10	− 0.44	52.11		+ 21.23
9	10 58 1.98	10	− 0.56	1.42	+ 3.92	+ 21.28

Gehörte Coincidenzen

mit L.		Δu	mit G.
$11^h\ 10^m\ 26^s$	$\Delta u = 6^m\ 22^s.548$		$11^h\ 22^m\ 5^s$
11 13 24	22.531		11 24 20
11 16 23	22.537		11 26 34
11 19 21			11 28 48
			11 31 5

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Differenz der Uhrcorr.
Non. Ost						
α Urs. min.	$13^h\ 9^m\ 26^s.62$	8	$-13^s.66$	$12^s.96$		
Non. West						
α Urs. min.	13 9 19.93	12	− 6.92	13.01		
η Urs. maj.	13 42 11.94	10	− 0.35	11.59	$+4^s.06$	
Nr. 28 pr.	14 59 18.80	6	− 0.32	18.48		
28 seq.	14 59 19.25	6	− 0.32	18.93		
29	15 2 41.43	10	− 0.41	41.02		$+21^s.75$
30	15 8 27.88	10	− 0.46	27.42		+ 21.49
Pol. II	15 22 29.23	12	− 2.80	26.43		
Non. Ost						
Pol. II	15 22 31.69	12	− 5.18	26.51		
Nr. 31	15 37 36.05	10	− 0.30	35.75	+ 3.99	+ 21.42
32	15 42 33.63	10	− 0.36	33.27		+ 21.64
33	15 47 58.77	11	− 0.02	58.75		+ 21.39
34	15 50 56.25	9	− 0.02	56.23		+ 21.42
α Urs. min.	1 9 0.01	8				
Non. West						
α Urs. min.	1 9 2.93	7				
			April 20.			
α Can. min.	7 32 11.32	10	− 0.55	10.77	+ 4.51	
β Gemin.	7 37 0.34	10	− 0.49	59.85	+ 4.62	
Nr. 1	9 46 50.86	10	− 0.30	50.56		+ 22.95
2	9 53 2.42	10	− 0.45	1.97	+ 4.63	+ 22.88

Beobachtungen in Gotha.

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Längen-Differenz.
	April 18. Forts.					
Kr. Ost						
α Urs. min.	1^h 8^m $48^s.53$	10				
	April 19.					
Nr. 1	9 47 13.04	9	— $0^s.80$	$12^s.24$		6^m $43^s.38$
2	9 53 25.76	7	— 2.15	23.61	— $17^s.00$	43.45
3	10 0 19.12	9	— 1.94	17.18		43.46
4	10 4 43.50	7	— 2.02	41.48		43.41
5	10 9 16.95	10	— 1.12	15.83		43.58
Pol. I	10 24 4.52	8				
Kr. West						
Pol. I	10 24 8.39	3				
Nr. 6	10 42 30.95	7	— 1.74	29.21	— 17.49	43.99
7	10 46 31.95	9	— 0.56	31.39		43.86
8	10 52 14.04	9	— 0.70	13.34		43.83
9	10 58 24.52	9	— 1.82	22.70	— 17.36	43.87
	Gehörte Coincidenzen					
	mit L. 11^h 5^m 23^s mit G. 11^h 16^m 33^s $\Delta u = 6^m\ 22^s.625$					
	11 8 24 — 11 18 51 — 22.603					
	11 11 22 — 11 21 9 — 22.574					
	11 23 26 — 22.551					
	11 25 41 — 22.566					
Kr. Ost						
α Urs. min.	13^h 10^m $42^s.44$	19				
η Urs. maj.	13 42 33.29	7	— $0^s.42$	$32^s.87$	— $17^s.22$	
Kr. West						
Nr. 29	15 3 4.12	9	— 1.35	2.77		6^m $44^s.03$
30	15 8 51.02	9	— 2.11	48.91		43.76
Pol. II	15 23 14.31	5				
Kr. Ost						
Pol. II	15 23 13.23	10				
Nr. 31	15 38 0.13	8	— 2.96	57.17	— 17.43	43.65
32	15 42 58.14	9	— 3.23	54.91		43.87
33	15 48 21.85	9	— 1.71	20.14		43.61
34	15 51 19.36	9	— 1.71	17.65		43.63
α Urs. min.	1 8 42.62	13				
Kr. West						
α Urs. min.	1 8 27.72	10				
	April 20.					
α Can. min.	7 32 35.85	8	— 2.45	33.40	— 18.04	
β Gemin.	7 37 24.25	8	— 1.88	22.37	— 17.89	
Nr. 1	9 47 14.29	9	— 0.78	13.51		6 43.63
2	9 53 27.50	8	— 2.65	24.85	— 18.25	43.55

Beobachtungen in Leipzig.

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Differenz der Uhrcorr.
			April 20. Forts.			
Nr. 3	$9^h\ 59^m\ 55^s.90$	10	$-\ 0^s.44$	$55^s.46$		$+\ 22^s.91$
4	10 4 20.20	10	− 0.44	19.76		+ 22.95
5	10 8 54.32	10	− 0.34	53.98		+ 23.00
Pol. I	10 23 28.23	11	− 2.38	25.85		
Non. Ost						
Pol. I	10 23 29.82	13	− 4.35	25.47		
Nr. 6	10 42 7.29	10	− 0.26	7.03	$+\ 4^s.67$	+ 22.91
7	10 46 9.34	10	− 0.01	9.33		+ 22.99
8	10 51 51.35	10	− 0.04	51.31		+ 23.07
9	10 58 0.94	10	− 0.29	0.65	+ 4.68	+ 23.08

Gehörte Coincidenzen

mit L. $11^h\ 9^m\ 56^s$	$\Delta u = 6^m\ 20^s.537$	mit G. $11^h\ 19^m\ 42^s$
11 12 53	20.508	11 21 58
11 15 52	20.531	11 24 16
11 18 47	20.525	11 26 31
		11 28 47
		11 31 4

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Differenz der Uhrcorr.
Non. West						
α Urs. min.	$13^h\ 9^m\ 18^s.72$	11	$-\ 5^s.67$	$13^s.05$		
Non. Ost						
α Urs. min.	13 9 22.26	12	−12.45	9.81		
η Urs. maj.	13 42 10.59	10	+ 0.10	10.69	$+\ 4^s.96$	
			April 21.			
α Can. min.	7 32 10.21	10	− 0.38	9.83	+ 5.43	
β Gemin.	7 36 59.16	10	− 0.21	58.95	+ 5.51	
Nr. 1	9 46 49.64	10	+ 0.09	49.73		$+\ 25^s.08$
2	9 53 1.34	10	− 0.28	1.06	+ 5.53	+ 24.95
3	9 59 54.82	10	− 0.22	54.60		+ 24.97
4	10 4 19.10	10	− 0.25	18.85		+ 24.93
5	10 8 53.17	10	0.00	53.17		+ 25.43
Pol. I	10 23 29.64	12	− 4.41	25.23		
Non. West						
Pol. I	10 23 27.22	12	− 2.44	24.78		
Nr. 6	10 42 6.67	10	− 0.42	6.25	+ 5.44	+ 25.15
7	10 46 8.79	10	− 0.32	8.47		+ 25.13
8	10 51 50.70	10	− 0.33	50.37		+ 25.14
9	10 58 0.12	10	− 0.43	59.69	+ 5.63	+ 25.34

Gehörte Coincidenzen

mit L. $11^h\ 10^m\ 0^s$	$\Delta u = 6^m\ 18^s.401$	mit G. $11^h\ 24^m\ 35^s$
11 13 1	18.435	11 26 48
11 15 53	18.424	11 29 9
11 18 49	18.429	11 31 20
11 21 44	18.401	11 33 35

Beobachtungen in Gotha.

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Längen-Differenz.
	April 20 Forts.					
Nr. 3	$10^h\ 0^m\ 20^s.69$	9	$-2^s.38$	$18^s.31$		$6^m\ 43^s.57$
4	10 4 45.20	9	− 2.49	42.71		43.60
5	10 9 18.23	9	− 1.25	16.98		43.65
Pol. I	10 24 15.07	5				
Kr. Ost						
Pol. I	10 24 9.43	8				
Nr. 6	10 42 32.91	9	− 2.97	29.94	$-18^s.24$	43.51
7	10 46 34.11	9	− 1.79	32.32		43.58
8	10 52 16.31	9	− 1.93	14.38		43.66
9	10 58 26.79	9	− 3.06	23.73	− 18.41	43.66
	Gehörte Coincidenzen					
	mit L. $11^h\ 2^m\ 0^s$ mit G. $11^h\ 14^m\ 20^s$ $\Delta u = 6^m\ 20^s.566$					
	11 5 2 — 11 16 36 — 20.566					
	11 7 57 — 11 18 53 — 20.574					
	11 10 53 — 11 21 12 — 20.544					
	11 23 22 — 20.588					
	11 25 41 — 20.574					
Kr. West						
α Urs. min.	$13^h\ 10^m\ 55^s.16$	15				
η Urs. maj.	13 42 34.86	9	$-0^s.82$	$34^s.04$	$-18^s.39$	
α Urs. min.	1 8 31.98	12				
Kr. Ost						
α Urs. min.	1 8 48.66	9				
	April 21.					
α^2 Gemin.	7 26 21.89	9	− 2.28	19.61	− 19.44	
α Can. min.	7 32 57.52	9	− 3.10	54.42	− 19.08	
β Gemin.	7 37 26.17	9	− 2.42	23.75	− 19.29	
Nr. 1	9 47 16.44	9	− 1.63	14.81		$6^m\ 43^s.65$
2	9 53 29.15	9	− 3.14	26.01	− 19.42	43.51
3	10 0 22.47	6	− 2.90	19.57		43.52
4	10 4 46.78	9	− 3.00	43.78		43.48
5	10 9 20.24	9	− 1.64	18.60		43.99
Pol. I	10 24 10.03	5				
Kr. West						
Pol. I	10 24 13.92	7				
Nr. 6	10 42 34.14	9	− 2.74	31.40	− 19.71	43.65
7	10 46 35.09	9	− 1.49	33.60		43.62
8	10 53 17.15	9	− 1.64	15.51		43.62
9	10 58 27.86	9	− 2.83	25.03	− 19.71	43.81
	Gehörte Coincidenzen					
	mit L. $11^h\ 2^m\ 30^s$ mit G. $11^h\ 17^m\ 10^s$ $\Delta u =$ $6^m\ 18^s.515$					
	11 5 25 — 11 19 22 — 18.459					
	11 8 19 — 11 21 44 — 18.493					
	11 11 14 — 11 23 59 — 18.434					
	11 14 14 — 11 26 18 — 18.441					
	11 28 32					

Beobachtungen in Leipzig.

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Differenz der Uhrcorr.
	April 21. Forts.					
Non. Ost						
α Urs. min.	13h 9m 25s00	11	−12s67	12s33		
Non. West						
α Urs. min.	13 9 14.78	11	− 5.89	6.89		
η Urs. maj.	13 42 10.18	10	− 0.27	9.91	+ 5s74	
	April 22.					
α Can. min.	7 32 9.31	1	− 0.44	8.87	+ 6.39	
β Gemin.	7 35 58.56	25	− 0.39	58.17	+ 6.27	

Beobachter: Bruhns.

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Differenz der Uhrcorr.
	April 24.					
α² Gemin.	7 25 53.32	9	− 0.38	52.94	+ 7.18	
α Can. min.	7 32 8.32	9	− 0.42	7.90	+ 7.33	
β Gemin.	7 36 57.46	9	− 0.39	57.07	+ 7.34	
Nr. 1	9 46 48.14	10	− 0.29	47.85		+ 22s31
2	9 52 59.57	9	− 0.34	59.23	+ 7.31	+ 22.40
3	9 59 52.78	9	− 0.33	52.45		+ 22.75
4	10 4 17.43	9	− 0.33	17.10		+ 22.33
5	10 8 51.59	9	− 0.30	51.29		+ 22.33
Pol. I	10 23 24.18	13	− 1.03	23.15		
Non. Ost						
Pol. I	10 23 26.18	9	− 3.01	23.17		
Nr. 6	10 42 4.33	9	− 0.15	4.18	+ 7.48	+ 22.60
7	10 46 6.48	9	+ 0.03	6.51		+ 22.59
8	10 51 48.51	9	+ 0.01	48.52		+ 22.51
9	10 57 57.77	6	− 0.16	57.61	+ 7.68	+ 22.87

Gehörte Coincidenzen

mit L.	11h 11m 31s	Δu = 6m 20s469	mit G. 11h 21m 42s
	11 14 30	20.475	11 23 55
	11 17 25	20.463	11 26 18
	11 20 26	20.492	11 28 38

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Differenz der Uhrcorr.
Non. West						
α Urs. min.	13h 9m 13s32	19	− 1s56	11s76		
η Urs. maj.	13 42 8.49	9	− 0.25	8.24	+ 7s41	

Beobachtungen in Gotha.

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Längen-Differenz.
	April 21. Forts.					
Kr. Ost						
α Urs. min.	13ʰ 10ᵐ 38ˢ.79	14				
η Urs. maj.	13 42 37.17	15	— 2ˢ.00	35ˢ.17	— 19ˢ.51	
	Beobachter: Auwers.					
	April 23.					
α Cassiop.	0 33 4.26	9	+ 2.85	7.11	— 14.94	
α Urs. min.	1 7 20.35	8				
Kr. West						
α Urs. min.	1 7 6.64	10				
	April 24.					
Nr. 1	9 47 7.59	10	+ 2.57	10.16		6ᵐ 42ˢ.86
2	9 53 22.86	10	— 1.23	21.63	— 15.08	42.95
3	10 0 15.86	10	— 0.66	15.20		43.29
4	10 4 40.31	10	— 0.88	39.43		42.77
5	10 9 11.99	10	+ 1.63	13.62		42.86
Pol. I	10 24 34.11	5				
Kr. Ost						
Pol. I	10 24 28.89	10				
Nr. 6	10 42 28.22	10	— 1.44	26.78	— 15.12	43.11
7	10 46 28.00	10	+ 1.10	29.10		43.09
8	10 52 10.21	10	+ 0.82	11.03		43.01
9	10 58 22.11	10	— 1.63	20.48	— 15.19	43.36

Gehörte Coincidenzen

mit L.	mit G.	
11ʰ 3ᵐ 47ˢ	11ʰ 16ᵐ 32ˢ	Δu = 6ᵐ 20ˢ.478
11 6 45	11 18 53	20.441
11 9 42	11 21 4	20.508
11 12 38	11 23 29	20.471
	11 25 42	

Stern.	Durchg.-Zeit durch den Mittelfaden.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Mer.	Uhrcorr.	Längen-Differenz.
Kr. West						
α Urs. min.	13ʰ 12ᵐ 0ˢ.90	23				
α Virginis	13 18 25.60	10	— 2ˢ.40	23ˢ.20	— 15ˢ.31	
α Cassiop.	0 33 4.18	5	+ 3.53	7.71	— 15.51	
α Urs. min.	1 7 6.19	9				
Kr. Ost						
α Urs. min.	1 7 23.67	13				

B. Regist

Ablesungen vom Leipziger Papierstreifen.

Beobachter: Bruhns in Leipzig, Auwers in Gotha.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	Correct des Instr.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Meridian. Leipzig.	Gotha.	Läng Diffe
				April 4.					
L. Non. Ost									
Nr. 10	11ʰ 38ᵐ 3ˢ.22	25	−0ˢ.21	11ʰ 44ᵐ 45ˢ.91	17	+0ˢ.54	3ˢ.01	46ˢ.45	6ᵐ
11	11 41 18.38	21	−0.13	11 48 0.96	17	+0.50	18.25	1.46	
12	11 54 22.81	25	+0.23	12 1 5.76	3	+0.39	23.04	6.15	
13	11 57 27.99	25	−0.18	12 4 10.66	16	+0.53	27.81	11.19	
L. Non. West									
Nr. 14	12 8 29.33	25	−0.12	12 15 13.14	24	−0.67	29.21	12.47	
15	12 12 8.24	25	−0.38	12 18 51.54	25	−0.17	7.86	51.37	
16	12 22 50.34	25	−0.33	12 29 33.76	22	−0.26	50.01	33.50	
17	12 26 27.44	25	−0.11	12 33 11.46	25	−0.69	27.33	10.77	
18	12 37 55.91	25	−0.34	12 44 39.36	25	−0.24	55.57	39.12	
19	12 41 36.44	25	−0.04	12 48 20.78	24	−0.86	36.40	19.92	
Uhrcorrection: Nr. 11 + 54ˢ.50; Nr. 15 + 54ˢ.67.									
				April 8.					
Nr. 10	11 37 59.22	25	−0.39	11 44 42.70	25	−0.54	58.83	42.16	6
11	11 41 14.28	25	−0.37	11 47 57.96	23	−0.65	13.91	57.31	
12	11 54 19.22	25	−0.26	12 1 3.39	23	−1.23	18.96	2.16	
13	11 57 24.05	25	−0.38	12 4 7.52	21	−0.57	23.67	6.95	
L. Non. Ost									
Nr. 14	12 8 25.04	20	+0.05	12 15 8.35	21	−0.12	25.09	8.23	
15	12 12 4.14	25	−0.26	12 18 46.83	25	+0.28	3.88	47.11	
16	12 22 46.30	15	−0.19	12 29 29.09	25	+0.18	46.11	29.27	
17	12 26 23.28	25	+0.06	12 33 6.70	24	−0.13	23.34	6.57	
18	12 37 51.71	25	−0.21	12 44 34.68	25	+0.20	51.50	34.88	
19	12 41 32.35	25	+0.15	12 48 15.79	23	−0.21	32.50	15.58	
Uhrcorrection: Nr. 11 + 58ˢ.82; Nr. 15 + 58ˢ.65.									
				April 10.					
L. Non. Ost									
Nr. 10	11 29 14.26	25	−0.23	11 45 57.83	25	−0.58	14.03	57.25	6
11	11 42 29.35	25	−0.18	11 49 12.99	25	−0.71	29.17	12.28	
12	11 55 33.80	7	+0.02	12 2 18.46	25	−1.36	33.82	17.10	
13	11 58 38.95	24	−0.21	12 5 22.52	20	−0.61	38.74	21.91	
L. Non. West									
Nr. 14	12 9 40.54	13	−0.31	12 16 23.89	16	−0.63	40.23	23.26	
15	12 13 19.37	8	−0.38	12 20 1.95	25	+0.08	18.99	2.03	
16				12 30 44.30	24	−0.10		44.20	
17	12 27 38.67	23	−0.31	12 34 22.11	21	−0.65	38.36	21.46	
18	12 39 6.90	3	−0.37	12 45 49.83	24	−0.06	6.53	49.77	
19	12 42 47.71	13	−0.29	12 49 31.32	24	−0.82	47.42	30.50	
Uhrcorrection: Nr. 11 − 16ˢ.44; Nr. 15 − 16ˢ.46.									
				April 11.					
Nr. 10	11 39 11.57	25	−0.31	11 45 54.01	25	+0.68	11.26	54.69	6
11	11 42 26.60	25	−0.29	11 49 9.01	25	+0.73	26.31	9.74	
12	11 55 31.52	25	−0.19	12 2 3.53	20	+1.01	31.33	4.54	
13	11 58 36.38	25	−0.31	12 5 18.65	25	+0.69	36.02	19.34	

eobachtungen.

Ablesungen vom Gothaer Papierstreifen.

Beobachter: Auwers in Gotha, Bruhns in Leipzig.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Im Meridian. Leipzig.	Im Meridian. Gotha.	Längen-Differenz.	L. Str. − G. Str.
			April 4.					
Kr. West								
r. 10	11ʰ 32ᵐ 22ˢ38	25	11ʰ 39ᵐ 5ˢ05	17	22ˢ17	5ˢ59	6ᵐ 43ˢ42	0ˢ015
11	11 35 37.53	21	11 42 20.10	17	37.40	20.60	43.20	0.006
12	11 48 41.97	25	11 55 24.91	3	42.20	25.30	43.10	0.015
13	11 51 47.16	25	11 58 29.81	16	46.98	30.34	43.36	0.025
Kr. Ost								
r. 14	12 2 48.51	25	12 9 32.32	24	48.39	31.65	43.26	0.005
15	12 6 27.44	25	12 13 10.68	25	27.06	10.51	43.45	0.061
16	12 17 9.56	25	12 23 52.94	22	9.23	52.68	43.45	0.033
17	12 20 46.64	25	12 27 30.67	25	46.53	29.98	43.45	− 0.007
18	12 32 15.13	25	12 38 58.53	25	14.79	58.29	43.50	0.054
19	12 35 55.66	25	12 42 39.97	24	55.62	39.11	43.49	0.032
	Uhrcorrection: Nr. 11. — 7ˢ87; Nr. 15 — 8ˢ00							
			April 8.					
r. 10	11 32 24.06	25	11 39 7.48	25	23.67	6.94	6 43.27	0.061
11	11 35 39.14	25	11 42 22.75	23	38.77	22.10	43.33	0.064
12	11 48 44.08	25	11 59 28.20	23	43.82	26.97	43.15	0.052
13	11 51 48.91	25	11 58 32.35	24	48.53	31.78	43.25	0.031
Kr. West								
r. 14	12 2 49.91	20	12 9 33.18	21	49.96	33.06	43.10	0.031
15	12 6 29.01	25	12 13 11.65	25	28.75	11.93	43.18	0.048
16	12 17 11.19	15	12 23 53.94	25	11.00	54.12	43.12	0.043
17	12 20 48.18	25	12 27 31.54	24	48.24	31.41	43.17	0.068
18	12 32 16.66	24	12 38 59.57	25	16.45	59.77	43.32	0.061
19	12 35 57.26	25	12 42 40.66	23	57.41	40.45	43.04	0.040
	Uhrcorrection: Nr. 11 — 9ˢ38; Nr. 15 — 9ˢ40							
			April 10.					
r. Ost								
. 10	11 32 25.16	25	11 39 8.63	25	24.93	8.05	6 43.12	0.097
11	11 35 40.22	25	11 42 23.84	25	40.04	23.13	43.09	0.020
12	11 48 44.75	7	11 55 29.33	25	44.77	27.97	43.20	0.086
13	11 51 49.86	24	11 58 33.40	19	49.65	32.79	43.14	0.033
r. West								
. 14	12 2 51.49	12	12 9 34.79	17	51.18	34.16	42.98	0.042
15	12 6 30.30	8	12 13 12.90	25	29.92	12.98	43.06	− 0.021
16			12 23 55.23	24		55.13		
17	12 20 49.66	23	12 27 33.07	24	49.35	32.42	43.07	0.034
18	12 32 17.86	3	12 39 0.80	24	17.49	0.74	43.25	− 0.005
19	12 35 58.73	13	12 42 42.29	24	58.44	41.47	43.03	0.054
	Uhrcorrection: Nr. 11 — 10ˢ42; Nr. 15 — 10ˢ45.							
			April 11.					
. 10	11 32 25.84	25	11 39 8.20	25	25.53	8.88	6 43.35	0.087
11	11 35 40.89	25	11 42 23.24	25	40.60	23.97	43.37	0.051
12	11 48 45.83	25	11 55 27.78	21	45.64	28.79	43.15	0.048
13	11 51 50.66	25	11 58 32.91	25	50.35	33.60	43.25	0.062

Ablesungen vom Leipziger Papierstreifen.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	Correct. des Instr.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Meridian. Leipzig.	Gotha.	Lan Diffe
				April 11. Forts.					
L. Non. Ost									
Nr. 14	12^h 8^m 37^s.21	25	+0^s.12				37^s.33		
15	12 13 16.34	25	−0.19	12^h 19^m 59^s.87	15	−0^s.12	16.15	59^s.75	6^m 43
16	12 23 58.55	25	−0.13	12 30 41.92	25	−0.09	58.42	41.83	43
17	12 27 35.69	25	+0.13	12 34 18.99	25	−0.09	35.82	18.90	43
18	12 39 4.14	25	−0.14	12 45 47.51	25	−0.10	4.00	47.41	43
19	12 42 44.91	24	+0.21	12 49 28.07	24	−0.12	45.12	27.95	42

Uhrcorrection: Nr. 11 − 13^s.58; Nr. 15 − 13^s.62.
Registrirte Coincidenzen
mit L. 13^h 3^m 34^s $\Delta u' =$ 6^m 45^s.638 mit G. 13^h 12^m 14^s
13 6 25 45.616 13 14 29
13 16 43

Beobachter: Auwers in Leipzig, Bruhns in Gotha.

April 13.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	Correct. des Instr.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Meridian. Leipzig.	Gotha.	Lan Diffe
L. Non. West	(Bis 11^h trübe.)								
Nr. 10				11^h 45^m 50^s.25	25	+0^s.30		50^s.55	
11	11^h 42^m 22^s.72	15	−0^s.56	11 49 5.30	25	+0.34	22^s.16	5.64	6^m 43
12	11 55 27.30	25	−0.43	12 2 10.05	23	+0.57	26.87	10.62	43
13	11 58 32.34	20	−0.58	12 5 15.01	20	+0.31	31.76	15.32	43
L. Non. Ost									
Nr. 14	12 9 33.12	22	−0.12				33.00		
15	12 13 12.37	24	−0.47				11.90		
16	12 23 54.54	18	−0.40	12 30 39.95	16	−2.51	54.14	37.44	43
17	12 27 31.38	24	−0.12	12 34 16.48	25	−1.81	31.26	14.67	43
18	12 39 0.09	25	−0.41	12 45 45.52	25	−2.54	59.68	42.98	43
19	12 42 40.48	23	−0.01	12 49 25.45	25	−1.57	40.47	23.88	43

Uhrcorrection: Nr. 11 − 9^s.45; Nr. 15 − 9^s.37.
Registrirte Coincidenzen
mit L. 11^h 3^m 16^s $\Delta u' =$ 6^m 40^s.079 mit G. 11^h 12^m 5^s
11 6 16 40.085 11 14 22
11 9 15 40.090 11 16 35
11 18 51
11 21 5
11 23 22

April 16.

Registrirte Coincidenzen
mit L. 11^h 13^m 27^s $\Delta u' =$ 6^m 28^s.769 mit G. 11^h 23^m 44^s
11 16 24 28.740 11 26 2
11 19 24 28.702 11 28 15
11 30 30

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	Correct. des Instr.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Meridian. Leipzig.	Gotha.	Lan Diffe
L. Non. West									
Nr. 10	11^h 38^m 58^s.13	25	−0^s.52			−1^s.40	57^s.61		
11	11 42 13.20	25	−0.50			−1.47	12.70		
12	11 55 17.86	20	−0.39				17.47		
13	11 59 22.87	25	−0.52				22.35		

Uhrcorrection: Nr. 11 − 0^s.01.
Unmittelbar nach dem Durchgang von Nr. 11 wurde die Verbind. unterbroc

Ablesungen vom Gothaer Papierstreifen.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Im Meridian. Leipzig.	Im Meridian. Gotha.	Längen-Differenz.	L. Str. − G. Str.
			April 11. Forts.					
Kr. Ost								
Nr. 14	$12^h\ 2^m\ 51^s.52$	25			$51^s.64$			
15	12 6 30.70	25	$12^h\ 13^m\ 14^s.10$	15	30.51	$13^s.98$	$6^m\ 43^s.47$	$0^s.128$
16	12 17 12.92	25	12 23 56.27	24	12.79	56.18	43.39	0.023
17	12 20 50.06	25	12 27 33.33	25	50.19	33.24	43.05	0.030
18	12 32 18.51	25	12 39 1.88	25	18.37	1.78	43.41	0.001
19	12 35 59.30	24	12 42 42.43	24	59.51	42.31	42.80	0.033

Uhrcorrection: Nr. 11 $-11^s.26$; Nr. 15 $-11^s.45$.
Registrirte Coincidenzen

mit L. $12^h\ 57^m\ 52^s$	mit G. $13^h\ 4^m\ 4^s$	$\Delta u' = 6^m\ 45^s.617$
13 0 47	13 6 21	45.603
	13 8 39	45.574

Beobachter: Bruhns in Gotha, Auwers in Leipzig.

April 13.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Im Meridian. Leipzig.	Im Meridian. Gotha.	Längen-Differenz.	L. Str. − G. Str.
Kr. West								
Nr. 10			$11^h\ 39^m\ 10^s.15$	25		$10^s.45$		
11	$11^h\ 35^m\ 42^s.68$	15	11 42 25.19	25	$42^s.12$	25.53	$6^m\ 43^s.41$	$0^s.065$
12	11 48 47.25	25	11 55 29.95:	23	46.82	30.52	43.70	0.050
13	11 51 52.31	20	11 58 34.91	20	51.73	35.22	43.49	0.062
Kr. Ost								
Nr. 14								
15	12 6 32.35	24			31.88			
16	12 17 14.53	19	12 24 59.92	16	14.13	57.41	43.28	0.027
17	12 20 51.41	23	12 27 36.43	25	51.29	34.62	43.33	0.080
18	12 32 20.11	25	12 39 5.51	25	19.70	2.97	43.27	0.032
19	12 36 0.50	23	12 42 45.46	25	0.49	43.89	43.40	0.011

Uhrcorrection: Nr. 11 $-12^s.82$.
Registrirte Coincidenzen

mit L. $10^h\ 56^m\ 22^s$	mit G. $11^h\ 5^m\ 3^s$	$\Delta u' = 6^m\ 40^s.162$
10 59 21	11 7 21	40.154
11 2 19	11 9 37	40.132
	11 11 53	40.132
	11 14 11	40.103
	11 16 27	40.110

April 16.

Registrirte Coincidenzen

mit L. $11^h\ 7^m\ 49^s$	mit G. $11^h\ 17^m\ 45^s$	$\Delta u' = 6^m\ 28^s.780$
11 10 51	11 20 0	28.802
11 13 48	11 22 17	28.773
	11 24 36	28.743

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Im Meridian. Leipzig.	Im Meridian. Gotha.	Längen-Differenz.	L. Str. − G. Str.
Kr. West								
Nr. 10	$11^h\ 32^m\ 29^s.42$	23	$11^h\ 39^m\ 13^s.88$	25	$28^s.90$	$12^s.48$	$6^m\ 43^s.58$	
11	11 35 44.54	23	11 42 28.78	25	44.04	27.61	43.57	

Uhrcorrection: Nr. 11 $-14^s.93$.

halb diesen Abend gar keine Gothaer Beobachtungssignale nach Leipzig kamen.

Ablesungen vom Leipziger Papierstreifen.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	Correct. des Instr.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Meridian. Leipzig.	Gotha.	Läng. Differ.
				April 17.					
L. Non. Ost									
Nr. 11	$11^h 42^m 11^s.90$	25	$-0^s.39$	$11^h 48^m 56^s.72$	25	$-1^s.78$	$11^s.51$	$54^s.94$	6^m 4
12	11 55 16.37	12	−0.12	12 2 0.68	17	−0.92	16.25	59.76	4
13	11 58 21.59	24	−0.43	12 5 6.68	5	−1.93	21.16	4.75	4
L. Non. West									
Nr. 14	12 9 23.00	23	−0.45	12 16 6.48	19	−0.38	22.55	6.10	4
15	12 13 1.96	25	−0.61	12 19 46.86	25	−1.75	1.35	45.11	4
16	12 23 44.14	24	−0.58	12 30 28.73	25	−1.49	43.56	27.24	4
17	12 27 21.27	25	−0.45	12 34 4.71	21	−0.27	20.82	4.44	4
18	12 38 49.77	23	−0.58	12 45 34.40	25	−1.56	49.19	32.84	4
19	12 42 30.36	23	−0.40	12 49 13.42	25	+0.17	29.96	13.59	4
20	14 2 33.46	25	−0.41	14 9 16.85	25	−0.26	33.05	16.59	4
21	14 5 44.06	10	−0.59	14 12 29.16	22	−2.14	43.47	27.02	4
22	14 21 16.94	24	−0.57	14 28 1.93	25	−1.91	16.37	0.02	4
23	14 24 19.08	23	−0.42	14 31 2.62	16	−0.38	18.66	2.24	4
L. Non. Ost									
Nr. 24	14 37 13.10	25	−0.18	14 44 57.78	20	−1.17	12.92	56.61	4
25	14 39 27.19	18	−0.44	14 46 12.61	24	−2.18	26.85	10.43	4
26	14 50 39.91	25	−0.43	14 57 25.11	25	−2.23	39.48	22.88	4
27	14 54 27.56	25	−0.11	15 1 12.09	25	−1.07	27.45	11.02	4

Uhrcorrection: Nr. 11 + $1^s.18$; Nr. 15 + $1^s.17$.

Registrirte Coincidenzen

mit L. 15^h 5^m 48^s $\Delta u' = 6^m\ 26^s.638$ mit G. 15^h 15^m 55^s
15 8 41 26.627 15 18 10
15 11 38 26.640 15 20 25
15 14 32 15 22 41

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	Correct. des Instr.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Meridian. Leipzig.	Gotha.	Läng. Differ.
				April 19.					
L. Non. West									
Nr. 10	$11^h 38^m 54^s.96$	25	$-0^s.52$	$11^h 45^m 39^s.94$	25	$-1^s.87$	$54^s.44$	$38^s.07$	6^m 4
11	11 42 10.03	25	−0.50	11 48 54.72	25	−1.65	9.53	53.07	4
12	11 55 14.62	25	−0.40	12 1 58.33	25	−0.57	14.22	57.76	4
13	11 58 19.71	25	−0.52	12 5 4.55	25	−1.81	19.19	2.74	4
L. Non. Ost									
Nr. 14	12 9 20.55	25	−0.09				20.46		
15	12 12 59.81	25	−0.40	12 19 45.08	25	−2.26	59.41	42.82	4
16	12 23 41.94	24	−0.34	12 30 27.30	20	−1.97	41.60	25.33	4
17	12 27 18.94	24	−0.09	12 34 3.14	25	−0.85	18.85	2.29	4
18	12 38 47.56	25	−0.35	12 45 32.82	25	−2.03	47.21	30.79	4
19	12 42 27.95	14	−0.00				27.95		

Uhrcorrection: Nr. 11 + $3^s.15$; Nr. 15 + $3^s.10$.

Registrirte Coincidenzen

mit L. 12^h 57^m 8^s mit G. 13^h 9^m 18^s
13 0 1 13 11 35
13 2 56 13 13 51
13 5 53 13 16 7
13 18 23
13 20 39
13 22 55

Ablesungen vom Gothaer Papierstreifen.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Im Meridian. Leipzig.	Gotha.	Längen-Differenz.	L. Str. — G. Str.
				April 17.				

Kr. Ost

Nr. 10 gieng auf beiden Stationen wegen einer vorübergehenden Unterbrechung der Leitung verloren. Die zu den Beobachtungen der Sterne Nr. 11—16 gehörigen Momente sind auf dem Gothaer Streifen nicht verzeichnet, weil beim Aufstecken einer neuen Rolle der Signalstift zurückgeschlagen war, welcher Umstand erst nach dem Durchgang von Nr. 16 bemerkt wurde. Es wurden deshalb weitere Registrirsterne eingeschaltet.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Im Meridian. Leipzig.	Gotha.	Längen-Differenz.	L. Str. — G. Str.
Kr. West								
Nr. 17	$12^{h}20^{m}54^{s}.41$	25	$12^{h}27^{m}37^{s}.81$	25	$53^{s}.96$	$37^{s}.54$	$6^{m}43^{s}.58$	$0^{s}.038$
18	12 32 22.93	23	12 39 7.51	25	22.35	5.95	43.60	0.061
19	12 36 3.50	23	12 42 46.52	25	3.10	46.69	43.59	0.043
20	13 56 6.73	25	14 2 50.07	25	6.32	49.81	43.49	0.058
21	13 59 17.33	9	14 6 2.41	23	16.74	0.27	43.53	0.023
22	14 14 50.23	25	14 21 35.12	25	49.66	33.21	43.55	0.095
23	14 17 52.34	23	14 24 35.90	17	51.92	35.52	43.60	— 0.020
Kr. Ost								
Nr. 24	14 30 46.42	25	14 37 31.07	20	46.24	29.90	43.66	0.035
25	14 34 0.58	19	14 39 45.87	25	0.14	43.69	43.55	0.028
26	14 44 13.23	2	14 50 58.43	25	12.80	56.20	43.40	— 0.004
27	14 48 0.90	25	14 54 45.46	25	0.79	44.39	43.60	— 0.028

Registrirte Coincidenzen

mit L. $15^{h}\ 0^{m}\ 25^{s}$	mit G. $15^{h}\ 10^{m}\ 16^{s}$	$\Delta u' = 6^{m}\ 26^{s}.647$
15 3 20	15 12 31	26.647
15 6 20	15 14 49	26.625
	15 17 3	26.640

April 19.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Im Meridian. Leipzig.	Gotha.	Längen-Differenz.	L. Str. — G. Str.
Kr. West								
Nr. 10	$11^{h}32^{m}32^{s}.17$	25	$11^{h}39^{m}17^{s}.10$	25	$31^{s}.65$	$15^{s}.23$	$6^{m}43^{s}.58$	$0^{s}.050$
11	11 35 47.25	25	11 42 31.87	25	46.75	30.22	43.47	0.070
12	11 48 51.84	25	11 55 35.52	25	51.44	34.95	43.51	0.034
13	11 51 56.96	25	11 58 41.69	25	56.44	39.88	43.44	0.110
Kr. Ost								
Nr. 14	12 2 57.77	25			57.68			
15	12 6 37.02	25	12 13 22.31	25	36.62	20.05	43.43	— 0.010
16	12 17 19.20	24	12 24 4.49	20	18.86	2.52	43.66	0.070
17	12 20 56.18	24	12 27 40.38	25	56.09	39.53	43.44	0.010
18	12 32 21.85	25	12 39 10.05	25	24.50	8.02	43.52	0.056
19								

Uhrcorrection: Nr. 11 $-17^{s}.63$; Nr. 15 $-17^{s}.53$

Registrirte Coincidenzen

mit L. nicht verzeichnet, weil die Schlüsse zu kurz waren.	mit G. $13^{h}\ 3^{m}\ 37^{s}$	$\Delta u' = 6^{m}\ 22^{s}.691$
	13 5 51	22.713
	13 8 8	22.706
	13 10 24	22.706
	13 12 43	22.684
	13 15 0	22.676
	13 17 17	22.669

Ablesungen vom Leipziger Papierstreifen.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	Correct. des Instr.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Meridian. Leipzig.	Im Meridian. Gotha.	Läng. Differ.
				April 19. Forts.					
Nr. 20	14^h 2^m $31^s.08$	24	$-0^s.02$	14^h 9^m $15^s.26$	25	$-0^s.74$	$31^s.06$	$14^s.52$	6^m 4
21	14 5 41.92	25	−0.42	14 12 27.61	25	−2.64	41.50	24.97	4
22	14 21 14.82	24	−0.37	14 28 0.41	25	−2.40	14.45	58.01	4
23	14 24 16.81	21	−0.04	14 31 1.21	25	−0.85	16.77	0.36	4
L. Non. West									
Nr. 24	14 37 11.38	22	−0.38	14 43 55.74	17	−1.06	11.00	54.68	4
25	14 39 25.37	20	−0.47	14 46 10.52	20	−2.18	24.90	8.34	4
26	14 50 37.89	24	−0.48	14 57 23.06	25	−2.24	37.41	20.82	4
27	14 54 25.82	22	−0.37	15 1 9.74	25	−0.95	25.45	8.79	4
				April 20.					
L. Non. Ost									
Nr. 10	11 38 53.81	25	−0.26	11 45 40.07	25	−3.09	53.55	36.98	4
11	11 42 8.88	25	−0.21	11 48 54.94	25	−2.86	8.67	52.08	4
12	11 55 13.31	25	+0.02	12 1 58.72	25	−1.80	13.33	56.92	4
13	11 58 18.56	25	−0.24	12 5 4.83	25	−3.03	18.32	1.80	4
L. Non. West									
Nr. 14	12 9 19.88	24	−0.32	12 16 4.40	25	−1.38	19.56	3.02	4
15	12 12 58.95	23	−0.41	12 19 44.90	25	−2.96	58.54	41.94	4
16	12 23 41.10	25	−0.39	12 30 26.75	13	−2.64	40.71	24.11	4
17	12 27 18.20	22	−0.31	12 34 2.71	25	−1.34	17.89	1.37	4
18	12 38 46.77	24	−0.40	12 45 32.56	25	−2.70	46.37	29.86	4
19	12 42 27.26	24	−0.28	12 49 11.35	21	−0.87	26.98	10.48	4

Uhrcorrection: Nr. 11 + $4^s.00$; Nr. 15 + $3^s.97$.

Registrirte Coincidenzen

mit L.	$\Delta u' =$	mit G.
12^h 59^m 10^s		13^h 13^m 55^s
13 2 4	6^m $20^s.678$	13 16 9
13 4 59	20.678	13 18 25
13 7 55	20.667	13 20 41
13 10 47	20.672	13 22 58

April 21.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	Correct. des Instr.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Meridian. Leipzig.	Im Meridian. Gotha.	Läng. Differ.
L. Non. West									
Nr. 10	11^h 38^m $53^s.11$	24	$-0^s.40$	11^h 45^m $39^s.04$	25	$-2^s.93$	$52^s.71$	$36^s.11$	6^m 4
11	11 42 8.19	25	−0.38	11 48 53.89	25	−2.69	7.81	51.20	4
12	11 55 12.77	24	−0.29	12 1 57.42	25	−1.58	12.48	55.84	4
13	11 58 17.84	25	−0.39	12 5 3.67	25	−2.86	17.45	0.81	4
L. Non. Ost									
Nr. 14	12 9 18.71	24	+0.02	12 16 4.52	25	−2.30	18.73	2.22	4
15	12 12 57.92	25	−0.27	12 19 44.90	25	−3.57	57.65	41.33	4
16	12 23 39.98	23	−0.21	12 30 26.81	25	−3.30	39.77	23.51	4
17	12 27 17.02	23	+0.02	12 34 2.97	25	−2.28	17.04	0.69	4
18	11 38 45.61	25	−0.22	12 45 32.46	25	−3.35	45.39	29.11	4
19	12 42 26.05	25	+0,11	12 49 11.71	25	−1.92	26.16	9.79	4

Uhrcorrection: Nr. 11 + $4^s.85$; Nr. 15 + $4^s.86$.

Registrirte Coincidenzen

mit L.	$\Delta u' =$	mit G.
12^h 57^m 33^s	6^m $18^s.581$	13^h 9^m 37^s
13 0 29	18.581	13 11 53
13 3 22	18.571	13 14 8
13 6 19	18.571	13 16 22

Ablesungen vom Gothaer Papierstreifen.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Im Meridian. Leipzig.	Im Meridian. Gotha.	Längen-Differenz.	L. Str. − G. Str.
			April 19. Forts.					
ir. 20	13ʰ 56ᵐ 8ˢ48	24	14ʰ 2ᵐ 52ˢ63	25	8ˢ16	51ˢ89	6ᵐ 43ˢ43	0ˢ039
21	13 59 19.30	25	14 6 5.00	25	18.88	2.36	43.48	− 0.004
22	14 14 52.23	24	14 21 37.81	25	51.86	35.41	43.55	0.008
23	14 17 54.24	22	14 24 38.63	25	54.20	37.78	43.58	0.005
Kr. West								
r. 24	14 30 48.86	22	14 37 33.10	18	48.48	32.04	43.56	0.121
25	14 33 2.82	20	14 39 47.97	20	2.35	45.79	43.44	− 0.003
26	14 44 15.39	24	14 51 0.43	25	14.91	58.19	43.28	0.118
27	14 48 3.27	22	14 54 47.14	25	2.90	46.19	43.29	0.049
			April 20.					
Kr. Ost								
r. 10	11 32 33.00	25	11 39 19.22	25	32.74	16.13	6 43.39	0.042
11	11 35 48.08	25	11 42 34.12	25	47.87	31.26	43.39	0.019
12	11 48 52.53	25	11 55 37.91	25	52.55	36.11	43.56	0.036
13	11 51 57.79	25	11 58 44.03	25	57.55	41.00	43.45	0.038
Kr. West								
r. 14	12 2 59.14	24	12 9 43.62	25	58.82	42.24	43.42	0.036
15	12 6 38.19	23	12 13 24.07	25	37.78	21.11	43.33	0.067
16	12 17 20.33	25	12 24 6.00	12	19.94	3.36	43.42	− 0.023
17	12 20 57.48	23	12 27 41.94	25	57.17	40.60	43.43	0.050
18	12 32 26.05	24	12 39 11.80	25	25.65	9.10	43.45	0.045
19	12 36 6.57	24	12 42 50.61	21	6.29	49.74	43.45	0.042

Uhrcorrection: Nr. 11 — 18ˢ61; Nr. 15 — 18ˢ62.

Registrirte Coincidenzen

mit L.	mit G.	$\Delta u'$ =
12ʰ 56ᵐ 40ˢ	13ʰ 8ᵐ 16ˢ	6ᵐ 20ˢ691
12 59 35	13 10 30	20.694
13 2 33	13 12 49	20.669
13 5 24	13 15 4	20.676
	13 17 23	20.662

April 21.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Im Meridian. Leipzig.	Im Meridian. Gotha.	Längen-Differenz.	L. Str. − G. Str.
. 10	11 32 34.43	24	11 39 20.29	25	34.03	17.36	6 43.33	0.076
11	11 35 49.48	25	11 42 35.14	25	49.10	32.45	43.35	0.030
12	11 48 54.08	24	11 55 38.70	25	53.79	37.12	43.33	0.022
13	11 51 59.14	25	11 58 44.96	25	58.75	42.10	43.35	0.010
Kr. Ost								
r. 14	12 3 0.05	24	12 9 45.85	24	0.07	43.55	43.48	0.007
15	12 6 39.25	25	12 13 26.17	25	38.98	22.60	43.62	0.060
16	12 17 21.34	23	12 24 8.15	25	21.13	4.85	43.72	0.015
17	12 20 58.37	23	12 27 44.33	25	58.39	42.05	43.66	− 0.018
18	12 32 26.98	25	12 39 13.84	25	26.76	10.49	43.73	− 0.012
19	12 36 7.44	25	12 42 53.09	25	7.55	51.17	43.62	0.020

Uhrcorrection: Nr. 11 — 20ˢ05; Nr. 15 — 20ˢ24.

Registrirte Coincidenzen

mit L.	mit G.	$\Delta u'$ =
12ʰ 49ᵐ 31ˢ	13ʰ 4ᵐ 10ˢ	6ᵐ 18ˢ618
12 52 27	13 6 24	18.632
12 55 22	13 8 43	18.603
12 58 19	13 10 59	18.588

Ablesungen vom Leipziger Papierstreifen.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	Correct. des Instr.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Correct. des Instr.	Im Meridian. Leipzig.	Im Meridian. Gotha.	Lä... Diff...
				Beobachter: Bruhns in Leipzig, Auwers in Gotha.					
				April 24.					
Nr. 10	$11^h 38^m 50^s.68$	24	$-0^s.14$	$11^h 45^m 35^s.63$	25	$-1^s.67$	$50^s.54$	$33^s.96$	6^m
11	11 42 5.59	25	−0.10	11 48 50.17	25	−1.18	5.49	48.99	
12	11 55 10.41	25	+0.06	12 1 52.71	25	+1.11	10.47	53.82	
13	11 58 15.36	25	−0.13	12 5 0.26	25	−1.54	15.23	58.72	
L. Non. West									
Nr. 14	12 9 16.80	25	−0.27	12 15 58.59	13	+1.39	16.53	59.98	
15	12 12 55.77	25	−0.28	12 19 40.78	25	−1.74	55.49	39.04	
16	12 23 38.08	25	−0.28	12 30 22.30	25	−1.09	37.80	21.21	
17	12 27 15.27	25	−0.27	12 33 56.97	25	+1.46	15.00	58.43	
18	12 38 43.50	25	−0.28	12 45 28.03	24	−1.22	43.22	26.81	
19	12 42 24.40	25	−0.26	12 49 5.09	25	+2.38	24.14	7.47	

Uhrcorrection: Nr. 11 + $7^s.15$; Nr. 15 + $7^s.01$.

Registrirte Coincidenzen

mit L. $12^h\ 52^m\ 52^s$	$\Delta u' = 6^m\ 20^s.610$	mit G. $13^h\ 3^m\ 20^s$
12 55 52	6 20.633	13 5 37
12 58 48	6 20.633	13 7 55
		13 10 12
		13 12 28

Ablesungen vom Gothaer Papierstreifen.

Stern.	D.-Z. d. M.-F. Leipzig.	Fäden.	D.-Z. d. M.-F. Gotha.	Fäden.	Im Meridian. Leipzig.	Gotha.	Längen-Differenz.	L. Str. — G. Str.
	Beobachter: Auwers in Gotha, Bruhns in Leipzig.							
			April 24.					
Ir. 10	11h 32m 29s.89	21	11h 39m 14s.81	25	29s.75	13s.14	6m 43s.39	0s.029
11	11 35 44.81	25	11 42 29.34	25	44.71	28.16	43.45	0.051
12	11 48 49.68	25	11 55 31.91	25	49.74	33.02	43.28	0.073
13	11 51 54.66	25	11 58 39.45	25	54.53	37.91	43.38	0.108
Ir. West								
Ir. 14	12 2 56.09	25	12 9 37.81	25	55.82	39.20	43.38	0.058
15	12 6 35.07	25	12 13 20.00	12	34.79	18.26	43.47	0 074
16	12 17 17.38	25	12 24 1.53	25	17.10	0.44	43.34	0.068
17	12 20 54.56	25	12 27 36.16	25	54.29	37.62	43.33	0.107
18	12 32 22.86	25	12 39 7.28	24	22.58	6.06	43.48	0.122
19	12 36 3.72	25	12 42 44.35	25	3.46	46.73	43.27	0.052

Uhrcorrection: Nr. 11 — 15s.53; Nr. 15 — 15s.76

Registrirte Coincidenzen

mit L. 13h 47m 40s	mit G. 13h 57m 45s	$\Delta u'$ =	6m 20s.662
13 50 36	14 0 1		20.669
13 53 32	14 2 20		20.662
	14 4 38		20.654
	14 6 55		20.647

III. Ableitung des Resultats für den Längenunterschied.

In der Zusammenstellung der Beobachtungen sind bereits die aus den einzelnen an beiden Orten beobachteten Durchgängen folgenden Werthe der Längendifferenz aufgeführt. Für die Auge- und Ohr-Beobachtungen sind die auf den rechten Seiten stehenden Längendifferenzen die Summen der beobachteten Differenzen der Uhrcorrectionen (oder der Werthe Culminationszeit in Gotha nach der Gothaer Uhr — Culminationszeit in Leipzig nach der Leipziger Uhr) mit den durch die gehörten Coincidenzen gefundenen absoluten Differenzen der Uhrzeiten. Die Uhrgänge, welche hierbei und später angewandt worden sind, ergeben sich aus den im ersten Abschnitt mitgetheilten Uhrcorrectionen für diejenigen Abende, an welchen correspondirende Beobachtungen verbunden werden konnten, wie folgt:

April	Gothaer Uhr in 24^h.	Leipz. Uhr in 24^h.	Rel. Gang stündlich.	Mittel der Gänge stündlich.
4.	$-0^s.12$	$+1^s.00$	$+0^s.047$	$+0^s.018$
8.	-0.56	$+0.95$	$+0.063$	$+0.008$
10.	-0.74	$+3.00$	$+0.156$	$+0.047$
11.	-0.86	$+2.62$	$+0.145$	$+0.037$
13.	-0.80	$+1.90$	$+0.112$	$+0.023$
16.	-0.60	$+1.30$	$+0.079$	$+0.015$
17.	-0.86	$+1.09$	$+0.081$	$+0.005$
19.	-0.95	$+0.89$	$+0.077$	-0.001
20.	-1.14	$+0.85$	$+0.083$	-0.006
21.	-1.08	$+0.81$	$+0.079$	-0.005
24.	-0.60	$+0.60$	$+0.050$	0.000

Die Uhrvergleichungen durch die einzelnen Coincidenzenpaare sind ebenfalls bereits in der Zusammenstellung der Beobachtungen aufgeführt, auf den linken Seiten die durch die Leipziger (L) und auf den rechten Seiten die durch die Gothaer Hülfsuhr (G) erhaltenen. Von dieser waren 136.4 Schläge = 135.4 Sternzeit-Secunden, während das Intervall, in welchem die erstere einen Schlag gewann, etwas veränderlich zwischen 174^s und 180^s schwankte. Die Vergleichungen sind mit den Werthen:

178 Schläge der Leipziger Hülfsuhr = 177^s Sternzeit

137 „ „ Gothaer „ = 136^s „

berechnet und die Mittel aus den Zahlen des vorigen Abschnitts mit den eben aufgeführten relativen Gängen auf ein Moment reducirt. Es fand

sich wenn Δu die Differenz Leipziger Uhrzeit — Gothaer Uhrzeit nach den gehörten, und $\Delta u'$ dieselbe Differenz nach den registrirten Coincidenzen bezeichnet:

April	Δu für Stzt. L.	durch L.	durch G.	G. — L.
4.	11ʰ4	5ᵐ 40ˢ613 (3)	5ᵐ 40ˢ524 (5)	— 0ˢ089
8.	11.4	5 34.887 (4)	5 34.919 (5)	+ 0.032
10.	11.4	6 48.953 (4)	6 48.982 (5)	+ 0.029
11.	11.4	6 45.560 (4)	6 45.626 (5)	+ 0.066
17.	11.5	6 26.638 (1)	6 26.596 (1)	— 0.042
	13.9	6 26.452 (2)	6 26.520 (3)	+ 0.068
19.	11.3	6 22.533 (3)	6 22.595 (5)	+ 0.062
20.	11.3	6 20.520 (4)	6 20.579 (6)	+ 0.059
21.	11.4	6 18.407 (5)	6 18.473 (5)	+ 0.066
24.	11.3	6 20.474 (4)	6 20.480 (4)	+ 0.006

April	$\Delta u'$ für Stzt. L.	durch L.	durch G.	G. — L.	$\Delta u' - \Delta u$
11.	13ʰ2	6ᵐ 45ˢ610 (2)	6ᵐ 45ˢ604 (3)	— 0ˢ006	+ 0ˢ275
13.	11.2	6 40.074 (3)	6 40.121 (6)	+ 0.047	—
16.	11.4	6 28.727 (3)	6 28.780 (4)	+ 0.053	—
17.	15.2	6 26.621 (3)	6 26.650 (4)	+ 0.029	+ 0.282
19.	13.3	—	6 22.690 (7)	—	+ 0.261
20.	13.2	6 20.667 (4)	6 20.687 (5)	+ 0.020	+ 0.285
21.	13.1	6 18.569 (4)	6 18.620 (4)	+ 0.051	+ 0.289
24.	14.0	6 20.622 (3)	6 20.665 (5)	+ 0.043	+ 0.302

Die Differenz G.—L. ist die doppelte Stromzeit, oder das Doppelte derjenigen Zeit, um welche das von der Stromquelle (19 Meilen) entferntere Relais später zum Anschlag gekommen ist, als das nähere. Der Gangunterschied der beiden Relais ist nach früheren Untersuchungen von Bruhns verschwindend; werden demnach ohne Weiteres aus allen Zahlen G. — L. die Mittel mit Berücksichtigung der aus der Anzahl der Coincidenzen folgenden Gewichte gebildet, so erhält man:

doppelte Stromzeit nach d. gehörten Coincidenzen = 0ˢ0386 (Gew. 17.14)
„ „ „ „ registrirten „ = 0.0360 (Gew. 12.72)

Die Einheit der Gewichte ist dasjenige einer Uhrvergleichung durch ein Coincidenzenpaar, welchem der Uebereinstimmung der einzelnen Vergleichung eines jeden Abends zufolge ein mittlerer Fehler von etwa

± 0ˢ021 für die gehörten Coincidenzen, und
± 0.014 „ „ registrirten „

entspricht. In der Auffassung resp. Verzeichnung der Coincidenzen selbst sind hiernach mittlere Fehler von etwa ± 2ˢ2 resp. ± 1ˢˢ

gangen worden, welche gewiss erheblich kleiner gewesen sein würden, wenn nicht die Gothaer Hülfsuhr etwas ungleiche Secunden geschlagen und in Leipzig das nahe Zusammenfallen von vier verschiedenen Schlägen — des Relais, der im Beobachtungsraume selbst stehenden Hülfsuhr und der doppelt schlagenden elektrischen Uhr — die Beobachtungen gestört hätte. Aus den Abweichungen der einzelnen G. — L. von ihren Mitteln erhält man aber bedeutend grössere mittlere Fehler und damit die mittleren Fehler der doppelten Stromzeiten gewiss richtiger

$$= \pm\ 0^s.009 \quad \text{resp.} \quad \pm\ 0^s.008.$$

Hierbei ist die April 4 resultirende negative Stromzeit unberücksichtigt geblieben. Anscheinend wohl verbürgt, muss diese auffallende Differenz durch einen besondern nicht weiter zu ermittelnden Umstand veranlasst sein. Vielleicht könnte in Leipzig in einer der beiden Reihen eine durchgehende Verzählung um 20^s vorgefallen sein (in Gotha sind die Coincidenzen an diesem Abende auch von Herrn Geh.-Rath Hansen, und zwar nicht wesentlich von Auwers verschieden, notirt). — Die erste negative Stromzeit vom 17. April wird durch die Unsicherheit der betreffenden, durch Unterbrechung der Verbindung beider Stationen vielfach gestörten, Vergleichungen erklärt, und ebenso ist das negative Zeichen der Stromzeit nach den registrirten Coincidenzen vom 11. April nicht zu verbürgen.

Zur Berechnung der Längendifferenzen sind die Mittel aus den Uhrvergleichungen durch die Leipziger und durch die Gothaer Hülfsuhr angewandt; April 17 sind die beiden Paare mit den Gewichten 0.50 und 1.20 vereinigt. April 19 ist von dem $\Delta u'$ nach den Vergleichungen mit G. die mittlere Stromzeit, $0^s.018$, abgezogen. Darauf fanden sich die Unterschiede $\Delta u' - \Delta u$, welche oben aufgeführt sind; dieselben können als völlig constant angesehen werden und zeigen, dass die gehörten Coincidenzen von beiden Beobachtern gleich aufgefasst sind. Das Mittel $+\ 0^s.282$ ist benutzt worden, um April 16 die Längendifferenzen aus den Auge- und Ohr-Beobachtungen mit Hülfe der Uhrvergleichung durch die registrirten Coincidenzen zu berechnen, da an diesem Tage wegen Unterbrechung der Verbindung keine Coincidenzen nach dem Gehör beobachtet werden konnten.

Aus den Mitteln der Uhrvergleichungen sind mit den vorhin angegebenen relativen Gängen die folgenden Tafeln berechnet.

Leipziger Uhrzeit — Gothaer Uhrzeit.

a) für Auge- und Ohr-Beobachtungen.

Leipz. Uhrzt.	April 4.	April 8.	April 10.	April 11.	April 16.	April 17.	April 19.	April 20.	April 21.	April 24.
9^h	$5^m 40^s.680$	$5^m 35^s.054$	$6^m 49^s.342$	$6^m 43^s.941$	$6^m 28^s.662$	$6^m 26^s.862$	$6^m 22^s.741$	$6^m 20^s.741$	$6^m 18^s.788$	$6^m 20^s.592$
10	40.633	34.991	49.186	43.796	28.583	26.781	22.664	20.658	18.709	20.542
11	40.587	34.928	49.030	43.651	28.504	26.700	22.587	20.575	18.630	20.492
12	40.540	34.865	48.874		28.425	26.619	22.510	20.492	18.551	20.442
13	40.493	34.802	48.718			26.538	22.433	20.409	18.472	20.392
14	40.447		48.562			26.457	22.356	20.326	18.393	20.342
15	40.400					26.376	22.279		18.314	
16	40.353					26.295	22.202		18.235	

b) für Registrir-Beobachtungen.

Leipz. Uhrzt.	April 11.	April 13.	April 16.	April 17.	April 19.	April 20.	April 21.	April 24.
11^h	$6^m 45^s.926$	$6^m 40^s.120$	$6^m 28^s.786$	$6^m 26^s.976$	$6^m 22^s.849$	$6^m 20^s.860$	$6^m 18^s.761$	$6^m 20^s.794$
12	45.781	40.008	28.707	26.895	22.772	20.777	18.682	20.744
13	45.636	39.895		26.814	22.695	20.694	18.603	20.694
14				26.733	22.618			
15				26.652	22.541			

Aus der Tafel a sind die Zahlen interpolirt, deren Summen mit den »Differenzen der Uhrcorrectionen« der Abtheilung A. des Abschnitts II. die ebendaselbst aufgeführten Längendifferenzen gegeben haben. Dieselben sind in Gothaer Uhrzeit ausgedrückt und also noch wegen des Uhrgangs um einige Tausendstelsecunden zu verbessern, welche an die Mittel angebracht werden sollen. —

Die Registrirbeobachtungen geben durch die Verzeichnung auf beiden Papierstreifen je zwei Werthe für die Längendifferenz, welche sich wieder um die doppelte Stromzeit unterscheiden. In der Abtheilung B. des Abschnitts II. sind diese Doppelwerthe, sowie unter der Ueberschrift »Leipz. Streifen — Gothaer Streifen« die einzelnen Werthe für die doppelte Stromzeit aufgeführt; die ersteren sind indess noch von dem Gange der beiden einzelnen Uhren und die letzteren von dem relativen Uhrgange zu befreien. Mit Rücksicht hierauf finden sich für die doppelte Stromzeit folgende Tagesmittel:

April 4.	0ˢ029	10	St. m. F. für einen Stern = ±	0ˢ023
8.	0.057	10	„	0.015
10.	0.055	9	„	0.033
11.	0.067	9	„	0.033
13.	0.056	7	„	0.027
17.	0.039	11	„	0.036
19.	0.054	16	„	0.046
20.	0.044	10	„	0.020
21.	0.030	10	„	0.027
24.	0.079	10	„	0.030

Der mittlere Werth der doppelten Stromzeit ist hiernach = 0ˢ0508, und aus den Abweichungen der einzelnen Werthe von den Tagesmitteln findet sich der m. F. der doppelten Stromzeit aus einem Stern = ± 0ˢ030. Dieser Werth ist viel zu gross, um aus den Fehlern der Verzeichnung und Ablesung erklärt werden zu können, es scheinen vielmehr merkliche Schwankungen in der Stromzeit selbst im Laufe eines Abends vorgekommen zu sein, und ebenso von einem Tage zum andern (wie auch die Coincidenzen andeuteten), indem aus den Unterschieden zwischen den einzelnen Tagesmitteln der m. F. eines solchen = ± 0ˢ016, derjenige des Gesammtmittels also = ± 0ˢ005 folgt.

Alle Werthe der einfachen Stromzeit sind demnach:

aus den Registrirsternen	= 0ˢ0254	m. F.	= ± 0ˢ0025
„ „ registr. Coincid.	= 0.0180	„ „	= ± 0.0040
„ „ gehörten „	= 0.0193	„ „	= ± 0.0045
Mittel	= 0ˢ0226	m. F.	= ± 0ˢ0020

Mit dem Werthe 0ˢ025 sind diejenigen Längendifferenzen verbessert, welche nur auf einem Streifen verzeichnet waren, während im Uebrigen aus den Angaben beider Streifen die Mittel genommen sind.

Um nun einen Anhalt für die weitere Behandlung der Beobachtungen zu gewinnen, mussten wir Näherungswerthe für die Längendifferenz und die einzelnen Tagesresultate ableiten. Zu diesem Zwecke sind ohne Berücksichtigung irgend welcher Gewichtsunterschiede, ausser für Stern 12 und Stern 18, von denen der erste April 4 in Gotha und der andere April 10 in Leipzig nur an 3 Fäden beobachtet war, weshalb die beiden entsprechenden Längendifferenzen vorläufig das Gewicht 1/3 erhielten, aus den einzelnen Beobachtungsgruppen die Mittel genommen, nämlich

A. Aus den Auge- und Ohr-Beobachtungen

Reihe I (Bruhns in Leipzig, Auwers in Gotha).

April 4. Gr. 1.	6ᵐ 43ˢ074	9 St.;	corr. für Uhrg.	6ᵐ 43ˢ073
Gr. 2.	43.129	9		43.128
8.	42.924	9		42.921
10.	42.904	7		42.901
11.	43.144	9		43.140
24.	43.033	9		43.030

Reihe II (Auwers in Leipzig, Bruhns in Gotha).

April 16.	6ᵐ 43ˢ776	8 St.;	corr. für Uhrg.	6ᵐ 43ˢ773
17. Gr. 1.	43.744	9		43.740
„ 2.	43.745	4		43.741
19. Gr. 1.	43.648	9		43.644
„ 2.	43.752	6		43.748
20.	43.601	9		43.596
21.	43.650	9		43.645

B. Aus den Registrir-Beobachtungen

Reihe I.

April 4.	6ᵐ 43ˢ399	10 St.;	corr. für Uhrg.	6ᵐ 43ˢ401
8.	43.218	10		43.219

W. O. — 0ˢ04, O. W. + 0ˢ04, O. O. — 0ˢ01, W. W. + 0ˢ01; für O. O.′ und W. W.′ keine Correction und für die einmal vorkommende Combination W. O.′ — 0ˢ03. Zu demselben Zweck mussten ausserdem, da nicht alle Sterne an allen Tagen beobachtet sind, die Abweichungen der beiden Gesammtmittel von den einzelnen Tagesresultaten, wie dieselben vorhin vorläufig bestimmt sind, zu allen einzelnen $\Delta\lambda$ der betreffenden Tage addirt werden. Darauf ergaben sich für die einzelnen Sterne folgende, nach den Declinationen der Sterne geordnete Mittel (wieder ohne Unterscheidung von Gewichten, ausser für Nr. 12 und Nr. 18) nebst den Quadratsummen der Abweichungen von denselben Σff (resp. $\Sigma p.ff$ für Nr. 12 und Nr. 18):

A. Nach den Auge- und Ohr-Beobachtungen.

Nr.	Decl.	$\Delta\lambda$	$\Sigma ff.$	Beob.	
32	— 3°0	6ᵐ 43ˢ53	0ˢ0302	3	(α) 6ᵐ 43ˢ396 (für δ = + 10°9)
26	+ 0.4	43.38	—	1	
30	5.4	43.35	0.0008	2	
31	6.9	43.35	0.0122	3	
9	8.1	43.47	0.1388	10	
2	8.7	43.35	0.1260	10	
6	11.3	43.42	0.1308	10	
4	14.0	43.33	0.2238	9	
3	17.4	43.39	0.1714	10	
29	25.6	43.42	0.0968	2	
27	39.8	43.40	—	1	(ζ) 6ᵐ 43ˢ312 (für δ = + 44°6)
8	41.2	43.35	0.1142	10	
33	42.8	43.26	0.0224	3	
34	43.0	43.27	0.0186	3	
5	43.6	43.28	0.3308	9	
7	43.9	43.32	0.1881	9	
28	48.2	43.57	—	1	
1	50.5	43.30	0.1084	10	

B. Nach den Registrir-Beobachtungen.

Nr.	Decl.	$\Delta\lambda$	$\Sigma p.ff.$	Beob.	
21	— 9°6	6ᵐ 43ˢ39	0ˢ0004	2	(α) 6ᵐ 43ˢ426 (für δ = + 7°5)
22	— 1.6	43.47	0.0006	2	
15	+ 0.1	43.45	0.1131	9	
26	0.4	43.26	0.0002	2	
25	2.5	43.39	0.0004	2	
10	7.3	43.42	0.0554	9	
18	8.4	43.50	0.0336	8½	
13	9.5	43.40	0.0312	9	
16	10.5	43.46	0.0575	8	
11	15.3	43.38	0.1068	10	

Nr.	Decl.	$\Delta\lambda$	$\Sigma p.ff.$	Beob.
24	$+ 37^{\circ}3$	$6^{m}\,43^{s}54$	$0^{s}0002$	2
27	39.8	43.35	0.0162	2
14	41.4	43.40	0.0212	7
17	42.1	43.39	0.0724	9
23	42.4	43.47	0.0040	2
12	43.8	43.36	0.1047	$8^1/_2$
20	44.5	43.37	0.0000	2
19	49.2	43.34	0.2495	8

(ζ) $6^{m}\,43^{s}373$ (für $\delta = + 43^{\circ}5$)

Die Aequatorealsterne geben also Werthe (α) für die Längendifferenz, welche erheblich grösser sind, als die Werthe (ζ) aus den Zenithsternen; es ist

(α) — (ζ) für die A.- und O.-B. $= + 0^{s}084$ m. F. $= \pm 0^{s}027$
„ „ Registr.-B. $= + 0.053$ m. F. $= \pm 0.025$

Die angegebenen m. F. dieser Differenzen folgen aus den Werthen des m. F. einer Längendifferenz aus einem Paar correspondirender Beobachtungen

A (α) $\pm 0^{s}149$; A (ζ) $\pm 0^{s}126$; B (α) $\pm 0^{s}139$; B (ζ) $\pm 0^{s}112$,

welche sich aus den Abweichungen der Resultate aus den einzelnen Sternen von den vier Mitteln ergeben. Die m. F. finden sich auf diese Weise für die Gruppen (α) grösser als für die Gruppen (ζ); wenn man diesen Unterschied aber wegen der Uebereinstimmung der beiden Beobachtungsmethoden in Bezug auf denselben für reell halten will, wird man seine Erklärung wohl nur in der grössern Ausdehnung der Gruppen (α) im Sinne der Declination suchen und darin eine weitere Bestätigung der Aenderung der $\Delta\lambda$ mit den Zenithdistanzen sehen dürfen.

Vergleicht man die Beobachtungen der einzelnen Tage untereinander, so erhält man folgende Differenzen (α) — (ζ):

April		A		B		Mittel	
4.	1	$+ 0^{s}22$	G. 2.4	$+ 0^{s}03$	G. 3.4	$+ 0^{s}09$	G. 8.2
	2	$+ 0.05$	2.4				
8.		$+ 0.24$	2.4	$+ 0.09$	4.0	$+ 0.15$	6.4
10.		$+ 0.01$	1.9	$+ 0.07$	3.6	$+ 0.05$	5.5
11.		$+ 0.17$	2.4	$+ 0.33$	3.2	$+ 0.26$	5.6
16.		$+ 0.17$*	2.0	—	—	$+ 0.17$	2.0
17.	1	$+ 0.08$*	2.4	0.00	3.8	$+ 0.02$	10.8
	2	$+ 0.19$*	1.1	$- 0.07$	3.5		

April		A		B		Mittel	
19.	1	— 0ˢ02*	G. 2.4	+ 0ˢ08	G. 2.3	+ 0ˢ02	G. 9.5
	2	+ 0.21*	1.3	— 0.04	3.5		
20.		+ 0.05*	2.4	— 0.02	4.0	+ 0.01	6.4
21.		— 0.10*	2.4	0.00	4.0	— 0.04	6.4
24.		+ 0.14	2.4	+ 0.06	4.0	+ 0.09	6.4
Mittel		+ 0.102		+ 0.045		+ 0.068	

Aus den Abweichungen der Tagesmittel (aus A und B) von dem Gesammtmittel + 0ˢ068 würde der m. F. für Gew. 1 = ± 0ˢ222, also der m. F. des letztern Mittels = ± 0ˢ027 folgen. Die Gewichte selbst beruhen auf den Annahmen des Gewichts eines $\Delta\lambda$ aus einem Stern $A\zeta = 1.00$, $A\alpha = 1.20$, $B\zeta = 1.33$, $B\alpha = 2.59$.

Die Uebereinstimmung der einzelnen Tagesresultate bestätigt also die Realität des Unterschiedes (α) — (ζ). Bei der Längenbestimmung zwischen Berlin und Leipzig fand sich fast ganz derselbe Unterschied, nämlich + 0ˢ084 mit dem m. F. ± 0ˢ040. Man könnte durch diese Uebereinstimmung dazu veranlasst werden, die Ursache des Unterschiedes, von dessen Interpretation die weitere Behandlung der bis hierher erlangten Zahlen wesentlich abhängt, in dem Leipziger Instrumente zu suchen. Andererseits ist es jedoch nicht unwahrscheinlich, dass wenigstens ein Theil des Unterschiedes nicht den Instrumenten, sondern in Folge einer Abhängigkeit der persönlichen Gleichung von der Zenithdistanz der beobachteten Objecte den Beobachtern zur Last fällt.

Wenn man die persönliche Gleichung constant und den Gangunterschied der Relais nach den Untersuchungen von Bruhns = 0 annimmt, so gibt die Vergleichung der vorhin abgeleiteten vorläufigen Mittel I und II (in naher Uebereinstimmung mit der weiter unten mitzutheilenden definitiven Rechnung) die persönliche Gleichung B. — A. für Auge- und Ohr- Beobachtungen = + 0ˢ332 und für Registrirbeobachtungen = + 0ˢ117, wo das Pluszeichen angibt, dass Bruhns für dasselbe Moment grössere Zeiten notirt als Auwers. Für die erste Art von Beobachtungen haben wir bei Gelegenheit des ersten Ortswechsels April 12 die persönliche Gleichung am Leipziger Instrument direct bestimmt und, indem jeder 3—6 Antritte desselben Durchgangs beobachtete, folgende Werthe gefunden:

aus λ Ursae maj.	B. — A. = + 0ˢ.35	Decl. + 50°.5
l Leonis	+ 0.41	11.3
ω Ursae maj.	+ 0.32	43.9
47 Ursae maj.	+ 0.08	41.2
χ Leonis	+ 0.30	8.1
ν Virginis	+ 0.22	7.3
β Leonis	+ 0.25	15.3
γ Ursae maj.	+ 0.31	54.5
67 Ursae maj.	+ 0.57	43.8
o Virginis	+ 0.37	9.5

im Mittel B. — A. = + 0ˢ.318 mit dem m. F. ± 0ˢ.036, indem der m. F. eines einzelnen B. — A. sich aus den Abweichungen derselben von jenem Mittel = ± 0ˢ.113 ergibt. Zwischen Zenith- und südlichen Sternen zeigt sich kein Unterschied, indem die Mittel für die beiden Gruppen + 0ˢ.326 und + 0ˢ.310 für identisch zu erachten sind.

Eine weitere Verfolgung dieses Gegenstandes schien uns damals zwecklos. Bei der Reduction der Beobachtungen aber wurden wir zu der Annahme geführt, dass wir einen ganz anderen Werth für die persönliche Gleichung erhalten haben würden, wenn wir dieselbe, anstatt am Leipziger, am Gothaer Instrument bestimmt hätten. Der Unterschied zwischen den gehörten und registrirten Zeitscalen ist nämlich nach dem Zeugniss der Coincidenzbeobachtungen in Leipzig 0ˢ.282 grösser als in Gotha, um dieselbe Quantität hätten also die Differenzen zwischen den Uhrcorrectionen nach Ohr- und Registrirbeobachtungen in Leipzig grösser ausfallen müssen. Dieselben sind aber, wie in Abschnitt I. angegeben ist, gewesen:

in Gotha für A. Corr. (O) — Corr. (R) =	— 0ˢ.42, für B =	— 0ˢ.33
in Leipzig	— 0.75	— 0.43
Differenz =	— 0ˢ.33	— 0ˢ.10

Die Abweichung — 0ˢ.05 von — 0ˢ.28 für A. ist kaum oder gar nicht zu verbürgen, die Abweichung + 0ˢ.18 für B. aber so gross, dass sie eine nähere Untersuchung um so mehr nothwendig machte, als sich in der That für eine Verschiedenheit in der Uebertragung der Antrittsmomente auf die gehörte Zeitscale an den beiden Orten eine nahe liegende Erklärung bot, indem in Gotha an einer Uhr mit scharfem einfachen Schlag beobachtet wurde, während in Leipzig eine elektrische Uhr mit wenig präcisem Doppelschlag zur Anwendung kam, welcher um so unange-

nehmer war, weil bei der damaligen Einrichtung der Schlag, welcher den Anfang der Secunde bezeichnen sollte, der folgende war und ein nicht viel schwächerer etwa eine Drittelsecunde vorangieng. Hier scheint nun Bruhns den Hauptschlag bei der Vergleichung mit den Relaisschlägen, so lange nämlich nur der Gehörsinn allein in Thätigkeit war, richtig aufgefasst zu haben, beim Beobachten der Sterndurchgänge dagegen, wo die Aufmerksamkeit auf die Controle zweier verschiedenen Sinnesthätigkeiteh zu vertheilen war und sich vielleicht derjenigen des Sehens vorzugsweise zuwandte, den Secundenanfang ungefähr auf die Mitte zwischen beiden Schlägen verlegt zu haben, während in Gotha zu einer Verschiedenheit der Zählung der Uhrschläge bei den Coincidenz- und Antrittsbeobachtungen keine Veranlassung war. In dieser Interpretation der gefundenen Abweichung ist die Voraussetzung enthalten, dass der Ortswechsel nicht zugleich auch eine wesentliche Veränderung in der Art zu registriren zur Folge gehabt hat, deren hinlänglich genähertes Zutreffen man wohl annehmen kann, da die beiden Instrumente und ihre Vergrösserungen nicht viel verschieden gewesen sind und jeder Beobachter an beiden Orten denselben Signalgriff benutzt hat.

Wenn Bruhns in seiner Zählung in Gotha 0ˢ18 gegen Leipzig zurück war, Auwers dagegen an beiden Orten gleich beobachtete, so musste die Differenz B. — A., die sich in Leipzig = + 0ˢ32 gefunden hatte, in Gotha = + 0ˢ14 sein. Zwei zur Entscheidung der Frage, freilich erst beinahe ein halbes Jahr nach der Längenbestimmung, am Gothaer Instrument angestellte Beobachtungsreihen gaben (1865 October 2 und 3) in der That B. — A. = + 0ˢ15, zugleich aber noch andere Resultate, welche es nothwendig machen, diese Beobachtungsreihen hier ausführlicher zu besprechen.

Am 2. October wurden 31 Sterne, von jedem Beobachter fast immer an 6 - 7 Fäden, gemeinschaftlich beobachtet. Die Differenzen B. — A. fanden sich durch

62 Serpentis	+0ˢ10	β Cygni	+0ˢ14	B. A. C 6928	—0ˢ23
10 Aquilae	+0.31	9 Vulpeculae	+0.05	66 Aquilae	+0.18
14 Aquilae	+0.08	σ Aquilae	+0.49	B. A. C. 6966	—0.08
ζ Aquilae	+0.16	χ Aquilae	+0.21	36 Cygni	+0.04
ι Lyrae	+0.16	γ Aquilae	+0.44	B. A. C. 7014	+0.22
B. A. C. 6566	+0.27	α Aquilae	—0.22	68 Aquilae	+0.10
B. A. C. 6579	+0.02	β Aquilae	+0.39	ω^2 Cygni	+0.05

ω Aquilae	+0ˢ22	ψ Cygni	−0ˢ02	70 Aquilae	+0ˢ19
B. A. C. 6626	−0.14	15 Vulpeculae	+0.13	B. A. C. 7153	+0.13
δ Aquilae	+0.06	η Sagittae	+0.11	α Cygni	−0.14
35 Aquilae	−0.07				

Das Mittel aus diesen 31 Werthen ist = + 0ˢ108. Ordnet man dieselben aber nach den Declinationen der Sterne, so hat man B. — A.

für −3°9 =	+0ˢ08	für +10°3 =	+0ˢ44	für + 34°6 =	+0ˢ04
−3.8	+0.10	11.4	+0.22	35.9	+0.16
−3.0	+0.19	11.5	+0.21	44.8	−0.14
−1.4	+0.18	13.7	+0.16	48.5	+0.05
+1.7	−0.07	13.7	+0.31	49.3	−0.14
2.8	+0.06	19.5	+0.05	49.6	+0.02
4.9	+0.22	19.6	+0.11	50.1	+0.27
5.1	+0.49	25.2	−0.08	52.1	−0.02
6.5	+0.10	27.4	+0.13	52.5	+0.13
6.0	+0.39	27.7	+0.14	52.8	−0.23
8.5	−0.22				
für +2°3 =	+0ˢ138	für +18°0 =	+0ˢ169	für + 47°0 =	+0ˢ014
m. F. =	±0.048		±0.050		±0.050

Die Uebereinstimmung unter den einzelnen Werthen ist zwar sehr gering (der m. F. eines B. — A. folgt aus den Abweichungen von den drei Mitteln = ± 0ˢ158), ohne Zweifel weil die Luft schlecht war — ungefähr wie im Durchschnitt bei der Längenbestimmung — und einmal die zufälligen Antrittsfehler deshalb gross ausfielen, hauptsächlich aber auch die persönliche Gleichung selbst sehr unbeständig war; eine Verschiedenheit derselben für Zenithal- und südliche Sterne tritt indess trotzdem deutlich hervor.

Am 3. October gaben 30 gemeinschaftlich an je 6—7 Fäden beobachtete Sterne für B. — A. folgende Werthe:

15 Vulpeculae	+0ˢ38	B. A. C. 7153	+0ˢ06	ζ Cygni	+0ˢ05
η Sagittae	+0.29	α Cygni	+0.02	34 Vulpeculae	+0.38
B. A. C. 6928	+0.19	52 Cygni	+0.09	21 Aquarii	+0.14
66 Aquilae	+0.31	55 Cygni	+0.36	35 Vulpeculae	+0 07
B. A. C. 6966	−0.01	57 Cygni	+0.15	β Aquarii	+0.27
36 Cygni	+0.07	18 Delphini	+0.38	B. A. C. 7499	+0.28
B. A. C. 7014	+0.28	2 Equulei	+0.24	74 Cygni	−0.06

68 Aquilae	+0ˢ42	4 Equulei	+0ˢ09	B.A.C. 7548	+0ˢ17
ω^2 Cygni	+0.07	63 Cygni	−0.04	9 Pegasi	+0.14
70 Aquilae	+0.40	6 Equulei	+0.42	81 Cygni	+0.17

im Mittel + 0ˢ193. Ordnet man diese Werthe aber wieder nach den Declinationen, so findet sich B. — A.:

für −6°2 =	+0ˢ27	für +10°3 =	+0ˢ38	für +39°8 =	−0ˢ06
−4.6	+0.28	16.7	+0.14	43.9	+0.15
−4.1	+0.14	19.6	+0.29	44.8	+0.02
−3.8	+0.42	23.3	+0.38	45.6	+0.36
−3.0	+0.40	25.2	−0.01	47.1	−0.04
−1.4	+0.31	27.0	+0.07	48.5	+0.07
+4.9	+0.28	27.4	+0.38	48.7	+0.17
5.4	+0.09	29.7	+0.05	49.1	+0.17
6.6	+0.24	30.2	+0.09	52.5	+0.06
9.5	+0.42	34.6	+0.07	52.8	+0.19
für +0°3 =	+0ˢ285	für +24°4 =	+0ˢ184	für +47°3 =	+0ˢ109
m. F.	±0.045		±0.045		±0.045

Bei etwas besserer Luft waren die Antrittsfehler und die Schwankungen der persönlichen Gleichung selbst etwas geringer, als am vorhergehenden Tage, aber immer noch sehr beträchtlich, indem die Abweichungen von den drei Mitteln für den m. F. einer Differenz ± 0ˢ141 geben.

Die Abhängigkeit der persönlichen Gleichung von der Zenithdistanz zeigt sich in dieser Reihe noch besser und muss für unsere Beobachtungen am Gothaer Instrument als bewiesen angesehen werden. Sie ist für Zenithalsterne etwa 0ˢ14 kleiner gewesen, als für südliche Sterne.

Die Aenderung von Bruhns beim Uebergange von Leipzig nach Gotha kann ebenfalls nicht mehr bezweifelt werden, obwohl der Betrag derselben sich nicht sehr genau festsetzen lässt. Die Differenz zwischen den beiden Tagesresultaten

October 2.	B. — A. =	+ 0ˢ108	m. F. ± 0ˢ028
„ 3.		+ 0.193	± 0.026

ist nämlich wiederum so gross, dass sie nur durch eine beträchtliche reelle Aenderung der persönlichen Gleichung von einem Tage zum andern zu erklären ist.

In Leipzig war die persönliche Gleichung im Zenith dieselbe wie für südliche Sterne. Die Aenderung in Gotha wird man eher geneigt sein,

in der Auffassung der Antritte von Bruhns zu suchen, der an einem fremden Instrumente mit ungewohnten und ihm weniger bequemen Einrichtungen beobachtete, als bei Auwers, dessen Auffassungsart sich bei Vergleichung mit anderen Astronomen sehr constant gezeigt hat. In diesem Falle ist aber an diejenigen $(\alpha) - (\zeta)$ der Gruppe A., welche in der oben gegebenen Zusammenstellung mit einem Stern bezeichnet sind, die Correction -0^s14 anzubringen; die Auge- und Ohr-Beobachtungen geben dann für den Theil der Differenz $(\alpha) - (\zeta)$, welcher durch die Eigenthümlichkeiten der Instrumente oder Fehler in den angewandten Werthen ihrer Aufstellung zu erklären sein würde, nur noch das Mittel $+0^s032$, dessen Realität an sich gar nicht mehr zu verbürgen ist und nur durch seine Uebereinstimmung mit dem Mittel nach den Registrirbeobachtungen einigermaassen wahrscheinlich gemacht werden kann; das allgemeine Mittel würde $+0^s04$ mit dem m. F. $\pm 0^s03$.

Als Resultat dieser Betrachtung kann nur angenommen werden, dass eine jede auf einer bestimmten Interpretation der Differenz $(\alpha) - (\zeta)$ beruhende Behandlungsart der vorläufig erlangten Längenunterschiede sich so wenig sicher begründen lassen würde, dass man die Berücksichtigung dieser Differenz ganz aufgeben und die verschiedenen Werthe von $\Delta\lambda$ mit denjenigen Gewichten combiniren muss, welche sich aus den Beobachtungen selbst für die einzelnen Sterngruppen ableiten lassen.

Zu diesem Behuf sind zunächst die mittleren Werthe der reinen Beobachtungsfehler der Durchgänge aufgesucht worden.

Aus den Beobachtungen am Gothaer Instrument, bei 126maliger Vergrösserung und fast immer schlechter, öfters äusserst unruhiger Luft, ergaben sich die mittleren Fehler eines Antritts für die Auge- und Ohr-Methode:

aus	für Auwers			für Bruhns		
Aequat.-St.	$\pm 0^s114$	aus 42 Dchg.,	338 F.	$\pm 0^s197$	aus 35 Dchg.,	305 F.
Zenith-St.	0.147	„ 31 „	237 „	0.227	„ 28 „	251 „
Polst. I.	0.568	„ 18 „	235 „	0.828	„ 11 „	70 „
Polst. II	0.816	„ 2 „	12 „	1.401	„ 3 „	23 „
α Urs. min. O. C.	1.614	„ 20 „	294 „	1.639	„ 9 „	115 „
α Urs. min. U. C.	1.832	„ 5 „	96 „	2.034	„ 6 „	77 „

und für die Beobachtungen am Leipziger Instrument, bei 104maliger Vergrösserung und durchschnittlich guter Luft:

aus	für Bruhns			für Auwers		
Aequat.-St.	±0ˢ248 aus	29 Dchg.,	246 F.,	±0ˢ106 aus	39 Dchg.,	384 F.
Zenith-St.	0.231 „	23 „	201 „	0.130 „	30 „	303 „
Polst. I	0.803 „	12 „	133 „	0.528 „	12 „	135 „
Polst. II	1.085 „	2 „	22 „	0.759 „	4 „	45 „
α Urs. min. O. C.	—	—	—	1.946 „	6 „	61 „
α Urs. min. U. C.	2.319 „	7 „	73 „	1.752 „	10 „	124 „

Der mittlere Fehler eines Durchgangs ist hiernach:

	in Gotha		in Leipzig	
für Aequat.-St.	A. ±0ˢ0402	B. ±0ˢ0668	B ±0ˢ0853	A. ±0ˢ0337
„ Zenith-St.	0.0530	0.0757	0.0780	0.0410

und der m. F. einer Differenz

$A_g - B_l \pm 0^s0943$ resp. $\pm 0^s0943$

$B_g - A_l \pm 0.0748$ resp. ± 0.0861

oder im Mittel aus beiden Reihen

für Aequatorealsterne ± 0ˢ085

„ Zenithalsterne ± 0.090.

Für die Registrirmethode fand sich für die mittleren Fehler eines Antritts mit Einschluss der Fehler der Verzeichnung und Ablesung:

nach den Ablesungen vom Gothaer Streifen

	Gothaer Instr.					
für	Auwers			Bruhns		
Aeq.-St.	±0ˢ077	30 D.	699 F.	±0ˢ118	34 D.	810 F.,
Zen.-St.	0.141	19 „	414 „	0.174	22 „	496 „

	Leipziger Instr.					
für	Bruhns			Auwers		
Aeq.-St.	±0ˢ124	29 D.	666 F.	±0ˢ098	34 D.	775 F.
Zen.-St.	0.140	20 „	450 „	0.123	24 „	572 „ .

nach den Ablesungen vom Leipziger Streifen

	Gothaer Instr.					
für	Auwers			Bruhns		
Aeq.-St.	±0ˢ083	30 D.	701 F.	±0ˢ109	36 D.	842 F.,
Zen.-St.	0.143	19 „	414 „	0.157	24 „	555 „

April 16.

aus Nr. 10.	6ᵐ 43ˢ60	G. 1.86
11.	43.60	1.86
Tagesmittel	6ᵐ 43ˢ600	(3.72)
Corr. f. Uhrg.	— 0.003	

	April 17.		April 19.	
aus Nr. 10.	6ᵐ —	G. —	6ᵐ 43ˢ60	G. 1.86
11.	43ˢ41	1.86	43.51	1.86
12.	43.48	1.00	43.52	1.00
13.	43.57	1.67	43.50	1.86
14.	43.52	1.00	—	—
15.	43.74	1.86	43.42	1.86
16.	43.65	1.86	43.70	1.86
17.	43.60	1.00	43.44	1.00
18.	43.63	1.86	43.55	1.86
19.	43.61	1.00	—	—
20.	43.52	1.00	43.45	1.00
21.	43.54	1.86	43.47	1.86
22.	43.60	1.86	43.56	1.86
23.	43.59	1.00	43.58	1.00
24.	43.68	1.00	43.62	1.00
25.	43.57	1.86	43.44	1.86
26.	43.40	1.86	43.34	1.86
27.	43.59	1.00	43.32	1.00
Tagesmittel	6ᵐ 43ˢ570	(24.55)	6ᵐ 43ˢ504	(24.60)
Corr. f. Uhrg.	+ 0.003		0.000	

	April 20.		April 21.	
aus Nr. 10.	6ᵐ 43ˢ41	G. 1.86	6ᵐ 43ˢ37	G. 1.86
11.	43.40	1.86	43.37	1.86
12.	43.57	1.00	43.34	1.00
13.	43.47	1.86	43.36	1.86
14.	43.44	1.00	43.48	1.00
15.	43.37	1.86	43.65	1.86
16.	43.41	1.86	43.73	1.86
17.	43.45	1.00	43.66	1.00
18.	43.47	1.86	43.72	1.86
19.	43.47	1.00	43.63	1.00
Tagesmittel	6ᵐ 43ˢ438	(15.16)	6ᵐ 43ˢ532	(15.16)
Corr. f. Uhrg.	— 0.001		— 0.001	

Im Mittel gibt die

Reihe I.	$\Delta\lambda =$ 6ᵐ 43ˢ310 + B′ — A′	Gew. 71.53
Reihe II.	6 43.521 + A′ — B′	Gew. 83.19
Mittel	$\Delta\lambda =$ 6ᵐ 43ˢ416	

Addirt man zu den fünf Tagesmitteln der Reihe I. 0ˢ106 und subtrahirt von den andern 0ˢ105, so erhält man die Werthe

April 4.	$\Delta\lambda = 6^m\ 43^s498$	Abw. + 0ˢ082
8.	43.348	− 0.068
10.	43.237	− 0.179
11.	43.432	+ 0.016
16.	43.492	+ 0.076
17.	43.468	+ 0.052
19.	43.399	− 0.017
20.	43.332	− 0.084
21.	43.426	+ 0.010
24.	43.534	+ 0.118

Die Abweichungen sind wieder viel grösser, als bei einem m. F. von ± 0ˢ03 zu erwarten gewesen wäre, zu welchem vielmehr noch eine mittlere Tagesunsicherheit von ± 0ˢ083 hinzutritt. Erklärt man dieselbe wiederum durch die Veränderlichkeit der persönlichen Gleichung, so ist es auffallend, dass diese sich für die Registrirbeobachtungen grösser ergibt, als für die Beobachtungen nach dem Gehör; indess kann man hierfür den Erklärungsgrund angeben, dass sich in Gotha jeden Abend die Luft rasch verschlechterte und deshalb bei den Registrirbeobachtungen im Durchschnitt erheblich unruhiger gewesen ist, als bei den anderen.

Der m. F. eines Tagesresultats der Registrirbeobachtungen mit dem vorläufigen Gewicht g ist also

$$= \sqrt{0^s083^2 + \frac{0^s120^2}{g}}$$

zu setzen, wofür jedoch wieder April 17 und 19

$$\sqrt{\frac{0^s083^2}{1.5} + \frac{0^s120^2}{g}}$$

genommen ist. Man erhält damit

Reihe I.

April 4.	$\Delta\lambda = 6^m\ 43^s392$	m. F. ± 0ˢ089	Verb. Gew. 1.27
8.	43.242	0.089	1.28
10.	43.131	0.090	1.24
11.	43.326	0.089	1.26
24.	43.428	0.089	1.28
Mittel I.	$6^m\ 43^s305$	± 0ˢ040	6.33

Reihe II.

April 16.	$\Delta\lambda = 6^m\ 43^s597$	m. F. ± 0ˢ104	Verb. Gew. 0.92
17.	43.573	0.072	1.93
19.	43.504	0.072	1.93
20.	43.437	0.089	1.28
21.	43.531	0.089	1.28
Mittel II.	$6^m\ 43^s526$	± 0ˢ037	7.34

überwiegend grössten Theile in der Variabilität der persönlichen Gleichung ihren Grund hat, während die angewandten Werthe der Instrumentalcorrectionen als durchaus den Beobachtungen entsprechend anzusehen sein würden. Die mittlere Abweichung der persönlichen Gleichung von ihrem Tageswerthe ist nämlich für einen einzelnen nach dem Gehör beobachteten Stern am 2. October = ± 0ˢ.124 und am 3. October = ± 0ˢ.104 gewesen (wie man findet, wenn man von den oben für diese Tage angeführten m. F. die reinen Antrittsfehler abzieht), und zwar bei einem Luftzustande, welcher ungefähr eben so ungünstig war, wie bei der Längenbestimmung durchschnittlich. Bei guter Luft haben wir dagegen für dieselbe Methode unsere Gleichung (Leipzig, April 12) völlig constant gefunden, indem die Differenzen zwischen den Werthen aus den einzelnen Sternen genau so gross waren, wie die mittleren Antrittsfehler erwarten liessen. Es ist daher wohl gestattet, auch für die Registrirmethode die Vergrösserung des Beobachtungsfehlers durch eine Variabilität der persönlichen Gleichung in Folge der ungünstigen Luftzustände zu erklären, obwohl für diese Methode der directe Nachweis derselben fehlt. Bei der einzigen Bestimmung unserer persönlichen Gleichung beim Registriren, welche wir auszuführen Gelegenheit hatten (in Leipzig 1866 Januar 2), wurde dieselbe zwar völlig constant gefunden, aber wahrscheinlich nur deshalb, weil die Luft bei diesen Beobachtungen, wie bei der ersten Bestimmung nach der andern Methode, ruhig war. Es fand sich aus 16 Sternen der Werth B. — A. = + 0ˢ.108 mit dem m. F. ± 0ˢ.012, dass indess auch für diese Methode Tagesresultate beträchtlich variiren können, zeigt die Abweichung dieses Werthes von dem kurz zuvor zwar indirect (durch Vergleichungen mit Dr. Engelmann) aber anscheinend ebenfalls sicher erhaltenen Resultat B. — A. = + 0ˢ.123 (m. F. ± 0ˢ.025) — 0ˢ.105 (m. F. ± 0ˢ.011) = + 0ˢ.018. —

Aus den Werthen der m. F. einer reducirten Längendifferenz ± 0ˢ.144 und ± 0ˢ.136 für Auge- und Ohr-Beobachtungen von Zenith- resp. Aequatorsternen folgt, dass zur Bildung der definitiven Tagesmittel nach den Beobachtungen dieser Art die beiden Gruppen mit Berücksichtigung des Gewichtsverhältnisses 1 : 1.11 zu vereinigen sind. Die von Verschiedenheiten in der Anzahl der beobachteten Antritte herrührenden Schwankungen um diese Mittelwerthe sind ganz geringfügig und daher vernachlässigt worden.

Da die Epochen der Coincidenzen von dem Mittel der Durchgangszeiten der Registrirsterne in der Regel erheblich (im Mittel 1^h2) verschieden gewesen sind, so wird man diesen Unterschied wohl durch eine kleine Abweichung des nächtlichen relativen Uhrgangs von dem bei den Zeitübertragungen angewandten mittlern 24stündigen Gange zu erklären haben, und zwar müsste sich der Unterschied der beiderseitigen Uhrzeiten, da die Coincidenzen, ausser April 13, 16 und 19 II, nach den Sternbeobachtungen registrirt sind, während der Dauer der Beobachtungen langsamer verringert haben, als angenommen worden ist. Trennt man die Beobachtungen eines jeden Abends der Zeit nach in mehrere Gruppen, so gibt in der That jedes Mal die von den Coincidenzen entferntere Gruppe die Längendifferenz fehlerhafter als die nähere, und zwar ist der Unterschied in den Fehlern im Mittel = 0^s007 bei einem Unterschied der Mittelzeiten von 0^h88. — Wahrscheinlich hat die Gothaer Uhr ihren Gang am Abend etwas beschleunigt; von diesem Umstand würde auch ein kleiner Einfluss auf die Bestimmung der Längendifferenz aus den Auge- und Ohr-Beobachtungen vorauszusetzen sein, da die mit denselben verbundenen Coincidenzen in der Regel ebenfalls einer späteren Epoche angehören. Indess ist der Unterschied der Epochen im Mittel nur der dritte Theil desjenigen, welcher für die Registrirbeobachtungen stattgehabt hat, ein etwaiger davon herrührender Fehler also jedenfalls äusserst klein. —

Die beiden Werthe für die Längendifferenz

A. $6^m\ 43^s447$ mit dem m. F. ± 0^s0544, und

B. 6 43.416 mit dem m. F. ± 0.0271

geben als wahrscheinlichsten Endwerth

$6^m\ 43^s422$ mit dem m. F. ± 0^s0243

für die Längendifferenz zwischen dem Leipziger Passageninstrument und dem Gothaer Meridiankreis. Das Centrum des Hauptpfeilers ist in Leipzig 10.4 Meter östlich vom Passageninstrument, in Gotha 7.9 Meter westlich vom Meridiankreis. Die Differenz zwischen den Hauptpfeilern der beiden Sternwarten ist demnach im Parallel 18.3 Meter oder 0^s063 grösser, also

$6^m\ 43^s485$ mit dem m. F. ± **0^s0243** oder dem w. F. ±**0^s0164**.

Fig. 3.

Fig. 6.



ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

SIEBENTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES BERGKRYSTALLES.

VON

W. G. HANKEL

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des VIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° III.

MIT ZWEI TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1866.

Vom Verfasser übergeben den 18. Juni 1866.
Der Abdruck vollendet den 11. August 1866.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

W. G. HANKEL.

SIEBENTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES BERGKRYSTALLES.

Unter den von Brewster in seinen »Bemerkungen über die Thermoelektricität der Mineralien«*) als thermoelektrisch aufgeführten Krystallen findet sich auch der Amethyst und der Quarz aus dem Dauphiné, unter welchem letzteren jedenfalls diejenige Varietät dieses Minerals zu verstehen ist, welche gewöhnlich mit dem Namen des Bergkrystalles bezeichnet wird. Indess macht Brewster durchaus keine weiteren Mittheilungen weder über die Lage und Anzahl der Pole, noch über die Stärke der erregten Elektricität, noch auch über die Temperaturerhöhung, bei welcher dieselbe auftritt; es würde das von ihm angewandte Verfahren (Anziehung einer auf einer Spitze leicht beweglichen messingenen Nadel oder sehr dünner Stückchen der innern Membran von Arundo Phragmites) dazu auch nicht ausreichend gewesen sein.

Bei meinen mit Unterbrechungen von 1834 bis 1839 über die Thermoelektricität der Krystalle ausgeführten Untersuchungen**) hatte ich mir nicht sowohl die Auffindung neuer thermoelektrischer Krystalle als vielmehr die Ermittelung der besonderen Vertheilung der Elektricität an den bereits bekannten elektrischen Krystallen und ihres Zusammenhanges mit der Form derselben zur Aufgabe gestellt, und es gelang mir damals, nicht nur die Angabe Brewster's über die durch Erwärmung am Bergkrystall hervortretende Elektricität im Allgemeinen als richtig zu erkennen, sondern auch speciell die Anzahl und Lage der

---

*) The Edinb. Journal of Science, conducted by David Brewster 1824, Heft 2; übersetzt im Jahrbuch der Chemie und Physik von Schweigger, 1825, Bd. 43, S. 87 ff.

**) De thermoelectricitate crystallorum, Halae 1839; Quaestionis de thermoelectricitate pars altera, Halae 1840. Pogg. Annal. Bd. 49, S. 493 ff.; Bd. 50, S. 237 ff., S. 47 ff., S. 605 ff.

Pole bei einer grössern Zahl mir zur Verfügung stehender Bergkrystalle festzustellen.*)

Es kann daher nur ein unglücklicher Zufall gewesen sein, wenn bei der einige Jahre später von Riess und G. Rose ausgeführten Prüfung des Bergkrystalles**) fünf einige Zoll lange ziemlich dicke Exemplare nach der stärksten Erhitzung keine Elektricität zeigten, wenn auch ein kleiner ungefähr 6 Linien langer und 2 Linien dicker Krystall unelektrisch blieb und nur bei einem diesem letzteren gleichen kleinen Krystalle auf einer Fläche der sechsseitigen Zuspitzung beim Abkühlen negative, auf einer Fläche des sechsseitigen Prismas aber positive Elektricität gefunden wurde. Obwohl, wie ich später zeigen werde, die Elektricität des Bergkrystalles bei höheren Temperaturen verschwindet, so ist es doch nicht wahrscheinlich, dass bei den Versuchen von Riess und G. Rose das Ausbleiben der elektrischen Anzeichen in einer für diese Erregung zu hohen Temperatur seinen Grund gehabt hat, sondern vielmehr in dem Umstande, dass es, wie gleichfalls die nachfolgenden Versuche lehren werden, in der That Krystalle gibt, die nur sehr schwach thermoelektrisch werden,***) und dass namentlich die fünf grossen von Riess und G. Rose geprüften Krystalle gerade dieser Klasse angehört haben.

Bei der Wichtigkeit, welche wegen ihres Zusammenhanges mit der Krystallform und der Wärmebewegung der Thermoelektricität beizulegen ist, habe ich, wie dies auch meine im Jahre 1857 veröffentlichten Untersuchungen über die thermoelektrischen Eigenschaften des Boracits†) darthun, so wie Zeit und vorhandenes geeignetes Material an Krystallen es gestatteten, dem Studium dieser Vorgänge meine Aufmerksamkeit zugewandt; aus diesen Untersuchungen theile ich in der vorliegenden Abhandlung die auf die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles bezüglichen Beobachtungen und Resultate mit, weil es mir gelungen ist, die elektrische Vertheilung an demselben vollständig

---

*) Ich führe die von mir damals gefundenen und jetzt wieder bestätigten Resultate an dieser Stelle nicht an, weil ich sie später etwas ausführlicher mittheilen muss.

**) Ueber die Pyroelektricität der Mineralien von Riess und G. Rose, Abhandlungen der Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1843; physik. Abth. S. 96.

***) s. das Ende des VIII. Abschnittes.

†) Bd. VI dieser Abhandlungen S. 149 ff.

zu ermitteln, und weil gerade die Krystalle dieses Minerals noch ausserdem ein ganz besonderes anderweitiges Interesse darbieten. Bereits im Jahre 1841 *) habe ich nämlich zuerst auf den durch die Krystallform vermittelten Zusammenhang zwischen Thermoelektricität und circularer Polarisation hingewiesen; nun ist (abgesehen vom chlorsauren Natron und von den ihm isomorphen Verbindungen, sowie vom schwefelsauren Strychnin und dem Zinnober, von denen ich mir noch keine zur thermoelektrischen Prüfung geeigneten Krystalle habe verschaffen können, und abgesehen vom Boracit, dessen optisches Verhalten noch nicht gehörig festgestellt werden konnte) der Bergkrystall die einzige bis jetzt bekannte thermoelektrische Substanz, welche im festen Zustande die circulare Polarisation zeigt; ein Umstand, der wesentlich zur Erhöhung unseres Interesses an der Kenntniss seines thermoelektrischen Verhaltens beitragen muss.

Bevor ich indess auf meine Untersuchungen sowohl rücksichtlich des Verfahrens, als auch der erlangten Resultate eingehe, halte ich es mit Rücksicht auf das Verständniss des Folgenden für zweckmässig, eine allgemeine Darstellung der bisherigen Ansichten und Untersuchungen über die Krystallisations- und Structurverhältnisse, sowie über die Beschaffenheit der Begrenzungsflächen des Bergkrystalles vorauszusenden.

I. Krystallisations- und Structurverhältnisse des Bergkrystalles.**)

1. Krystallsystem.

Die Ansichten der Mineralogen über das Krystallsystem des Quarzes sind seit Hauy sehr verschieden gewesen und auch bis jetzt

*) Ueber Thermoelektricität und Krystallgestalt des neutralen weinsauren Kalis u. s. w. Pogg. Annal. Bd. 53. S. 620 ff.

**) Die ältere Literatur über die Krystallisation des Quarzes ist von G. Rose in seiner Abhandlung »über das Krystallsystem des Quarzes« (Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1844 S. 218 u. 219) zusammengestellt worden. Hinzuzufügen ist diesen Angaben ausser der ebengenannten wichtigen Abhandlung von G. Rose das sehr umfassende Mémoire sur la crystallisation et la structure intérieure du quartz von Descloizeaux (Annal. de Chim. et de Phys. 3. Sér. 1855 Bd. 45. S. 129 ff.), so wie Bemerkungen von Websky (Pogg. Annal. 99, S. 296), Girard (Abh. der naturf. Ges. zu Halle 1858 Bd. 4), Hessenberg (Abh. der

ist in dieser Beziehung noch keine Uebereinstimmung erzielt worden.*)

Die gewöhnliche Krystallform des Bergkrystalles ist ein reguläres sechsseitiges Prisma mit sechsflächiger Zuspitzung an den Enden. Indess zeigen sich in der Ausdehnung der Flächen, welche diese Zuspitzungen bilden, grosse Ungleichmässigkeiten; namentlich erscheinen an dem einen meist allein ausgebildeten Ende diese Flächen abwechselnd grösser und kleiner, so dass es nahe liegt, die sechsflächige Zuspitzung nicht als die gewöhnliche holoedrische hexagonale Pyramide zu betrachten, sondern vielmehr diese Pyramide in ihre beiden hemiedrischen Hälften, d. h. in zwei ihrer Stellung nach um 60° oder 180° gegen einander verdrehte Rhomboeder von gleichen Winkeln, deren Flächen eine verschiedene Ausdehnung erhalten haben, zerlegt zu denken. Dieses Vorherrschen dreier Flächen, sowie auch weitere Eigenthümlichkeiten im Auftreten anderer gegen die Hauptaxe geneigter Flächen bewogen Hauy in der That auch, als Grundform für den Quarz das Rhomboeder anzunehmen; dagegen vermochte er keine Merkmale aufzustellen, um die zuvor genannten beiden Rhomboeder von einander zu unterscheiden.

Der eben erwähnte Mangel, sowie die Willkür welche zum Theil infolge davon in der Hauy'schen Darstellung der Krystallformen des Quarzes hervortrat, bestimmte, wie G. Rose angibt, Weiss, als Grundform dieses Minerals die hexagonale Pyramide zu wählen, dabei aber auch die Neigung des Quarzes, ins Rhomboedrische überzugehen, anzuerkennen.

Dagegen hielt sich Naumann, gestützt auf das Auftreten der trigonalen Trapezoeder und Pyramiden bereits im Jahre 1829 für be-

---

Senckenbergischen Ges. 1. Bd.), Sella (Denkschriften der Turiner Akad. 17. Bd.), die krystallographische Entwickelung des Quarzsystemes von E. Weiss (Abh. der naturf. Ges. zu Halle 5. Bd. S. 51), und Leydolt, über eine neue Methode die Structur und Zusammensetzung der Krystalle zu erkennen u. s. w. (Sitzungsberichte der Akad. der Wiss. in Wien; math.-naturw. Klasse 1854. Bd. 15. S. 59).

*) Ich berichte in diesem Abschnitte, wie bereits zuvor angedeutet, nur über die bisher ausgesprochenen Ansichten über die Krystallisationsverhältnisse des Bergkrystalles; in welcher Weise dieselben gerade auf Grund meiner Untersuchungen über die Thermoelektricität zu deuten sind, vermag ich erst am Schlusse dieser Abhandlung anzugeben.

rechtigt, den Bergkrystall als tetartoedrisch zu betrachten;*) eine Auffassung, welche er, wie er in der neuesten Auflage seiner Mineralogie hervorhebt, durch die in der vorstehenden Anmerkung angeführten Arbeiten von G. Rose und Descloizeaux bestätigt sieht.**)

Die beim Bergkrystall auftretende Tetartoedrie würde die von Naumann sogenannte trigonotype oder trapezoedrische sein, bei welcher in den aufeinanderfolgenden Gliedern (zweien oberen und zweien unteren über demselben Sextanten gelegenen Flächen) der zwölfseitigen Pyramide abwechselnd eine obere und eine untere, aber in Bezug auf Rechts und Links entgegengesetzt gelegene Fläche ausgebildet ist.

2. Krystallgestalten.

Wie oben erwähnt, wird die gewöhnliche Krystallform des Bergkrystalles von einem sechsseitigen Prisma mit sechsflächiger Zuspitzung an beiden Enden gebildet. G. Rose hat die beiden Rhomboeder (oder rhomboederähnlichen Gestalten), von welchen diese Zuspitzungen herrühren, als Haupt- und Gegenrhomboeder unterschieden, dergestalt, dass im Allgemeinen die Gruppe der grössern Flächen dem Haupt-, die Gruppe der kleineren Flächen dem Gegenrhomboeder angehören. Diese Bezeichnung ist, wie sich später zeigen wird, mit dem elektrischen Verhalten des Bergkrystalles sehr wohl im Einklange, und soll daher im Folgenden beibehalten werden.

Ausser den beiden Grundrhomboedern finden sich noch spitzere und stumpfere Rhomboeder (Nebenrhomboeder) und zwar sowohl von der Stellung des Haupt- als auch von der Stellung des Gegenrhomboeders; im Anschluss an die Bezeichnung von Rose sollen die ersteren

---

*) Naumann, Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie Bd. I. S. 509 und Bd. II. S. 316.

**) Descloizeaux selbst zieht aus seinen Untersuchungen die Folgerung, dass die Grundform des Quarzes ein Rhomboeder sei. Er sagt Seite 208 seiner Abhandlung: »J'ai signalé les différences physiques très-reconnaissables, qui existent entre la plupart des rhomboèdres directs et inverses, et entre les plagièdres des zones $e^{\frac{1}{2}}\, s\, e^{2}$ ou $p\, s\, e^{2}$; ces différences, en s'ajoutant à plusieurs autres raisons, me paraissent devoir être considérées comme un argument à peu près sans réplique en faveur de l'opinion anciennement émise par Hauy, à savoir, qu'on devrait regarder le rhomboèdre comme étant le type crystallin du quartz et celui de sa molécule.

Nebenrhomboeder erster, die letzteren dagegen Nebenrhomboeder zweiter Ordnung genannt werden.

Ausser den Flächen des sechsseitigen Prismas und der Rhomboeder erscheinen häufig noch Abstumpfungen der Seitenecken oben und unten an den abwechselnden Kanten des Prismas; dieselben gehören einer trigonalen Pyramide an, und können an den einen oder andern drei abwechselnden Kanten auftreten. Diese Flächen besitzen gewöhnlich die Form eines Rhombus, und sind daher unter dem Namen der Rhombenflächen bekannt. Stellen wir einen Bergkrystall vor uns hin, mit seiner Hauptaxe aufrecht und eine Prismenfläche, welche oben eine Fläche des Hauptrhomboeders trägt, auf uns zugewendet, so soll die trigonale Pyramide eine rechte heissen, wenn die rhombische Fläche auf der bezeichneten Prismenfläche oben (also unterhalb der Hauptrhomboederfläche) rechts, dagegen eine linke, wenn die Rhombenfläche oben links liegt.

Ferner erfahren die Combinationskanten der Rhombenflächen mit den Prismenflächen öfter Abstumpfungen, die von trigonalen Trapezoedern, den viertelflächigen Gestalten der holoedrischen zwölfseitigen Pyramide, herrühren. Die vier, theils nach der Stellung theils nach der Form verschiedenen trigonalen Trapezoeder, welche sich aus einer zwölfseitigen Pyramide bilden lassen, können wir mit G. Rose als Trapezoeder erster oder zweiter Ordnung unterscheiden, je nachdem ihre Flächen unterhalb der Flächen des Haupt- oder des Gegenrhomboeders liegen. Die rechten und linken Gestalten in jeder Ordnung bestimmen sich darnach, ob ihre Flächen am obern Ende des Krystalles auf der dem Beschauer zugewandten Prismenfläche rechts oder links liegen.

In seltenen Fällen zeigen endlich die abwechselnden Seitenkanten des Prismas Abstumpfungen oder Zuschärfungen, welche von trigonalen oder ditrigonalen Prismen herrühren.

Ob die von Descloizeaux bei zwei Krystallen an dem einen Ende beobachtete matte Fläche senkrecht gegen die Hauptaxe eine wahre Krystallfläche ist, dürfte sich noch nicht mit Bestimmtheit entscheiden lassen.

3. Durchgänge.

Die beim Quarz überhaupt nur sehr unvollständige Spaltbarkeit wurde von Hauy gleich deutlich parallel den Flächen beider Rhom-

Rose zwischen den Flächen der beiden Rhomboeder in Bezug auf Glanz und Glätte entweder kein bemerklicher Unterschied vorhanden, oder wenn ein solcher nur bezüglich des Glanzes eintritt, sind die Flächen des Hauptrhomboeders »stets mehr oder weniger glänzend« als die des Gegenrhomboeders, die dann öfter ganz matt erscheinen. Tritt ein Unterschied in Bezug auf Glanz und Glätte ein, so sind gewöhnlich die Flächen des Hauptrhomboeders warzig, die des Gegenrhomboeders glatt und dabei häufig matt; zuweilen sind auch die Flächen des letzteren Rhomboeders, wenn auch nur unbedeutend warzig und die des ersteren glatt, und in diesem Falle erscheinen auch die Flächen des Gegenrhomboeders glänzend, wenn gleich weniger als die des Hauptrhomboeders. Bei den Zwillingskrystallen des genannten Fundortes zeigt sich ebenfalls häufig ein Unterschied in Glanz und Glätte zwischen den Rhomboederflächen. Tritt ein solcher Unterschied gleichzeitig an den Rhomboeder- und Prismenflächen hervor, so ist dann ebenso wie bei den Järischauer Krystallen stets nur dasjenige Ende ausgebildet, an welchem die glänzenderen Rhomboederflächen auf den glänzenderen Prismenflächen, und die matten Rhomboederflächen auf den matten Prismenflächen aufgesetzt sind. Zuweilen findet ein Unterschied im Glanze der Rhomboederflächen nicht statt, und in diesem Falle reflectiren öfter die Flächen des Hauptrhomboeders ein, wenn auch nur schwaches, doch deutliches rothes, die Flächen des Gegenrhomboeders aber ein grünes Licht.*)

b. Flächen der übrigen Rhomboeder (Nebenrhomboeder) erster und zweiter Ordnung.

Bis jetzt sind beim Bergkrystalle über 30 Rhomboeder der ersten und ebenso viele der zweiten Ordnung mit mehr oder weniger Sicherheit beobachtet worden. Ueber die Hälfte derselben kommen in beiden Ordnungen vor, d. h. zu jedem der betreffenden Rhomboeder der ersten Ordnung existirt das Gegenrhomboeder.

Auf den Flächen dieser Nebenrhomboeder spricht sich der Unterschied ihrer Stellung durch Glanz und Streifung im Allgemeinen viel

*) Auf den Faröern kommen Krystalle mit nur einem Rhomboeder vor, die, obwohl sie matt sind, Rose doch als Flächen des Hauptrhomboeders betrachtet, da das alleinige Vorkommen des Gegenrhomboeders noch nicht beobachtet ist.

bestimmter aus, als auf den Flächen der Grundrhomboeder (d. h. des Haupt- und Gegenrhomboeders). Die Flächen der Rhomboeder erster Ordnung sind gewöhnlich glänzend, wenn auch öfter abgerundet (arrondies Descloiz.); indess finden sich einzelne auch gestreift, jedoch im Allgemeinen immer schwächer als die benachbarten Flächen der Rhomboeder zweiter Ordnung, die nach G. Rose stets auch mehr oder weniger matt erscheinen.

3. Flächen der trigonalen Pyramide.

Die Flächen der trigonalen Pyramide (die sogenannten Rhombenflächen) sind nach G. Rose stets glänzend und zuweilen wohl glatt, gewöhnlich aber doch parallel den Kanten mit dem Hauptrhomboeder gestreift.

4. Flächen der trigonalen Trapezoeder.

Ueber die Beschaffenheit der Flächen der trigonalen Trapezoeder macht G. Rose folgende Angaben: Von den Flächen der unteren Trapezoeder erster Ordnung sind die Flächen von $6\,P\,\frac{6}{5}$ stets glatt und glänzend, die Flächen von $4\,P\,\frac{4}{3}$ häufig matt, und die Flächen von $5\,P\,\frac{5}{4}$ in den wenigen Fällen, wo sie vorgekommen sind, glänzend und glatt. Die Flächen des oberen Trapezoeders $\frac{5}{3}\,P\,\frac{5}{2}$ sind ebenfalls glänzend, doch gestreift parallel den Kanten mit den Rhombenflächen. Die Flächen der Trapezoeder zweiter Ordnung sind stets in demselben Sinne gestreift, wie die Rhomben- und oberen Trapezflächen, also parallel der Kantenzone, worin sie sämmtlich liegen. Sie sind dabei meistens noch mehr oder weniger glänzend, öfters aber ganz matt.

In gleicher Weise spricht sich Descloizeaux*) über die Beschaffenheit der Flächen der unteren Trapezoeder zweiter Ordnung dahin aus, dass diese Flächen, die also zwischen den Rhombenflächen und denjenigen Prismenflächen liegen, auf welchen die Flächen des Gegenrhomboeders aufgesetzt sind) stets mehr oder weniger stark parallel

*) S. 192 seiner Abhandlung setzt Descloizeaux hinzu: Ce caractère est si constant, qu'il empèche toute confusion entre les faces de la zone $p\ s\ e^2$ (untere Trapezoeder zweiter Ordnung) et celles de la zone $e^{\frac{1}{2}}\ s\ e^2$ (untere Trapezoeder erster Ordnung), et que dans certains enchevêtrements douteux on peut l'employer pour fixer la position relative des faces p (Haupt-) et $e^{\frac{1}{2}}$ (Gegenrhomboeder).

ihrer Zonenaxe gestreift sind. Dasselbe Aussehen zeigen nach ihm die Flächen einiger oberen Trapezoeder erster Ordnung aus derselben Zone (die also über den Rhombenflächen nach den Flächen des Hauptrhomboeders hin liegen), während die Flächen der anderen Trapezoeder dieser Kategorie mehr oder weniger abgerundete Flächen darbieten.

B. Grösse der Flächen.

1. Rhomboederflächen.

Bereits in der Mittheilung meiner ersten Versuche über das thermoelektrische Verhalten der Bergkrystalle*) habe ich auf einen fast stets vorhandenen Unterschied in der Ausbildung der beiden Enden dieser Krystalle hingewiesen, und bei aufrechter Stellung derselben die beiden Enden als obere und untere unterschieden. Es wird sich nachher zeigen, dass in den meisten Fällen sich beide Enden ohne Schwierigkeit unterscheiden lassen.**)

Sind die Krystalle mit dem einen Ende angewachsen, so soll das freie Ende mit dem Namen des oberen belegt werden.

Es dürfte wohl kaum ein Bergkrystall existiren, bei welchem am oberen Ende die sechs Flächen der Zuspitzung genau gleiche Ausdehnung besitzen. Sehr häufig wechseln, wie bereits oben S. 326 erwähnt, drei grosse Flächen mit drei kleineren ab; erstere sind die Flächen des Haupt-, letztere die Flächen des Gegenrhomboeders. Oefter kommt es auch vor, dass eine der Flächen des Hauptrhomboeders zurückbleibt, oder dass, wie dies namentlich bei den Dauphinéer Krystallen sehr gewöhnlich ist, eine Fläche des Hauptrhomboeders alle übrigen in ihrer Ausdehnung überwiegt. Bei manchen Krystallen erlangen andererseits eine oder zwei Flächen des Gegenrhomboeders nahe dieselbe Grösse wie die Flächen des Hauptrhomboeders.***)

---

*) Pogg. Annal. Bd. 50. S. 606.

**) Wo die beiden Enden nicht unterscheidbar sind, hat ihre Unterscheidung, wie sich später zeigen wird, auch in elektrischer Beziehung keine Bedeutung; man kann in diesen Fällen den Krystall beliebig stellen, d. h. die beiden Enden seiner Hauptaxe verwechseln.

***) Wie es sich mit der von Hauy aufgestellten variété hyperoxide, wo die Flächen des Hauptrhomboeders kleiner gezeichnet sind, als die des Gegenrhomboeders, ver-

Ist der Krystall am unteren Ende gleichfalls ausgebildet, so zeigt dieses Ende auch wohl eine Abwechselung von grossen und kleinen Flächen, doch meistens nicht ganz so regelmässig wie das obere Ende, namentlich bleibt häufig eine der Flächen des Hauptrhomboeders in ihrer Entwickelung etwas zurück, während dafür eine der Flächen des Gegenrhomboeders mehr hervortritt. Bei ihrer Ausdehnung kommt nun die vergrösserte Fläche des Gegenrhomboeders mit der an demselben Ende gegenüberliegenden Fläche des Hauptrhomboeders in einer kurzen horizontalen Kante zum Durchschnitt, während das obere Ende gewöhnlich eine vollkommene dreiflächige Zuspitzung zeigt. Wachsen am unteren Ende die beiden eben bezeichneten Flächen (eine Fläche des Haupt- und die gegenüberliegende Fläche des Gegenrhomboeders) noch weiter, während die übrigen Flächen dieses Endes zurücktreten, so entsteht die sehr gewöhnliche Bildung einer längeren Kante oder Schneide, an deren beiden seitlichen Endpunkten die vier kleinen Flächen paarweise liegen. Bei dieser Gestalt trägt dann eine Prismenfläche oben und unten eine grosse Rhomboederfläche, oben dem Haupt-, unten dem Gegenrhomboeder angehörig.

Indess ist die Bildung einer solchen Schneide nicht blos auf das untere Ende beschränkt; sie kommt bei aufgewachsenen Krystallen auch bisweilen an dem freien, dem sogenannten oberen Ende, und bei vollständig ausgebildeten Krystallen an beiden Enden vor.

Die schneidenförmige Gestalt des unteren Endes ist häufig, namentlich bei grösserer Länge der Hauptaxe, mit einer mehr oder minder beträchtlichen Verdickung dieses Endes verbunden.

Bei manchen Krystallen, wo das obere Ende eine sehr grosse Fläche des Hauptrhomboeders trägt, ahmt das untere Ende diese Gestalt, wenn auch in weniger vollkommener Weise nach, indem hier ebenfalls eine Fläche des Hauptrhomboeders vorwiegt. In diesem Falle ist an den mir vorliegenden Exemplaren das untere Ende etwas dicker als das obere; der Krystall erscheint gewissermassen auf jenes Ende gestaucht.

---

hält, vermag ich wegen Mangel an Material nicht zu entscheiden. Descloizeaux nennt S. 144 seiner Abhandlung das Vorwalten der Flächen des Hauptrhomboeders über die Flächen des Gegenrhomboeders un caractère, qui ne s'observe pas non plus dans toutes les localités oder S. 146 qui est loin d'être général.

Nicht selten findet sich auch am unteren Ende die Spitze oder Schneide infolge mangelhafter Ausbildung in zwei oder mehrere aufgelöst.*) Ueberhaupt zeigt das untere Ende im Allgemeinen eine unvollkommenere Ausbildung, die sich bei aufgewachsenen Krystallen darin ausspricht, dass die am oberen Ende klare Masse nach unten hin trübe und undurchsichtig zu werden beginnt.

Endlich sei hier noch der Form gedacht, wo das untere Ende ebenso wie das obere abwechselnd drei grosse und drei kleine Rhomboederflächen zeigt, jedoch nicht in der zuvor angegebenen Weise, sondern dergestalt angeordnet, dass drei abwechselnde Prismenflächen oben und unten grosse, die drei anderen aber an beiden Enden kleine Rhomboederflächen tragen; eine Form, die von G. Rose wohl mit Recht als eine Zwillingsgestalt (durch Drehung der unteren Hälfte des Krystalles um 60° oder 180°) gedeutet wird.

2. Prismenflächen.

Gibt es auch Bergkrystalle, bei denen die sechs Prismenflächen nahe dieselbe Breite besitzen, so ist doch bei den meisten in der Breite dieser Flächen ein mehr oder minder grosser Unterschied.

Während in dem Falle, wo die Prismenflächen abwechselnd an beiden Enden grosse oder kleine Rhomboederflächen tragen, die Prismenflächen gewöhnlich abwechselnd breit und schmal sind, dergestalt, dass auf die breiten Prismenflächen die grossen, auf die schmalen Prismenflächen dagegen die kleinen Rhomboederflächen aufgesetzt sind: erscheinen bei den Krystallen, welche am unteren Ende eine längere Schneide darbieten, diejenigen beiden Prismenflächen, zu welchen die in der Schneide zusammenstossenden grossen Rhomboederflächen gehören, als die breitesten, so dass infolge dessen die Querdimension des Krystalles in der Richtung senkrecht auf jene Prismenflächen als die kleinste sich darstellt.

*) Ich glaube nicht, dass man berechtigt ist, sämmtliche Krystalle mit solchen Bildungen als Zwillinge oder mehrfach zusammengesetzte Krystalle zu betrachten. Denken wir uns die einzelnen Spitzen sehr klein und in einer auf der Hauptaxe senkrechten Ebene endigend, so würde die matte oben (S. 328) erwähnte geradangesetzte Endfläche entstehen.

III. Unterschied zwischen den beiden Enden der Hauptaxe.

Im vorigen Abschnitte ist S. 333 ein Unterschied zwischen den beiden Enden der Hauptaxe hervorgehoben, und infolge dessen das eine Ende als oberes, das andere als unteres bezeichnet worden.

Noch schärfer würde dieser Unterschied ausgesprochen sein, wenn die von Descloizeaux an zwei Krystallen beobachtete matte Endfläche eine wahre Krystallfläche ist.*) Bei dem einen vollständig ausgebildeten Krystalle**) würde dann das obere Ende die gewöhnliche aus drei grossen und drei kleinen Rhomboederflächen gebildete Zuspitzung, das untere dagegen die gerade Endfläche nebst schwachen Abstumpfungen ihrer Kanten mit den Prismenflächen tragen.

Noch in anderer Weise macht G. Rose bei Beschreibung der Järischauer Krystalle auf einen Unterschied der beiden Enden aufmerksam. Nachdem er des Umstandes gedacht hat, dass bei manchen dieser Krystalle die Prismenflächen abwechselnd grösseren und geringeren Glanz zeigen, fährt er fort: »Die beiden Enden des Krystalles wären daher bestimmt von einander verschieden, indem an dem einen Ende die glänzenderen oder Hauptrhomboederflächen auch auf den glänzenderen Seitenflächen, an dem anderen dagegen auf den weniger glänzenden aufgesetzt wären; indessen habe ich, obgleich ich eine grosse Menge Krystalle dieses Fundortes untersucht habe, immer nur das erstere Ende auskrystallisirt gesehen, mit dem anderen waren die Krystalle stets aufgewachsen.«

Unter den von mir auf ihr thermoelektrisches Verhalten untersuchten, weiter unten beschriebenen Krystallen finden sich drei an beiden Enden ausgebildete mit abwechselnd mehr und weniger glänzenden Prismenflächen (Krystall Nr. V aus dem Dauphiné Fig. 11 u. 12, Krystall Nr. XII aus Striegau Fig. 25 u. 26, u. Krystall Nr. XIII Fig. 27 u. 28 aus dem Dauphiné); die oberen Enden tragen deutlich durch ihre Grösse unterschieden die Flächen des Haupt- und Gegenrhomboeders (bei dem einen mit einer vorherrschenden Fläche des Hauptrhomboeders), und laufen in eine

*) Ueber eine Möglichkeit ihrer Entstehung infolge mangelhafter Ausbildung vergl. die Anmerkung auf vorhergehender Seite.

**) Fig. 60 der Abhandl. von Descloizeaux.

abwechselnden Kanten, theils an den drei anderen, welche keine Pyramidenflächen tragen, auf, theils stumpft es sogar sämmtliche sechs Kanten der verticalen Säule ab; und ebenso findet sich das ditrigonale Prisma bald an den einen, bald an den andern abwechselnden Kanten, oder es erscheinen auch zwei ditrigonale Prismen (von verschiedenen Winkeln?) an den einen und den anderen abwechselnden Kanten.*)

Bei Aufstellung des obigen Gesetzes hat G. Rose nur die sogenannten unteren Trapezoeder (zwischen Rhomben- und Prismenfläche) ins Auge gefasst, indem damals von den oberen Trapezoedern (zwischen Rhomben- und Rhomboederfläche) nur ein einziges bekannt war. Descloizeaux, der mehrere solche obere Trapezoeder auffand, hebt in Betreff der Flächen dieser letzteren Formen ausdrücklich hervor,**) dass an den Krystallen von Traversella die meisten oberen Trapezoeder an demselben Individuum gleichzeitig rechts und links auftreten; ein Verhalten, das mit dem angegebenen Vorkommen der trigonalen und ditrigonalen Prismen nicht im Widerspruch steht, und (jedoch die Einfachheit der von Descloizeaux beobachteten Krystalle vorausgesetzt) die Frage anregt, ob das von G. Rose angegebene Gesetz des Zusammenvorkommens und Ausschliessens auch in der That für die unteren Trapezoeder absolute Geltung hat. (Vergl. den letzten Abschnitt dieser Abhandlung.)

V. Zwillingskrystalle.

Der Quarz hat das Eigenthümliche, dass bei ihm sehr häufig Zwillingskrystalle vorkommen, die sich in ihrer äusseren Form von den einfachen Krystallen gar nicht unterscheiden; die einzelnen Individuen sind mit parallelen Axen und coincidirenden Flächen entweder mittelst Aneinanderlegens oder mittelst Durchwachsung (wobei jedes Individuum in mehrere Theile getrennt sein kann) zu einem äusserlich einfach erscheinenden Krystalle vereinigt; die Grenzen der Zusammenfügung geben sich auf den Rhomboeder- und Prismenflächen nur durch Unterschiede in Glanz und Glätte der Flächen zu erkennen.***) In

*) Indess darf man noch fragen, ob die von Descloizeaux beobachteten Krystalle wirklich einfache gewesen sind.

**) S. 169 seiner Abhandlung.

***) G. Rose in der citirten Abh. S. 270 ff.

Bezug auf Stellung und Beschaffenheit der einzelnen Individuen (ob rechte oder linke), sowie in Bezug auf ihre Grösse können die mannichfaltigsten Modificationen statt haben.

Nach den Untersuchungen Descloizeaux' lässt sich aus den äusserlich sichtbaren Begrenzungen (Vorkommen der Rhomben- und Trapezflächen) auf die innere Zusammensetzung eines Krystalles, wie sie durch die optische Untersuchung nachgewiesen wird, kein Schluss machen, indem keinesweges die aus den scheinbar complicirtesten Krystallen senkrecht gegen die Axe geschnittenen Platten im polarisirten Lichte die complicirtesten Farbenzeichnungen darbieten;*) andererseits bestand aber ein anscheinend einfacher Krystall, welcher an dem ausgebildeten Ende die Rhombenflächen auf drei abwechselnden Ecken, sowie glänzende, aber mit kleinen rundlichen Erhebungen versehene Flächen des Hauptrhomboeders und vollkommen ebene (*unis*) Flächen des Nebenrhomboeders trug, nicht vollständig aus einer einzigen, im Sinne jener Flächen drehenden Masse, sondern schloss noch Lagen von entgegengesetzter Drehung ein. Ein in seiner ganzen Masse homogener Bergkrystall dürfte zu den mineralogischen Seltenheiten gehören.

Descloizeaux fand bei den meisten Bergkrystallen, besonders denen des Valais, fast stets einen nahe homogenen Kern von einer gewissen Ausdehnung, welchen eine mehr oder minder dicke aus keilförmig in einander geschobenen Stücken von verschiedenen Dimensionen gebildete und von der äusseren sechsseitigen Begrenzung umschlossene Hülle umgab.**) Der regelmässige Fortschritt, wie er während der Bildung des Kerns unter dem Obwalten gewisser Bedingungen bestanden, würde also beim Beginn der Entstehung der abweichend geformten Hülle durch den Eintritt anderer störender Verhältnisse unterbrochen worden sein; Descloizeaux nimmt selbst an, dass die durch diese Einflüsse erfolgte Erschütterung sich auch auf den centralen bereits consolidirten Theil habe ausdehnen können.

Der hemitropischen Zwillingskrystalle, welche oben und unten auf denselben abwechselnden Prismenflächen grosse oder kleine Rhomboederflächen tragen, ist bereits oben S. 335 gedacht worden.

---

*) S. 269 der Abhandl. Descloizeaux'.

**) S. 274 ebendas.

VI. Hülfsmittel zur Untersuchung der innern Structur der Bergkrystalle.

1. Circulare Polarisation.

Bekanntlich wird beim Durchgange eines polarisirten Lichtstrahles durch eine senkrecht gegen die Hauptaxe geschnittene Bergkrystallplatte, wenn sie der Strahl gerade in der Richtung dieser Axe durchdringt, die Polarisationsebene in einigen Krystallen von Links nach Rechts, in anderen von Rechts nach Links gedreht, und es hängt dieser Unterschied in der Einwirkung auf das polarisirte Licht mit der Form der Krystalle zusammen.

Die Richtung dieser Drehung lässt sich im Allgemeinen bei einfachen Krystallen aus der Lage der Trapezoeder- und Rhombenflächen gegen die Flächen der beiden Rhomboeder bestimmen. Liegen die Flächen der Trapezoeder erster Ordnung und ebenso die Rhombenflächen oben rechts unterhalb der Flächen des Hauptrhomboeders, so ist der Krystall ein rechts drehender; liegen sie links, so ist er ein links drehender. Für die Trapezoeder zweiter Ordnung in Bezug auf die Flächen des Gegenrhomboeders würde die Regel gerade umgekehrt lauten.*)

Dass die Bergkrystalle häufig aus rechts und links drehenden Stücken zusammengesetzt sind, ist schon im vorhergehenden Abschnitte hervorgehoben worden.

2. Aetzung der Krystalle und Platten mittelst verdünnter Fluorwasserstoffsäure.

Um die Structur des Bergkrystalles noch in anderer Weise als mittelst des polarisirten Lichtes zu untersuchen, setzte Leydolt**) entweder ganze Bergkrystalle oder geschliffene Platten der Einwirkung verdünnter Fluorwasserstoffsäure aus, und erhielt folgende Resultate.

---

*) Bei rechts drehenden Krystallen folgen die Farben in der Mitte der Ringe in der Ordnung: Roth, Orange, Gelb, Grün u. s. w. oder erweitern sich die Ringe und entstehen neue Farbentöne im Mittelpunkte, wenn die analysirende Vorrichtung rechts gedreht wird; dasselbe erfolgt bei links drehenden Krystallen, wenn die genannte Vorrichtung links gedreht wird.

**) Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der Wiener Akad. der Wissenschaften 1855, Bd. 15 S. 59 ff.

gehören den vier Trapezoedern an, die sich aus jeder zwölfseitigen Pyramide herleiten lassen. Während die Erscheinungen im polarisirten Lichte nur rechts und links drehende Theile zu erkennen erlauben, würde die Aetzung das Mittel zur Untersuchung sämmtlicher vier Trapezoeder liefern. Nach Leydolt's Beobachtungen ist die Begrenzung zwischen den aus rechten und linken Trapezoedern derselben Ordnung gebildeten Theilen geradlinig und parallel den Flächen des Prismas, während die Grenzlinie zwischen den aus rechten Trapezoedern der beiden Ordnungen und ebenso zwischen den aus linken Trapezoedern der beiden Ordnungen bestehenden Theilen krumm und unregelmässig verläuft.

In gleicher Weise hat Descloizeaux Aetzungsversuche angestellt, und dabei ähnliche Phänomene, wie sie Leydolt beschreibt, wahrgenommen; indess haben ihn diese nicht zu so absoluten und allgemeinen Gesetzen geführt, und er ist zweifelhaft, ob man für die stets sehr rauhen (*rugueuses*) Flächen überhaupt ein völlig bestimmtes Zeichen aufstellen könne, da deren Neigung wenig constant zu sein scheine.*) Auch der Ansicht Leydolt's, dass die Lage der auf den Polkanten entstehenden künstlichen Flächen mit der von den Krystallen ausgeübten Drehung in Beziehung stehe, tritt Descloizeaux entgegen, indem diese Flächen ebensowenig, als die Flächen der Trapezoeder den Sinn der Drehung sicher angeben **)

VII. Verfahren bei der Untersuchung der Thermoelektricität des Bergkrystalles und Darstellung der erhaltenen Resultate.

Das von mir zur Beobachtung der Thermoelektricität des Bergkrystalles angewandte Verfahren glich dem bei der analogen Untersuchung des Boracits (Bd. VI S. 158 ff. dieser Abhandl.) benutzten. Der zu untersuchende Bergkrystall wurde auf die obere schüsselförmige Vertiefung *a* des kleinen eisernen Ofens *b* (Fig. 1) bis auf die zu prüfende Fläche, Kante oder Ecke in Platinsand oder Eisenfeile***) gelegt, und

*) S. dessen Abh. S. 224.

**) Ebend. S. 226.

***) Der Platinsand konnte nur bei kleinen Krystallen angewandt werden. Es wäre allerdings wünschenswerth gewesen, denselben stets benutzen zu können, wie

tragenden Messingstäbchen ein sehr dünner Kupferdraht *W* (Fig. 1) aus, dessen anderes Ende an einem Platindrahte *V* befestigt war. Das untere abgerundete Ende dieses durch Anschmelzen an einen Glasstab *T* isolirten Platindrahtes ward der zu prüfenden Stelle des Krystalles genähert, und der infolge der Vertheilung seitens der im Krystall vorhandenen Elektricität erzeugte Ausschlag des Goldblättchens beobachtet.

Da die geringste Reibung des Platindrahtes an den Flächen des erwärmten Bergkrystalles starke Elektricität erzeugt, so durfte die Drahtspitze niemals bis zur Berührung des Krystalles genähert werden, während doch andererseits bei der bisweilen vorhandenen Schwäche der auftretenden elektrischen Erregung eine möglichst grosse Annäherung geboten war. Um nun die abgerundete Spitze des Drahtes *V* stets mit Sicherheit bis zur grössten Nähe, jedoch unter Ausschluss jeglicher Berührung, an den Krystall heranführen zu können, wurde eine dem in Bd. VI S. 163 dieser Abhandl. beschriebenen Apparate ähnliche Vorrichtung in folgender vollkommener Gestalt angewandt.

Auf das starke Brett *d*, welches den kleinen eisernen Ofen *b* trug, war ein zweites kleineres Brett *A* aufgeschraubt; auf demselben liess sich zwischen den Leisten *B* und *B'* der Schlitten *C* entweder bei grösseren Bewegungen mittelst der Hand oder bei geringeren mittelst der Schraube *D* sanft verschieben. Dieser Schlitten *C* trug wieder zwei Leisten *E* und *E'*, zwischen denen ein zweiter Schlitten *F* in einer auf der zuvor bezeichneten Verschiebung senkrechten Richtung entweder durch die Hand oder durch die Schraube *G* bewegt werden konnte. Auf diesem oberen Schlitten *F* sassen die beiden Messingstücke *H*, *H'*; die Spitzen der durch sie hindurchgehenden Schrauben dienten zur Aufnahme der Axe *I* des Hebels *L*, *L'*. Auf der linken Seite bewegte sich dieser Hebel frei zwischen den Schenkeln des messingenen Bogens *K*, auf der rechten Seite zwischen den Schenkeln der beiden Messingbogen *M* und *N*. Durch die oberen starken Köpfe aller drei Bogen waren Schrauben geführt; die linke Schraube *K'* und die rechte Schraube *N'* dienten zur Regulirung der Grenzen für die Bewegung des Hebels.

Das linke Ende *L* des Hebels trug eine hohle Röhre *P*, in welcher sich ein Messingstab *Q* verschieben und mittelst der Schraube *R* in beliebiger Höhe feststellen liess. Am oberen Ende des Messingstabes *Q*

sass eine Hülse S, in welcher der bereits oben erwähnte Glasstab T, der behufs besserer Isolirung auf der linken Seite eine Strecke weit mit Siegellack überzogen war, verschoben und mittelst einer Schraube festgeklemmt werden konnte. An der linken Seite dieses Glasstabes T war der gleichfalls schon erwähnte Platindraht V angeschmolzen; derselbe hatte oben einen horizontalen Theil, und dieser legte sich beim Aufwärtsgehen des linken Hebelarmes gegen einen Platindraht U, der an einen starken federnden Draht X angelöthet war; letzterer war in der Durchbohrung des Messingstabes Y, der sich mittelst harter Reibung in der aufgeschnittenen messingenen Hülse Z verschieben liess, eingeklemmt. Die Axe I des Hebels, sowie die Hülse Z und der eiserne Ofen b waren mit der Erde leitend verbunden, um alle ihnen mitgetheilte Elektricität sogleich abzuführen.

Sollte die eben beschriebene Vorrichtung gebraucht werden, um z. B. die Mitte des in Eisenfeile eingesetzten Krystalles zu untersuchen, so wurde die Anordnung so getroffen, dass bei mittlerer Stellung der beiden Schlitten und nahe horizontaler Lage des Hebels die untere abgerundete Spitze des Platindrahtes V 1 bis $1\frac{1}{2}$ Linie über der Mitte der zu untersuchenden Fläche stand. Darauf wurde die Schraube N' so regulirt, dass jene Spitze beim Niedersinken des auf der linken Seite schwereren Hebels der Krystallfläche äusserst nahe kam. Dies geschah unter Beobachtung mittelst einer starken Loupe; bei dem lebhaften Glanze der Flächen des Bergkrystalles konnte durch Beobachtung der Spitze und ihres Bildes ihr Abstand von der Fläche äusserst klein gemacht werden, ohne eine Berührung eintreten zu lassen. Damit eine solche im Falle grosser Annäherung nicht etwa beim raschen Niederlassen des Hebels durch elastische Biegung der betreffenden Theile des Apparates erfolgen könnte, wurde der Hebel nicht unmittelbar mit der Hand, sondern durch Umdrehung der Schraube M' sanft niedergelassen.

Um andere Punkte derselben Krystallfläche zu untersuchen, wurden die beiden Schlitten C und F angemessen verschoben, und sodann die Schraube N' unter Beobachtung der Spitze mittelst der Loupe bis zur gewünschten Annäherung des Drahtes an den betreffenden Punkt von Neuem eingestellt. Die Schraube K' wurde dabei stets so regulirt, dass beim Heben des linken Hebelarmes der obere horizontale Theil des Platin-

drahtes V sich an den feststehenden Platindraht U anlegte, und durch diese Berührung das Elektrometer entlud.

Da die Spitze des Platindrahtes beim Heben nur wenig (1 bis 1½ Linie) von der Krystallfläche entfernt wurde, so blieb während der Ableitung des Drahtes zur Erde ein Theil Elektricität in seinem unteren Ende gebunden, und bei Annäherung an den Krystall wurde folglich nur ein dem hiedurch bewirkten Zuwachse der Vertheilung entsprechender Ausschlag im Elektrometer beobachtet; sollen also die auf verschiedenen Punkten ausgeführten Messungen unter einander vergleichbar sein, so müssen die grössten und kleinsten Abstände der Spitze von der Krystallfläche stets dieselben bleiben.*) Indess wird der Ausschlag im Elektrometer nicht blos durch die Elektricität der unmittelbar unter der Spitze liegenden Punkte, sondern auch durch die Einwirkung der seitlich liegenden Theile der Fläche bewirkt; ein Umstand, der die Messungen in der Mitte der Flächen mit den an den Rändern und Ecken ausgeführten nicht streng vergleichbar macht, und unter gewissen Umständen eigenthümliche Bewegungen des Goldblättchens im Elektrometer, sowie selbst irrthümliche Resultate in Betreff der beobachteten Elektricität veranlassen kann.

Gesetzt es sei die Mitte und rechte Seite der Fläche eines Krystalles, dessen übrige Begrenzungen sämmtlich in Eisenfeile gehüllt sind, stark negativ, die linke Seite aber schwach positiv. Befindet sich nun die Platinspitze z. B. ½ Zoll hoch über der Fläche, und wird durch Niederlassen der linken Seite des Hebels allmählig dem linken positiven Theile der Fläche genähert: so wirkt anfänglich die Gesammtheit der negativen Elektricität wegen ihrer höheren Spannung stärker als die schwächere positive; das Goldblättchen macht also zuerst eine Bewegung in negativem Sinne. Kommt die Platinspitze dann der linken positiven Seite der Fläche näher, so beginnt, weil jetzt die positive Elektricität durch die grössere Nähe einen stärkeren Einfluss erlangt, der anfänglich

*) Der Apparat hätte eigentlich noch eines Zusatzes bedurft, durch welchen der Abstand des Platindrahtes V von der Krystallfläche, wenn er mit seinem oberen horizontalen Theile den Ableitungsdraht U berührte, stets gleich erhalten wurde. Da indess, wie oben erwähnt, die Beobachtungen aus anderen Gründen doch nicht absolut streng vergleichbare Werthe liefern konnten, habe ich diese Einrichtung fortgelassen und jenen Abstand nur bei den Beobachtungen auf einer und derselben Fläche so viel möglich genau gleich gemacht.

negative Ausschlag des Goldblättchens abzunehmen, und geht zuletzt, wenn die positive Elektricität der unter der Platinspitze befindlichen Stelle nicht zu gering ist, allmählig durch Null in einen positiven über. Ist jedoch die bezeichnete Stelle sehr schwach elektrisch, so kommt das Goldblättchen nur bis auf Null zurück oder zeigt selbst noch fortwährend einen schwachen negativen Ausschlag. Bei so bewandten Umständen muss man den durch vorhergehende Versuche als stark negativ erkannten Theil der Krystallfläche mit Eisenfeile bedecken und nur die zu prüfende Stelle derselben freilassen, was freilich wieder eine Aenderung der abgeleiteten Oberfläche zur Folge hat.

Man sieht übrigens leicht, dass die eben erwähnten Störungen sich sehr vermindern werden, wenn man nur einen sehr kleinen Hub des Hebels anwendet, was im vorliegenden Falle, wo keine absoluten, sondern nur relative Bestimmungen der Art und Stärke der Elektricität an den verschiedenen Punkten der Flächen gefordert werden, ohne Uebelstand geschehen kann. Dies ist der Grund, warum in den nachfolgenden Messungen stets nur ein geringer Hub der Spitze von ungefähr 1 bis 1½ Linie benutzt wurde.

Bei sehr schwachen elektrischen Erregungen, die nicht über 0,2 Skalentheil des Ocularmikrometers betragen, muss man sich ferner vor Täuschungen durch die Elektricität im Zimmer hüten,*) indem bei einiger in der Luft der Umgebung des Apparates angehäuften Elektricität selbst durch die kleinen Senkungen des zuleitenden Drahtes um 1½ Linie Aenderungen in der Vertheilungswirkung der umgebenden Luft auf diesen Draht, und infolge dessen Bewegungen des Goldblättchens von der angegebenen Grösse (0,2 und etwas darüber) entstehen können. Man prüft den Apparat in Bezug auf das Vorhandensein einer solchen Vertheilungswirkung, indem man den Platindraht *V* seitwärts über die Eisenfeile schiebt, und die Bewegung ebenso wie über der Krystallfläche ausführt; zeigen sich bei diesem Versuche (wie dies z. B. statt findet, wenn ein lebhafter Wind auf das Fenster, in welchem das Elektrometer hinter einem Papierschirme steht, bläst,) Ausschläge von derselben Grösse, wie die durch die Elektricität des Krystalles erzeugten, so hat man die weitere Untersuchung gänzlich zu unterlassen, da eine Correction der oberhalb der Krystallfläche beobachteten Ausschläge

*) Vergl. diese Abhandl. Bd. XI S. 589 ff.

mittelst der seitwärts von ihr gemachten Beobachtungen wegen der möglichen Veränderlichkeit der elektrischen Spannung der Luft nicht rathsam sein dürfte.

Bei dieser Gelegenheit hebe ich noch die Nothwendigkeit, die aus den kleinen Elementen (Zink, Kupfer, Wasser) gebildete Säule auf einem Erschütterungen möglichst wenig ausgesetzten Orte aufzustellen, hervor; durch Erschütterung ändert sich nämlich die Spannung in den Polen derselben, und da diese Aenderungen an den beiden Polen der in ihrer Mitte abgeleiteten Säule niemals in genau gleicher Grösse auftreten werden, so haben jene Erschütterungen eine mehr oder minder grosse Bewegung des Goldblättchens zur Folge. Jeder vorbeifahrende Wagen nöthigt deshalb, selbst wenn die Säule auf dem festen Mauerwerke steht, die Beobachtungen zu unterbrechen bis sich wieder eine bestimmte Ruhelage des Goldblättchens hergestellt hat.

Die Vertheilung der Elektricität in einem Krystalle bildet ein zusammenhängendes System, dergestalt, dass die auf einer Stelle der Oberfläche wahrnehmbare Grösse der elektrischen Spannung nicht blos von der Wärmebewegung, sondern auch mehr oder weniger von den Ableitungen an den übrigen Theilen des Krystalles abhängt. Bereits in meiner Untersuchung über das thermoelektrische Verhalten des Boracits *) habe ich den Einfluss der Ableitung ausführlicher dargelegt, und kann mich deshalb hier mit dem Hinweise auf jene Mittheilung begnügen. Mit Rücksicht auf diesen Umstand füge ich nur die Bemerkung bei, dass wenn im Folgenden keine besondere Einhüllung der Krystalle erwähnt wird, der Krystall stets als bis auf die gerade untersuchte Fläche oder Kante in Eisenfeile oder Platinsand eingehüllt anzunehmen ist.

Um das von mir angewandte Verfahren im Speciellen darzulegen, werde ich einige Versuche ausführlich mittheilen, und zwar wähle ich dazu denselben Krystall, der in meinen früheren 1840 veröffentlichten Untersuchungen am vollständigsten beobachtet worden war. Es ist dies der in Pogg. Annal. Bd. 50 S. 606 mit Nr. I bezeichnete Krystall von Striegau in Schlesien, der in vorliegender Abhandlung in Fig. 25 Tafel II in zwei verschiedenen Ansichten (Vorder- und Rückseite) in natürlicher Grösse abgebildet ist. Behufs deutlicherer Erkennung der Verhältnisse in der Ausdehnung der Prismenflächen habe ich den Kry-

*) Diese Abhandl. Bd. VI S. 174 ff.

stall so gestellt, dass die Normale auf den beiden grössten Prismenflächen zur Ebene des Papieres senkrecht steht. Fig. 26 Taf. II stellt das Netz eben dieses Krystalles dar.

Im Anschluss an die älteren Mittheilungen werde ich die sechs Prismenflächen der Reihe nach von links nach rechts (vergl. die Figur) durch die Zahlen 1 bis 6, die Rhomboederflächen des oberen Endes durch 1 *a* bis 6 *a* und die Rhomboederflächen des unteren Endes durch 1 *b* bis 6 *b* bezeichnen. Kanten und Ecken erhalten ihre Bezeichnung durch Zusammenstellung der Zeichen für die sie bildenden Flächen.

An dem oberen Ende *a* dieses Krystalles sind die Flächen des Haupt- und Gegenrhomboeders deutlich durch ihre Grösse unterschieden; dagegen zeigt das untere Ende *b* die S. 334 beschriebene Schneide; dieselbe wird durch die Flächen 1 *b* und 4 *b* gebildet; an ihren Endpunkten liegen die übrigen vier geneigten kleineren Flächen dieses Endes.

Die Kanten dieses Krystalles sind nicht scharf erhalten; doch lässt sich auf der Kante (6. 1 *a*) deutlich die sogenannte Rhombenfläche erkennen. An der Ecke (6. 1. 1 *b*), also dem unteren Endpunkte der Kante (6. 1) zeigen sich wiederholte Ansätze eines trigonalen Trapezoeders, besonders durch Streifungen parallel der Combinationskante der Fläche 6 *b* mit einer an dieser Ecke auftretenden Rhombenfläche (wenn solche vorhanden wäre) erkennbar. Das bezeichnete Trapezoeder würde also nach G. Rose's Bezeichnung ein rechtes Trapezoeder zweiter Ordnung sein. Zwischen 3 und 3 *b* liegt die Fläche eines spitzeren Rhomboeders zweiter Ordnung.

Da nach G. Rose die Flächen des rechten Trapezoeders zweiter Ordnung mit den Flächen des linken Trapezoeders erster Ordnung gleichzeitig auftreten, so deuten sie ebenso wie die Lage der Rhombenfläche darauf hin, dass wir diesen Krystall, seine Einfachheit vorausgesetzt, als einen sogenannten linken zu betrachten haben.

Der Krystall war ursprünglich, wie auch die Abbildung in Poggendorff's Annalen Bd. 50 Tafel I Fig. 10 zeigt, ringsum vollständig ausgebildet; durch eine sehr starke Erhitzung bei den früheren Untersuchungen, wobei der Krystall blos mit einer seiner Flächen auf einer Metallplatte lag, war an der Ecke (4. 4 *b*. 5) ein Stück abgesprungen, wie dies in der dieser Abhandlung beige-

fügten Abbildung auf Tafel II Fig. 25 durch punktirte Linien angedeutet ist.

Die Prismenflächen 1, 3 und 5 erscheinen stärker glänzend als die zwischen ihnen liegenden 2, 4 und 6; sonach sind also bei diesem Krystalle, ebenso wie dies G. Rose bei den Järischauer Krystallen, wo aber nur ein Ende ausgebildet war, angegeben hat (s. oben S. 336) am oberen Ende die Flächen des Hauptrhomboeders auf die glänzenderen Prismenflächen aufgesetzt.

Um die verschiedenen Stellen der Prismenflächen kurz bezeichnen zu können, wollen wir jede dieser Flächen zunächst als vollständiges Rechteck betrachten; die vier Ecken, sowie die Mitte der Fläche und die Mitten der vier Seiten sollen dann in der Fig. 2 Taf. I angedeuteten Weise mit den Buchstaben *a* bis *i* bezeichnet werden. Treten Abstumpfungen der Ecken ein, so mögen die genannten Buchstaben für die möglichst analogen Punkte, wie in der regelmässigen Figur,*) gelten.

Da, wie erwähnt, die Polaritäten bei der Erwärmung gerade die entgegengesetzten als bei der Abkühlung sind, so genügt es, wenn im Nachfolgenden stets nur die während der Abkühlung beobachteten elektrischen Spannungen angeführt werden.

Prismenfläche 1.

Als das in der Eisenfeile stehende Thermometer auf 128° gestiegen war, wurde die Lampe ausgelöscht, und der Krystall der Abkühlung überlassen; die Beobachtung begann, als das Thermometer bis 70° gesunken war.

e — 1,4 (70°)**); *d* + 0,6; *e* — 2,0 (60°); *f* — 1,0; *a* + 0,7; *b* — 2,0; *c* — 3,0; Mitte zwischen *e* und *c* — 5,0; Mitte zwischen *e* und *i* — 3,0; *g* + 2,4; *h* — 3,0; *i* — 1,0; *d* + 3,5; *e* — 4,0; Mitte zwischen *e* und *f* — 5,0 (32°); *f* — 3,0; Mitte zwischen *e* und *c* — 9,3;

*) Ein Theil der Messungen ist Taf. II Fig. 26 in das Netz dieses Krystalles eingetragen worden; die Zeichen + und — geben auf den Flächen den Ort an, wo die Messungen ausgeführt wurden, und gewähren durch ihre Vergleichung mit den oben im Texte namhaft gemachten ein Mittel die mit *a* bis *i* bezeichneten Punkte mit Bestimmtheit aufzufinden.

**) Die durch die Klammern ( ) eingeschlossenen Zahlen bedeuten den bei der betreffenden Beobachtung abgelesenen Stand des Thermometers.

a + 1,4; b — 3,0; c — 5,5; i — 1,4 (28°); h — 4,0; g + 4,5; d + 4,0; e — 5,0; Mitte zwischen c und e — 9,0.*)

Die kleinere linke Hälfte der Fläche ist also (stets beim Abkühlen verstanden) positiv, die grössere rechte negativ; die grösste negative Spannung**) findet sich ungefähr in der Mitte zwischen e und c.

Prismenfläche 2.

Krystall zuvor bis 120° erhitzt.

e + 2,0 (85°); d + 0,9; a + 1,8; b + 2,7; c + 2,0; f + 2,0; i + 0,7; h + 1,5; g + 1,7; d + 2,8; e + 7,2 (48°); a + 4,7; b + 6,2; c + 5,7; f + 4,0; i + 1,0; h + 2,5; g + 2,4; d + 3,0; e + 11,2; (35°); a + 4,6; b + 8,5; c + 6,0; f + 6,0; i + 0,9; h + 2,7; g + 2,6; d + 3,0; e + 11,0; Mitte zwischen e und f + 7,8; f + 4,0; Mitte zwischen e und b 12,0 (24°).

Die ganze Fläche zeigt also positive Elektricität; die höchste positive Spannung liegt zwischen e und b ungefähr in der Mitte.

Prismenfläche 3.

Krystall zuvor bis 136° erhitzt.

e — 0,4 (77°); d + 0,7 (70°); a — 0,3; b — 1,0; c — 1,0; f — 1,0; i — 0,7; h + 1,0; g + 2,0; e + 1,4 (48°); d + 2,6; a + 1,0; b — 2,2; c — 2,9; f — 3,0; i — 1,2; h + 2,0; g + 2,6; e + 3,0 (36°); d + 4,5; a + 1,1; b — 3,7; c — 3,1; f — 4,6; i — 0,7; h + 2,4; g + 3,0;

---

*) Zur Beurtheilung der Stärke der elektrischen Erregung des Bergkrystalles wird folgende Angabe dienen können.

Auf den kleinen Ofen b wurde eine eben abgeschliffene Kupferplatte von 95 mm Durchmesser isolirt gelegt, und dieselbe mit dem einen Pole einer aus 48 Elementen Zink-Kupfer-Wasser gebildeten Säule verbunden, während der andere Pol dieser Säule zur Erde abgeleitet war; die Metalle hatten bereits vier Wochen in Wasser gestanden. Als der Mitte dieser Platte die Platinspitze ebenso wie der Krystallfläche in der obigen Versuchsreihe genähert wurde, entstand im Elektrometer, dessen Empfindlichkeit oben S. 343 angegeben wurde, ein Ausschlag von 4 Skth.; der Hub des Platindrahtes betrug dabei ungefähr 1½ Linien. Wurde die Hubhöhe des Platindrahtes auf 4 bis 5 Linien vergrössert, so stieg der Ausschlag bereits über 7 Skth.

**) Wie viel die Spannung in c durch den Umstand, dass sie in unmittelbarer Nähe einer Ecke gemessen z. B. gegen die in e auf der Mitte der Fläche beobachtete verringert wird, lässt sich nicht wohl angeben.

e nach anfänglicher Bewegung im negativen Sinne*) + 1,0; zwischen *e* und *f* nahe bei *f* — 5,3.

Die linke Hälfte dieser Fläche ist sonach positiv, die rechte negativ; die grösste Intensität der negativen Spannung liegt ungefähr in der Mitte zwischen *e* und *c*.

Prismenfläche 4.

Krystall zuvor bis 120° erhitzt.

e 0,0 (85°); *d* 0,0; *a* 0,0; *b* + 1,0; *c* + 2,0; *f* + 1,8; *i* + 3,0; *h* + 2,0; *g* — 1,4; *d* — 2,0; *e* + 5,0 (50°); *a* (durch anfängliches + zu) — 1,2; *b* + 1,5; *c* + 5,5; *f* + 5,0; *i* + 5,0; *h* + 4,0; *g* — 2,2; *d* — 3,2; *e* + 8,5 (36°), *a* (durch + zu) — 2,5; *b* + 2,0; *c* + 7,0; *f* + 6,0; *i* + 6,0; *h* + 5,0; *g* — 2,3; *d* — 4,0; *e* + 8,2 (28°); Mitte zwischen *e* und *f* 13,0 (27°).

Hiernach ist beim Erkalten eine Zone in der Nähe des linken Randes der Fläche 4 negativ, während ihre Mitte und rechte Seite positiv erscheinen. Das Maximum der positiven Elektricität liegt von der Mitte nach rechts hin, wahrscheinlich, wie so oft, etwas nach oben.

Prismenfläche 5.

Krystall zuvor erhitzt bis 120°.

e — 2,0 (70°); *d* (durch — zu) + 0,2; *a* — 0,2;**) *b* — 3,0; *c* — 5,0; *f* — 3,5; *i* — 2,2; *h* — 2,2; *e* — 4,0 (48°); *d* (durch — zu) + 1,0; *a* (durch — zu) + 0,4; *b* — 5,0; *c* — 8,8; Mitte zwischen *e* und *c* — 8,0; *f* — 6,0; *i* — 3,3; *h* — 2,5; *e* — 4,5 (33°); *d* (durch — zu) + 1,0; *a* (durch — zu) + 0,4; zwischen *e* und *c*, jedoch näher an *c*, — 10,5; *c* — 9,3 (28°).

Während die linke Seite der Fläche 5 schwach positiv ist, erscheint die Mitte und rechte Seite stark negativ. Das Maximum der negativen Spannung liegt in der Nähe von *c*.

---

*) Diese anfängliche Bewegung des Goldblättchens nach der negativen Seite entsteht durch die Vertheilungswirkung der bei *f* befindlichen starken negativen Elektricität.

**) Dieser schwache, negative Ausschlag ist wohl nur eine Folge der rechts liegenden stark negativen Flächenstücke.

Prismenfläche 6.

Krystall zuvor erhitzt bis 124°.
e 0,0 (70°); *e* + 0,5 (60°); *d* — 0,8; *a* — 1,5; *b* + 1,2; *c* + 2,5; an der Kante zwischen *c* und *f* + 2,2; *f* + 3,0; *i* + 2,0; *h* + 2,0; *g* — 1,2; *e* + 8,0 (44°); *d* (durch + zu) — 3,0; *a* — 5,0; *b* + 2,5; *c* + 6,6; zwischen *c* und *f* + 5,5; *f* + 6,2; *i* + 4,0; *h* + 3,6; *g* (durch + zu) — 1,0; *d* (durch + zu) — 3,2; *a* — 5,5; *e* + 10,5; Mitte zwischen *e* und *c* + 11,5 (28°).

Der links liegende Theil der Fläche 6 ist hiernach ziemlich stark negativ, namentlich in seinem oberen Theile, während die Mitte und die rechte Seite sich stark positiv zeigen. Das Maximum der positiven Spannung liegt ungefähr in der Mitte von *e* nach *c*.

Die vorstehend ausführlich mitgetheilten Versuchsreihen werden ausreichen, um das angewandte Verfahren, sowie die Bedeutung der aufgezeichneten Ausschläge des Goldblättchens im Elektrometer in klares Licht zu setzen. Dagegen dürfte eine Mittheilung in vorstehender Form jeder Uebersichtlichkeit entbehren. Um diese Uebersichtlichkeit der Resultate, auf die es vor Allem ankommt, zu erreichen, habe ich daher im Folgenden eine andere Art der Darstellung gewählt. Ich habe die Prismenflächen, jede mit den ihr zugehörigen Pyramidenflächen neben einander gezeichnet, und in dieses Netz an den betreffenden Punkten die beobachteten Elektricitäten eingetragen, wie dies für den Krystall Nr. XII Fig. 26 Tafel II zeigt; ausserdem sind durch grünliche Farbe die beim Erkalten negativen, und durch röthliche Farbe die beim Erkalten positiven Zonen leicht kenntlich gemacht worden. Damit dies jedoch mit gehöriger Deutlichkeit geschehen konnte, bin ich öfter gezwungen gewesen, die Dimensionen der Krystalle zu verdoppeln oder gar zu vervier- oder zu verachtfachen, was durch $\frac{2}{1}$ oder $\frac{4}{1}$ oder $\frac{8}{1}$ neben den Zeichnungen angegeben ist.

In den vorstehenden Versuchsreihen war der Krystall nur bis ungefähr 130° des Thermometers erhitzt worden; was zur Folge hatte, dass wegen der schlechten Wärmeleitungsfähigkeit, die erst spät eine Abkühlung in der gesammten Masse eintreten liess, bei noch etwas höheren Temperaturen (70°, 60°) nur schwache Elektricitäten auftraten, und erst nach und nach an den einzelnen Punkten ein Maximum erreicht wurde. Um diesen Uebelstand möglichst zu beseitigen, sind bei den folgenden Versuchen, wenn nicht besondere Bemerkungen beige-

Wegen der Kleinheit des Krystalles konnte derselbe bei der Untersuchung auf sein elektrisches Verhalten in Platinsand eingehüllt und erhitzt werden.

Die Betrachtung der in das Netz Fig. 4 Taf. I eingetragenen Beobachtungen gewährt einen leichten Ueberblick über die Vertheilung der Elektricität auf diesem Krystalle.

Während bei Krystallen, welche mit einem Ende angewachsen sind, oder, wenn auch ringsum ausgebildet, doch an dem einen Ende eine vollkommenere Ausbildung zeigen als an dem anderen, eine Unterscheidung der beiden Enden nothwendig wird, fällt, wie bereits oben S. 337 erwähnt, ein solcher Unterschied hinweg, wenn beide Enden eines Krystalles mit gleicher oder nahe gleicher Vollkommenheit und Regelmässigkeit ausgebildet sind. Letzteres ist in dem vorliegenden Krystalle Nr. I angenähert der Fall, wenngleich sich nicht in Abrede stellen lässt, dass das in der Zeichnung als oberes abgebildete Ende doch noch eine etwas grössere Regelmässigkeit besitzt als das untere. Für den Krystall Nr. I muss es also gleichgültig sein, welches Ende wir als das obere und als das untere betrachten; und dies ist in der That der Fall, indem die Vertheilung der Elektricität im Allgemeinen dieselbe bleibt, wenn wir die Zeichnung umkehren, und das obere Ende zum unteren machen.

Die Flächen des Hauptrhomboeders am oberen Ende (1 *a*, 3 *a* und 5 *a*) erscheinen auf ihren grösseren linken Hälften und dem entsprechend die Flächen desselben Hauptrhomboeders am unteren Ende (2 *b*, 4 *b* und 6 *b*) auf ihren grösseren rechten Hälften negativ, die rechten Ränder am oberen Ende und die linken Ränder am unteren Ende nebst den äussersten Spitzen zeigen sich dagegen entweder positiv elektrisch oder auch unelektrisch.



Die kleineren Flächen des Gegenrhomboeders (2 *a*, 4 *a*, 6 *a*, 1 *b*, 3 *b* und 5 *b*) verhalten sich im Allgemeinen gerade entgegengesetzt; am oberen Ende ist die linke Seite, am unteren die rechte Seite positiv, während am oberen Ende die rechte und am unteren die linke Seite negativ oder unelektrisch erscheinen.

Auf den Prismenflächen sind meistens beide Elektricitäten vorhanden, und dabei durch eine von rechts oben nach links unten gezogene Linie geschieden; auf den Flächen 1, 3 und 5 ist der linke und obere Theil negativ, der rechte und untere positiv (auf 1 nur unelektrisch);

umgekehrt erscheint auf den Flächen 2, 4 und 6 der linke und obere Theil positiv, der rechte und untere Theil negativ.

Wir können die angegebene elektrische Vertheilung in folgender Weise zusammenfassen. Von jeder oberen Fläche des Hauptrhomboeders zieht sich eine negative Zone abwärts nach links zu der entsprechenden nächsten unteren Fläche des Hauptrhomboeders, und ebenso geht eine positive Zone von jeder oberen Fläche des Gegenrhomboeders in gleich schiefer Richtung abwärts zu der entsprechenden nächsten unteren Fläche des Gegenrhomboeders.

Es wurde oben bemerkt, dass die Kanten (1. 2), (3. 4) und (5. 6) an ihren oberen und unteren Enden die Rhombenflächen tragen. Wären diese Flächen, wie es häufig vorkommt, gestreift, so würden die Streifungen parallel den Combinationskanten dieser Flächen mit den Flächen des Hauptrhomboeders gehen, also im Allgemeinen die Richtung der zuvor bezeichneten elektrischen Zonen haben. Zugleich sehen wir, dass die positiven Zonen stets diejenigen Kanten enthalten oder kreuzen, welche an ihrem oberen und unteren Ende die Rhombenflächen tragen.

Ein Blick auf die Zeichnung lehrt, dass die Ausdehnungen der verschiedenen Zonen, so wie die innerhalb derselben beobachteten Intensitäten der Elektricität nicht gleich sind; eine Folge der nicht in allen Theilen des Krystalles absolut gleichartigen oder gleichmässigen Bildung, die sich ja auch in der nicht vollkommenen Regelmässigkeit der äusseren Begrenzungen ausspricht.

Man könnte vielleicht versucht sein, diese Verschiedenheit einer etwas verschiedenen Einhüllung oder einer etwas abweichenden Erwärmung und Abkühlung zuzuschreiben. Die Beobachtung lehrt allerdings, wie dies auch schon früher (S. 348) angedeutet, dass die Art der Einhüllung eines Krystalles in einen Leiter für die an einer Stelle der freigelassenen Oberfläche zu beobachtende Elektricität nicht völlig gleichgültig ist; indess finden die obigen Unterschiede dadurch nicht ihre Erklärung: ich erwähne z. B., dass als der Krystall Nr. I bis auf die Kante (1. 2) und die unmittelbar ihr anliegenden Theile der Flächen 1 und 2 in Platinsand gehüllt war, auf dem unteren Theile der freistehenden Kante (1. 2) ebensowenig positive Elektricität gefunden werden konnte, als eine solche bei den in die Zeichnung eingetragenen Beobachtungen, wo der Krystall bis auf die Prismenfläche 1 in Platinsand eingehüllt war, wahrgenommen wurde.

Schliesslich halte ich es nicht für überflüssig, speciell hervorzuheben, dass die 18 Beobachtungsreihen, welche in das Netz des Krystalles Nr. I Fig. 4 eingetragen sind, streng genommen nicht völlig vergleichbar sind, weil die Elektricität auf jeder Fläche unter anderen Umständen beobachtet worden, indem bei den einzelnen Versuchsreihen stets andere und andere Flächen in den Platinsand gehüllt und abgeleitet waren. Indess scheint dieser Umstand gerade beim Bergkrystall die Vergleichung der Beobachtungen auf den benachbarten Flächen wenig zu stören; denn die Erfahrung lehrt, dass die auf benachbarten Punkten zweier an einander stossenden Flächen gemachten Beobachtungen sehr wohl zu einander stimmen, obwohl bei der Beobachtung der einen Fläche mittelst des Platinsandes oder der Eisenfeile andere Stellen zur Erde abgeleitet waren als bei der Untersuchung der zweiten benachbarten Fläche. Vielleicht haben wir gerade in der eigenthümlichen Vertheilung der Elektricität am Bergkrystalle den Grund zu suchen, dass das von mir meist angewandte Verfahren (den Bergkrystall bis auf eine Fläche einzuhüllen) zu unter einander möglichst vergleichbaren Resultaten geführt hat.

Krystall Nr. II.

Der sehr kleine in Fig. 5 Taf. I in natürlicher Grösse gezeichnete Krystall stammt aus New-York; genauer vermag ich den Fundort nicht anzugeben. Fig. 6 stellt sein Netz in vierfach linearer Vergrösserung dar. Er trägt fünf Rhombenflächen: eine am oberen Ende der Kante (1. 2), und je zwei an den oberen und unteren Endpunkten der Kanten (3. 4) und (5. 6); gehört also, wenn wir die Flächen des Hauptrhomboeders durch ihre grössere Ausdehnung bestimmen, zu den sogenannten rechten Krystallen.

Mit dieser Annahme stimmt auch die elektrische Vertheilung überein, die bis auf die negative Zone, die auf 2 unten rechts und auf 3 oben links auftreten sollte, regelmässig ist. Während auf dem vorhergehenden Krystalle Nr. I die positive Zone unten auf 1 durch die negative Elektricität verdrängt war, ist jetzt umgekehrt die zuvor bezeichnete negative Zone auf (2. 3) durch die positive Elektricität verdrängt, und erscheint erst wieder auf den in ihrer Richtung liegenden Hauptrhomboederflächen 3 *a* und 2 *b*, die behufs dieser Nachweisung einer speciellen Prüfung unterworfen wurden; der Einfluss der negativen

Elektricität gibt sich in der Nähe der Kante (2. 3) nur durch eine Schwächung der positiven kund.

Es ist mir nicht unwahrscheinlich, dass diese Unregelmässigkeit in der elektrischen Vertheilung mit den Unregelmässigkeiten der äusseren Form zusammenhängt; denn während die Fläche 2 *b* des Hauptrhomboeders verkümmert ist, haben sich die Flächen des Gegenrhomboeders 1 *b*, 2 *a* und 3 *b* über die Grösse, wie sie 3 *a*, 5 *b* und 6 *a* zeigen, ausgedehnt.

Der Krystall wurde im Platinsande erhitzt.

Krystall Nr. III.

Diesen ausgezeichnet schönen Krystall aus New-York verdanke ich ebenso wie den Krystall Nr. I der Güte des Herrn G. Rose; Fig. 7 Taf. I stellt den Krystall in natürlicher Grösse, Fig. 8 sein Netz in doppelten Lineardimensionen dar. Er trägt ebenso wie Nr. I sämmtliche sechs Rhombenflächen in normaler Lage, d. h. auf den abwechselnden Kanten (1. 2), (3. 4) und (5. 6); doch ist der Krystall in seinem Inneren wahrscheinlich nicht einfach. Als er zum ersten Male erhitzt wurde, und das neben ihm in der Eisenfeile stehende Thermometer 105° zeigte, sprang zu meinem grössten Bedauern aus der seitwärts gelegenen Fläche 5 ein Stück mit einer kleinen Explosion heraus. Die beiden Bruchstücke zeigen an einer Stelle Krystallflächen, deren Lage nicht mit den äusseren Begrenzungen des Krystalles übereinzustimmen scheint. Entweder die ungleiche Ausdehnung oder ein kleines mit Flüssigkeit gefülltes Bläschen hat durch seine Spannung die Zersprengung verursacht.

Die Elektricität dieses Krystalles ist nur schwach; denn trotz seiner grossen Klarheit und nicht unbeträchtlichen Grösse zeigte er nirgends eine so starke elektrische Erregung als der kleine Krystall Nr. I; es dürfte dieser Umstand wohl auf eine Zusammensetzung aus verschieden gelagerten Schichten hinweisen.

Um den Krystall, der zur sicheren Bestimmung der Elektricität stark erhitzt werden musste, damit die Abkühlung in seiner ganzen Masse möglichst gleichförmig wurde, zu schonen, habe ich nur die Prismenflächen untersucht; übrigens lässt sich die elektrische Vertheilung auf den Rhomboederflächen nach den Beobachtungen auf dem

Krystall Nr. I und nach den später mitzutheilenden Versuchen voraussehen.

Die Vertheilung der elektrischen Zonen, wie sie Fig. 8 zeigt, stimmt mit der oben S. 357 angegebenen überein; eine Unregelmässigkeit tritt nur darin hervor, dass die positive Elektricität der Zone (1. 2) die negative Zone (6. 1), die nicht blos unten rechts auf 6, sondern auch oben links auf 1 erscheinen sollte, von letzterer Fläche ganz verdrängt hat.

Ich muss auch hier wieder auf einen möglichen Zusammenhang dieser Unregelmässigkeit mit der äussern Form aufmerksam machen: während alle übrigen Flächen des Gegenrhomboeders beträchtlich kleiner sind als die Flächen des Hauptrhomboeders, ist allein die Fläche 1 *b* des Gegenrhomboeders sogar grösser als einige der Flächen des Hauptrhomboeders, so dass also auch bei diesem Krystalle ebenso wie bei dem vorhergehenden, die Unregelmässigkeit in der äusseren Form mit einer Unregelmässigkeit in der elektrischen Vertheilung zusammentrifft: eine grössere Ausdehnung und eine Verstärkung der positiven Zone scheint mit einer grössern Ausbildung der Flächen des Gegenrhomboeders verbunden zu sein.

Krystall Nr. IV.

Den Fundort des Fig. 9 und 10, Taf. I abgebildeten Krystalles Nr. IV vermag ich nicht genau anzugeben; es ist mir nicht unwahrscheinlich, dass er gleich mehreren der später zu beschreibenden Krystalle aus Striegau in Schlesien stammt. Derselbe ist nur am oberen Ende ausgebildet; mit dem unteren war er aufgewachsen. Am oberen freien Ende trägt die Kante (1. 2) eine Rhombenfläche, deren Streifung ihrer Combinationskante mit 1 *a* parallel geht; eine etwas kleinere zweite Rhombenfläche findet sich oberhalb der Kante (3. 4). Ob oberhalb der Kante (5. 6) eine dritte gelegen, lässt sich, da der Krystall hier etwas abgerieben ist, nicht mit Sicherheit erkennen. Der Krystall ist durch seine Form vollständig als ein sogenannter rechter charakterisirt.

Die Prismenfläche 5 zeigt darin eine mangelhafte Ausbildung, dass ein Theil derselben rechts der Diagonale vom oberen rechten nach dem untern linken Eckpunkte hin eingedrückt ist; der Krystall scheint bei der Bildung mit der bezeichneten Stelle angelegen zu haben. Die elektrische

Vertheilung ist jedoch durch diesen Umstand nicht gestört worden. Das untere Ende ist völlig trübe und in gemeinen Quarz übergehend.

Nach den dargelegten Vertheilungen an vollständigen Krystallen mit nur kurzen Prismenflächen dürfte es nicht schwer sein, sich im Voraus eine Vorstellung über die elektrische Vertheilung auf Bergkrystallen zu machen, die nur an einem Ende ausgebildet und mit lang gestreckten Prismenflächen versehen sind.

Die drei Flächen des Hauptrhomboeders werden bei einem sogenannten rechten Bergkrystalle in ihrer grösseren linken Hälfte negativ, am rechten Rande und an der Spitze positiv erscheinen. Umgekehrt wird die Vertheilung auf den Flächen des Gegenrhomboeders sein. Auf den Prismenflächen werden die Begrenzungen der Zonen nicht mehr so schief liegen können, wie auf den kurzen Krystallen mit vollständiger Ausbildung beider Enden; doch wird von jeder Hauptrhomboederfläche eine negative und von jeder Gegenrhomboederfläche eine positive Zone in mehr oder weniger schiefer Lage von rechts oben nach links unten herabgehen müssen.

Mit diesen Angaben stimmen die Beobachtungen auf den Hauptrhomboederflächen, auf der Fläche 2 *a* des Gegenrhomboeders und auf den Prismenflächen vollständig überein. Auf den beiden kleineren Flächen des Gegenrhomboeders 4 *a* und 6 *a* hat die positive Elektricität am unteren linken Rande nicht hervorzutreten vermocht; an ihrer Stelle erscheint Null, oder eine gegen die umliegenden Theile sehr geschwächte negative Elektricität.

Während die elektrische Polarität am oberen Ende und in der Mitte des Krystalles sehr stark ist, nimmt sie gegen das untere Ende hin, wo der Krystall trübe wird, schnell ab, und ist am unteren Ende selbst, wo der Krystall, wie schon angeführt, in gemeinen Quarz übergeht, fast oder gänzlich verschwunden.

Beiläufig bemerke ich hier, dass es mir nicht gelungen ist, an Krystallen von gemeinem Quarz elektrische Polaritäten nachzuweisen; es dürfte dieser Umstand, ebenso wie der Mangel an Durchsichtigkeit wohl auf eine gestörte Krystallisation hinweisen.

Krystall Nr. V.

Der an beiden Enden ausgebildete Krystall Nr. V stammt aus dem Dauphiné, und ist in Fig. 11 Taf. I in natürlicher Grösse abgebildet;

Fig. 12 stellt sein Netz in richtiger Längen-, aber in doppelter Querdimension*) dar, wie man leicht durch Vergleichung mit Fig. 11 erkennt. Der Krystall Nr. V trägt oben auf den Kanten (1. 2), (3. 4) und (5. 6) und unten auf der Kante (5. 6), also auf den abwechselnden Kanten sehr kleine Rhombenflächen. Ausserdem schien am unteren Endpunkte der Kante (2. 3) auf der Fläche 2 die sehr kleine Fläche eines Trapezoeders zu liegen. Die Flächen 1, 3 und 5 sind glänzender, als die Flächen 2, 4 und 6. Die Ausbildung des oberen Endes bezeichnet den Krystall als einen sogenannten rechten; am unteren Ende findet sich die S. 334 beschriebene Form einer Schneide, was jedenfalls mit einer Störung in der Bildung des Krystalles zusammenhängt. Auch erschien das untere Ende (vergl. S. 334) verdickt: während der Abstand der Kanten (5. 6) und (2. 3) von einander am oberen Ende nur 7^{mm} betrug, stieg derselbe am unteren Ende bis auf 8^{mm}.

Die Gestaltung der Rhomboederflächen am oberen Ende, sowie das Vorhandensein dreier Rhombenflächen weist auf eine vollkommenere Ausbildung des oberen Endes hin, und bei der Bestimmung der elektrischen Polaritäten werden wir also auch dieses obere Ende zu Grunde legen müssen. Eben dafür spricht auch der Unterschied im Glanze der Prismenflächen, die das obere Ende als so zu sagen freies charakterisiren.

Die Rhomboederflächen am oberen Ende liessen sich wegen der zu grossen Länge des Krystalles nicht gut untersuchen; es unterliegt aber keinem Zweifel, und wird auch direkt durch die Vertheilung der Elektricität auf den Prismenflächen bestätigt, dass sie dem früher angegebenen Gesetze folgen. Gehen wir von ihnen aus, so müssen von den drei Flächen des Hauptrhomboeders negative, und von den drei Flächen des Gegenrhomboeders positive Zonen in etwas schräger Richtung von rechts oben nach links unten herabgehen. Dies ist in der That der Fall, mit Ausnahme der Fläche 6, wo die positive Zone oben nur als unelektrisch bezeichnet ist. Die etwas schiefe Lage ist noch deutlich durch die Grenze der negativen und positiven Zone auf der Fläche 5 angedeutet, so wie auch auf den Flächen 3 und 4 darin, dass

*) Bei der Schmalheit der Flächen wäre es sonst nicht möglich gewesen, die zur Charakterisirung der elektrischen Vertheilung nöthigen Beobachtungen deutlich einzutragen.

in der Mitte derselben die Polarität am linken Rande sich stärker zeigt als am rechten.

Krystall Nr. VI.

Der ungemein klare gleichfalls Dauphinéer Krystall Nr. VI Fig. 13 und Fig. 14 Taf. I ist nur an seinem oberen Ende ausgebildet, an seinem unteren aber, wo er jedenfalls angewachsen gewesen, abgebrochen, und zeichnet sich durch die eine bei den Krystallen des Dauphiné gewöhnlich vorkommende sehr grosse Fläche des Hauptrhomboeders 1 *a* aus. Er trägt oben rechts auf der Prismenfläche 1 die Fläche eines rechten Trapezoeders erster Ordnung, sowie auf der Kante (5. 6) die Fläche einer trigonalen Pyramide (Rhombenfläche).

Die eigenthümliche Ausbildung der einen Fläche des Hauptrhomboeders hat eine Störung in der Regelmässigkeit der elektrischen Vertheilung zur Folge.*) Die erste negative Zone, von links her gezählt, beherrscht die ganze Fläche 1 sammt der grossen Fläche des Hauptrhomboeders, und erstreckt sich auch über einen Theil der Fläche 6; dagegen besitzt die zweite negative Zone auf 3 nur eine geringe Ausdehnung, und die dritte ist auf eine kleine negative Stelle oben auf der Fläche 5 reducirt; weiter unten gibt sie sich nur durch eine Schwächung der positiven Elektricität kund. Die erste positive Zone auf 2 zeigt eine umgekehrte Bildung, als sie sonst bei sogenannten rechten Krystallen auftritt, indem die linke Seite der Fläche 2 schwächer elektrisch ist als die rechte; während sonst, wenn eine Prismenfläche an beiden Rändern dieselbe Polarität besitzt, bei rechten Krystallen der linke Rand stärkere Elektricität zeigt als der rechte. Ausserordentlich stark ist die zweite positive Zone auf 4, die mit der dritten zusammenhängt, und so eine sehr ausgedehnte positive Region bildet.

Bei dieser eigenthümlichen Vertheilung der Elektricität schien es mir nicht ohne Interesse, den Krystall auch in optischer Beziehung noch genauer zu untersuchen. Ich liess daher von dem unteren Ende, an welchem die eine negative Zone gänzlich fehlte, eine nahe 4,5^{mm} dicke Platte ($\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ in Fig. 13) senkrecht gegen die Hauptachse abschneiden und poliren. Die Platte zeigte im Polarisationsapparate bei

*) Vergl. den späteren linken Krystall Nr. XVI, der ebenfalls aus dem Dauphiné stammt, und bei analoger Ausdehnung der einen Fläche des Hauptrhomboeders eine gleiche Störung in der elektrischen Polarität zeigt.

parallelen Strahlen zwischen gekreuzten Spiegeln (oder Nicol'schen Prismen) ein gleichfarbiges Gelb bis auf einen an der Fläche 5 gelegenen, 3 ^{mm} breiten Streifen, der bei gekreuzten Spiegeln dunkel, bei parallelen hell erschien. In convergentem Lichte bei gekreuzten Spiegeln zeigte der grösste Theil der Fläche die farbigen Ringe mit gelber Mitte, während der am Rande nach der Fläche 5 hin gelegene Theil die Ringe mit schwarzem Kreuz (wie im Doppelspath) darbot, und zwar waren diese letzteren Ringe nahe von gleichem Durchmesser, wie in dem übrigen Theile der Platte. Auf der Grenze der beiden verschiedenen Theile erschienen die Ringe nicht als vollständige Kreise, sondern ähnlich unterbrochen, als wenn bei Betrachtung des Ringsystems im Doppelspath zwischen gekreuzten Spiegeln ein Glimmerblättchen eingeschaltet wird, das den einen Strahl gegen den andern um ungefähr $1/8$ Wellenlänge verzögert.

Die vorstehenden optischen Untersuchungen zeigen also an derselben Stelle, wo die elektrische Prüfung eine Störung nachwies, gleichfalls eine Störung in Bezug auf die optischen Erscheinungen, wie sie sonst ein einfacher Bergkrystall darbietet.

Krystall Nr. VII.

Fig. 15 und Fig. 16 Taf. I stellen den Krystall Nr. VII von Striegau*) nebst seinem Flächennetze in natürlichen Dimensionen dar. Der Krystall ist an beiden Enden ausgebildet. Am oberen Ende lassen sich die Flächen des Hauptrhomboeders, deren eine (1 *a*) ausserordentlich gross ist, erkennen; von den Flächen des Gegenrhomboeders ist nur die Fläche (2 *a*) auf der Kante (1 *a*, 3) als sehr schmale Fläche sichtbar. Am unteren Ende zeigt der Krystall wieder die schon oft erwähnte Schneide. Oben auf der Kante (1 *a*, 2) und unten an der Kante (3. 4) befindet sich eine Rhombenfläche; ob solche etwa auch an den oberen Endpunkten der Kanten (3. 4) und (5. 6) gelegen haben, lässt sich nicht mehr erkennen, da der Krystall gerade an diesen Stellen etwas verletzt ist. Die Fläche 4 zeigt auf ihrer rechten Hälfte eine mangelhafte Ausbildung durch eine parallel mit der Kante (4. 5 *a*) gehende

*) Die sämmtlichen Krystalle von Striegau in Schlesien, die im Folgenden erwähnt werden, verdanke ich der Güte meines Freundes, des Herrn Prof. Dr. Marbach in Breslau.

Streifung; auch die Kanten (3. 4) und (4. 5) sind in ihrer unteren Hälfte nicht vollkommen.

Um das elektrische Verhalten zu bestimmen, haben wir das als oberes gezeichnete Ende, wo die Flächen des Hauptrhomboeders unterschieden sind, zu Grunde zu legen. Es sollten hiernach auf den Flächen 1, 3 und 5 negative Zonen liegen. Die Zonen auf 1 und 5 sind auch in der ganzen Erstreckung des Krystalles vorhanden und zwar die erstere in sehr ausgedehntem Masse, während die negative Zone auf 3 nur im unteren Theile dieser Flächen aufzutreten vermag, was ähnlich wie beim vorhergehenden Krystalle die Bildung einer zusammenhängenden grossen positiven Zone veranlasst.

Die Berechtigung, das als oberes gezeichnete Ende bei Bestimmung der elektrischen Polarität zu Grunde zu legen, dürfte auch noch aus dem Umstande herzuleiten sein, dass die Entwickelung der Elektricität an diesem oberen Ende im Allgemeinen viel stärker hervortritt, als an dem unteren, was auf eine reinere und vollkommenere Bildung jenes ersteren Endes hinweist.

Behufs optischer Prüfung liess ich aus diesem Krystalle eine nahe 4,2^{mm} dicke Platte (in Fig. 15 ist ihre Lage im Krystall mit $\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta$ bezeichnet) senkrecht gegen die Hauptaxe herausschneiden. Die Platte erschien im Polarisationsapparate bei parallelen Strahlen gleichartig, wie ein rechts drehender Krystall, mit Ausnahme einer sehr schmalen Stelle am Rande, nach der Fläche 3 hin. An dieser Stelle, am Rande der Fläche 3, nach der Kante (3. 4) zu, zeigte sich bei convergentem Lichte das Ringsystem mit schwarzem Kreuze; etwas mehr nach der Mitte der Fläche 3 hin ging es ($\alpha\, \beta$ nach oben) durch einigermassen deutliche links gedrehte Spiralen in das gewöhnliche Ringsystem bei Bergkrystallen (im vorliegenden Falle mit gelber Mitte bei gekreuzten Spiegeln) über.

Krystall Nr. VIII.

Der aus Striegau stammende in Fig. 17 und 18 Taf. I in natürlicher Grösse gezeichnete Krystall Nr. VIII ist ringsum ausgebildet, wird jedoch gegen sein unteres Ende unklar und trübe. Er trägt oben auf der Kante (3 a, 4) eine Rhombenfläche und rechts daneben, also oben links auf der Prismenfläche 4 eine im wiederholten Wechsel mit der ebengenannten Rhombenfläche auftretende Fläche eines Trapezoeders zweiter Ordnung. Unten an der Kante (1. 2) sitzt gleichfalls eine

Rhombenfläche und über ihr unten rechts auf 1 sieht man Andeutungen einer Trapezoederfläche. Ein Theil der Flächen 1 und 2 ist mangelhaft ausgebildet. Die Hauptrhomboederflächen 1, 3 und 5 sind am oberen Ende durch die Streifung der Trapezoederfläche zweiter Ordnung (oben links auf 4) deutlich bezeichnet; ihre Grösse allein würde sie nicht sicher unterscheiden.

Auch bei diesem Krystalle ist eine der negativen Zonen, die auf der Fläche 3 auftreten sollte, sehr reducirt, und tritt nur an einer Stelle von geringer Ausdehnung im oberen Theile der Fläche 3 auf; dagegen macht sie ihren Einfluss in einer Schwächung der positiven Elektricität unten auf 2 an der Kante (2. 3) noch geltend. Gewissermassen als Ersatz für sie tritt die negative Zone auf 1, namentlich in der Nähe des linken Randes dieser Fläche, mit grosser Intensität auf; und ausserdem greift die dritte negative Zone (wahrscheinlich die Folge einer Zwillingsbildung) oben auf der Fläche 5 auf die Fläche 4 hinüber.

Krystall Nr. IX.

Der aus Neumark in Schlesien stammende Krystall Nr. IX (Fig. 19 und 20 Taf. I in natürlicher Grösse abgebildet) zeigt keine Flächen, welche den Sinn seiner Drehung erkennen liessen; die elektrische Vertheilung auf seinen Flächen weist ihn aber zu den sogenannten rechten. Die Flächen 2 und 3 sind durch staubartige eingewachsene Theilchen sehr rauh. Auf der Fläche 1 ist unten ein kleiner Krystall eingewachsen; was eine eigenthümliche Verbreiterung der Fläche 3 am unteren Ende zur Folge hat, und die Prüfung der unteren Theile der Flächen 1 und 2 unmöglich macht. Ausserdem ist $1/4$ vom oberen Ende auf der Kante (1. 2) ein zweiter kleinerer Krystall eingewachsen.

Die eigenthümliche Erscheinung, dass in der Mittellinie der Fläche 1 die negative Elektricität oben stark, $1/4$ der Länge vom oberen Ende abwärts schwach und darauf in der Mitte wieder stark auftritt, ist wahrscheinlich eine Folge des in der Nähe eingewachsenen kleinen Krystalles. Uebrigens sind sämmtliche sechs elektrische Zonen ausgebildet; nur ist durch die Störung in der Bildung des Krystalles an seinem unteren Ende die zweite positive Zone unten sehr ausgedehnt, und die bei der ersten und zweiten negativen und ebenso bei der ersten und zweiten positiven Zone deutlich von rechts oben nach links unten gehende Lage für die dritte negative und positive Zone abgeändert worden.

Krystall Nr. X.

Der aus Striegau stammende, in Fig. 21 und 22 Taf. I in natürlicher Grösse gezeichnete Krystall Nr. X erscheint in Bezug auf die Ausdehnung seiner Flächen sehr unregelmässig gebildet. Auf der Kante (1 *a*, 2) liegt eine schmale Rhombenfläche, die sich auch in einer nahe dabei befindlichen Vertiefung oben links auf der Fläche 2 wiederholt. In einer Vertiefung in der Mitte der Kante (1. 6 *b*) liegt eine kleine glänzende Fläche, die gleichfalls eine Rhombenfläche ist, und also der anderen trigonalen Pyramide angehört.

Ungeachtet der grossen Unregelmässigkeit in der Ausdehnung der äusseren Begrenzungsflächen ist doch die elektrische Vertheilung eine ziemlich regelmässige, und namentlich tritt in demjenigen Theile, wo die Flächen des Hauptrhomboeders (6 *b*, 1 *a*, 2 *b*, 3 *a*) durch ihre Grösse sich auszeichnen, die schiefe Lage der Zonen sehr deutlich hervor, so dass auch bei Umkehrung des Krystalles die Vertheilung im Allgemeinen dieselbe bleibt.

B. Sogenannte linke (in elektrischer Beziehung rechte) Krystalle.

Krystall Nr. XI.

Der kleine vollständig ausgebildete Krystall Nr. XI, den ich der Güte des Herrn Sack in Halle verdanke, stammt ebenso wie der Krystall Nr. I aus der Marmaros, ist aber nicht völlig so klar und auf seinen Flächen nicht so vollkommen eben und glatt wie der Krystall Nr. I. Fig. 23 Taf. II stellt die beiden Ansichten des Krystalles Nr. XI in natürlicher, Fig. 24 sein Netz in achtfach linearer Vergrösserung dar. Die beiden Endpunkte seiner Hauptaxe endigen in vollkommene Spitzen, und die Flächen des Haupt- und Gegenrhomboeders sind deutlich an ihren relativen Grössenverhältnissen zu erkennen. Die Kanten (6. 1 *a*) und (2. 3 *a*) tragen sehr schmale Rhombenflächen, und charakterisiren den Krystall hiedurch als einen sogenannten linken.

Die Vertheilung der Elektricität an diesem Krystalle ergibt sich aus den in Fig. 24 eingetragenen Beobachtungen; ein Vergleich dieser Figur mit Fig. 4 Taf. I lässt sofort den Unterschied zwischen sogenannten linken und rechten Krystallen erkennen.

Es wurde oben S. 358 aus der Beobachtung an rechten Krystallen folgendes Gesetz der Vertheilung hergeleitet: beim Erkalten eines Bergkrystalles gehen die negativen Zonen von einer Fläche des Hauptrhomboeders über die Prismenflächen zu einer nächsten Fläche desselben Rhomboeders am anderen Ende, und entsprechend die positiven Zonen von einer Fläche des Gegenrhomboeders zu einer nächsten Fläche desselben Rhomboeders am anderen Ende, und zwar sind die Richtungen der Zonen den Combinationskanten zwischen den Hauptrhomboeder- und den Rhombenflächen parallel, oder die positiven Zonen enthalten oder kreuzen diejenigen Prismenkanten, an deren Endpunkten die Rhombenflächen auftreten.

Bei den rechten Krystallen folgte aus diesem Gesetze eine schiefe von rechts oben nach links unten gerichtete Lage der elektrischen Zonen.

Ein Blick auf Fig. 24 lehrt nun, dass das zuvor ausgesprochene Gesetz auch für die linken Krystalle gilt; da jedoch bei den linken Krystallen die Combinationskanten der Flächen des Hauptrhomboeders mit den Rhombenflächen eine andere Richtung haben, weil die Rhombenflächen in Bezug auf die Flächen des Haupt- und Gegenrhomboeders gerade auf den anderen abwechselnden Kanten als bei den rechten Krystallen auftreten, so resultirt aus der Anwendung des obigen Gesetzes auf die linken Krystalle eine schiefe Lage der elektrischen Zonen von links oben nach rechts unten. In dieser Verschiedenheit der Richtung der Zonen besteht in elektrischer Beziehung der ganze Unterschied zwischen rechten und linken Bergkrystallen; ein Unterschied, der jedoch so bestimmt heraustritt, dass es bei regelmässiger Bildung eines Krystalles genügt eine einzige Rhomboeder- oder Prismenfläche auf ihr elektrisches Verhalten zu prüfen, um ohne weitere äussere Kennzeichen (d. h. ohne Vorhandensein von Rhomben- und Trapezflächen) zu entscheiden, ob der Krystall ein sogenannter rechter oder linker ist.

Untersuchen wir z. B. eine Hauptrhomboederfläche am oberen Ende, so ist bei den rechten Krystallen die linke grössere Hälfte negativ, und nur der rechte Rand positiv; umgekehrt ist bei den linken Krystallen die grössere rechte Hälfte negativ, und nur der linke Rand positiv (oder schwächer negativ). Gerade entgegengesetzt verhalten sich die Flächen des Gegenrhomboeders.

Krystall Nr. XII.

Dieser von Striegau in Schlesien stammende Krystall ist bereits oben S. 349 beschrieben und die elektrische Vertheilung auf seinen Prismenflächen angegeben worden. Fig. 25 stellt seine Projection und Fig. 26 sein Netz dar. In letzteres sind ausser den auf den Prismenflächen gemachten oben bereits mitgetheilten Beobachtungen auch die auf den Rhomboederflächen ausgeführten Untersuchungen eingetragen worden.

Nur sein oberes Ende läuft in eine Spitze aus und an ihm allein sind die Flächen des Haupt- und Gegenrhomboeders durch ihre relative Grösse deutlich unterschieden; das untere Ende zeigt die so häufig vorkommende Form einer Schneide.

Die schiefe Lage der Zonen von links oben nach rechts unten ist deutlich zu erkennen, namentlich an der Stelle (von 3 *a* über 3 und 4 nach 4 *b*), wo auch am unteren Ende die Fläche des Hauptrhomboeders (4 *b*) durch ihre Grösse sich auszeichnet und also beide zu einer Zone gehörige Flächen in normaler Weise ausgebildet sind. Ferner enthalten die positiven Zonen stets die Kanten, an welchen die Rhombenflächen (wie eine solche in [6. 1 *a*] erscheint) auftreten würden, wenn sie sämmtlich vorhanden wären. Am oberen Ende endlich zeigen sämmtliche Flächen, sowohl des Haupt- als auch des Gegenrhomboeders die normale Vertheilung, während dieselbe am unteren Ende nur auf der Fläche 4 *b* hervortritt, auf allen übrigen Flächen dagegen durch die schneidenförmige Bildung desselben gestört ist.

Krystall Nr. XIII.

Der Krystall Nr. XIII zeichnete sich durch ungemein grosse Klarheit aus, während der Krystall Nr. XII, wenn auch im Allgemeinen durchsichtig, doch nicht völlig rein war; er stammt wahrscheinlich aus dem Dauphiné. In Fig. 27 Taf. II ist er in natürlicher Grösse abgebildet, Fig. 28 stellt sein Netz in doppelter Grösse dar.

Der Krystall ist nur an dem oberen Ende ausgebildet, und zeigt daselbst sämmtliche drei Rhombenflächen auf den abwechselnden Kanten (6. 1), (2. 3) und (4. 5); ausserdem auch unterhalb der oben auf der Kante (2. 3) liegenden Rhombenfläche links auf der Fläche 3 die matte Fläche eines linken Trapezoeders 6 $P \frac{6}{5}$ erster Ordnung. Die

Hauptrhomboederflächen lassen sich sowohl durch die Streifung auf der zuletzt genannten Rhombenfläche als auch durch die Trapezoederfläche erkennen; hiernach sind die Flächen 1 *a*, 3 *a*, 5 *a* die Flächen des Hauptrhomboeders, der Krystall ist also ein sogenannter linker (oder links drehender). Am unteren Ende, das auch noch völlig klar erscheint, ist der Krystall abgebrochen.

Im Glanze der Prismenflächen bemerkt man bei der Reflexion einer Kerzenflamme einen Unterschied; die Flächen 1, 3 und 5, also diejenigen, welche am oberen Ende die Flächen des Hauptrhomboeders tragen, zeigen etwas stärker glänzende Bilder, als die dazwischen liegenden Flächen 2, 4 und 6.

Die Prismenflächen 2, 3 und 4 sind in den unteren Hälften mangelhaft ausgebildet: auf 2 und 3 ist, wie Fig. 27 zeigt, ungefähr in der Mitte wahrscheinlich durch Anlegen an ein anderes Individuum das Niveau der Fläche eingedrückt, und erhebt sich erst wieder ganz unten am Ende. Auch die Fläche 4 wird von einem solchen Eindrucke noch etwas getroffen: dagegen sind die Flächen 6 und (auch fast) 5 und 1 vollkommen ausgebildet.

Auf den Prismenflächen ziehen sich die negativen Zonen von den Hauptrhomboederflächen am oberen Ende abwärts, zeigen hier aber im Ganzen eine geringere Ausdehnung als die positiven; auf den Rhomboederflächen herrscht dagegen die negative Elektricität vor. Während bei sogenannten rechten Krystallen eine Prismenfläche, welche in ihrer ganzen Erstreckung nur eine Art von Elektricität zeigt, auf ihrem linken Rande die stärkste Polarität besitzt (S. 364), tritt die grösste Intensität bei linken Krystallen, wie auf der Fläche 2 oder 6 des vorliegenden, am rechten Rande auf. Sämmtliche Prismenkanten, welche oben die Rhombenfläche tragen, liegen auch hier wieder im Bereiche der positiven Zonen.

Krystall Nr. XIV.

Der Krystall Nr. XIV stammt von Striegau und ist nur an dem einen Ende ausgebildet, an dem anderen, wo er wahrscheinlich angewachsen gewesen, verbrochen. Fig. 29 und 30 Taf. II stellen ihn in natürlicher Grösse dar. Die Prismenflächen waren gut ausgebildet bis auf die Fläche 5 und die linke Kante von 6. Die Flächen 1, 3 und selbst 5, soweit sie eben ausgebildet, erscheinen glänzender als die Flächen 2, 4 und 6; besonders matt ist die Fläche 4.

Der Krystall trug zwei Rhombenflächen, oben auf den Kanten (6. 1) und (2. 3); die Streifung auf der oben an (2. 3) liegenden Fläche bezeichnet die Flächen 1 *a*, 3 *a* und 5 *a* als die Flächen des Hauptrhomboeders, sodass also auch hier, ebenso wie bei den beiden vorhergehenden Krystallen, am oberen Ende die Hauptrhomboederflächen auf den glänzenderen Prismenflächen aufgesetzt sind.

Zwei der positiven Zonen erscheinen am oberen Ende schmäler als weiter abwärts; ein Umstand, der mit der Ausbreitung der negativen Elektricität über die oberhalb derselben befindlichen Rhomboederflächen zusammenhängt. Die Rhombenfläche auf (6. 1 *a*) war überall positiv, dagegen ging durch die Rhombenfläche auf (2. 3 *a*) die Grenze der positiven und negativen Zonen hindurch; von den beiden an der Fläche 2 gelegenen Eckpunkten dieser Fläche war der linke positiv, der rechte unelektrisch; die beiden an 3 *a* gelegenen Endpunkte gehörten bereits der negativen Zone an.*)

Krystall Nr. XV.

Der Krystall Nr. XV (Fig. 31 u. 32 Taf. II), der wahrscheinlich auch aus Striegau stammt, ist nur an seinem oberen Ende ausgebildet, am unteren war er aufgewachsen; im unteren Drittel wird er namentlich gegen das Ende hin undurchsichtig. Unter den Prismenflächen ist die Fläche 4 sehr matt; 1 und 5 sind stark glänzend, und 2 und 6 stehen ihnen im Glanze wenig oder gar nicht nach.

Die Flächen des Hauptrhomboeders sind durch ihre grössere Ausdehnung charakterisirt. Auf der Kante (6. 1 *a*) findet sich die Fläche einer trigonalen Pyramide (Rhombenfläche), so dass der Krystall also zu den sogenannten linken gehört.

Infolge des Undurchsichtigwerdens und Uebergehens in gemeinen Quarz nimmt nach dem unteren Ende hin, wie dies auch schon früher S. 362 hervorgehoben wurde, die Intensität der elektrischen Erregung ab. Infolge einer Störung verschmälert sich die um die Kante (2. 3) liegende positive Zone nach unten hin, was eine etwas anomale Lage der rechts angrenzenden negativen Zone bewirkt; indess lässt sich doch

*) Ich bemerke beiläufig, dass meistens viel mehr Punkte der verschiedenen Flächen auf ihr elektrisches Verhalten untersucht sind, als in die Netze eingetragen werden konnten. So wurden auch die beiden Rhombenflächen an dem Krystall Nr. XIV einer speciellen Prüfung unterworfen.

rechts daneben, also links oben auf der Fläche 1 die glatte Fläche eines linken Trapezoeders erster Ordnung; weiter abwärts zeigt die Kante (6. 1) mehrfache Einschnitte, und in diesen erscheint die Rhombenfläche nebst der gestreiften Fläche eines rechten Trapezoeders zweiter Ordnung (die also ebenfalls auf der Fläche 1 liegt). An beiden Enden der Kante (2. 3) liegen Rhombenflächen, die obere deutlich gestreift parallel ihrer Kante mit (3 *a*); auf der Kante (4. 5 *a*) sieht man nur Spuren einer Rhombenfläche. Die Fläche 4 ist rauh; auf ihr scheint der in der Richtung der Normale auf den Flächen 1 und 4 sehr stark zusammengedrückte Krystall bei seiner Bildung gelegen zu haben; auch die Flächen 6 *a* und der rechte Rand von 5 *a* sind unvollkommen ausgebildet.

Ungeachtet der sehr starken Verzerrung in der äusseren Form erscheint die elektrische Vertheilung an diesem Krystalle nur in der ersten negativen Zone, die nach rechts und oben gedrängt wurde, gestört; was jedenfalls ebenso, wie bei dem Krystall Nr. III, mit der grossen Ausdehnung der Fläche 1 *b* des Gegenrhomboeders zusammenhängt.

Krystall Nr. XVIII.

Bei meinen früheren Untersuchungen hatte ich einen Krystall aus Striegau, der in Pogg. Annal. Bd. 50 Taf. I Fig. 14 abgebildet ist, erst in unversehrtem Zustande auf sein elektrisches Verhalten untersucht, später aus seiner Mitte ein 8,5^{mm} dickes Stück senkrecht gegen die Hauptaxe herausgeschnitten und auch dieses geprüft. In Betreff des unversehrten Krystalles findet sich in dem genannten Bande von Pogg. Annal. S. 611 über das elektrische Verhalten der Prismenflächen die Angabe: Fläche 1 —, 2 +, 3 —, 4 +, 5 — und 6 +. Nach Untersuchung des mittleren Stückes ist S. 614 noch die Bemerkung beigefügt, dass die Pole nicht in der Mitte der Flächen liegen, sondern die obere Schnittfläche nach oben gerichtet, stets auf der dem Beschauer zugewandten Fläche nach rechts hin verschoben sind. Der Krystall wurde damals, wie dies bei allen früheren Versuchen geschah, nur auf einem Bleche liegend erhitzt.

Diese früher angegebene Vertheilung der Elektricität wird nun durch die neueren Versuche vollkommen bestätigt. In Fig. 37 Taf. II ist der Krystall in unversehrter Form, wie er in Pogg. Annal. Bd. 50 Taf. I Fig. 14 abgebildet ist, dargestellt; das ausgeschnittene Stück

Schlussfolgerung, dass der vorliegende Krystall kein einfacher, sondern ein zusammengesetzter ist.

Um diese Ansicht noch weiter zu erhärten, liess ich aus dem Krystall eine Platte $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 39 Taf. II) senkrecht auf seine Hauptaxe herausschneiden und die beiden Schnittflächen poliren. Im Polarisationsapparate erschien bei parallelen Strahlen die Platte nicht gleichfarbig; während jedoch der grössere Theil derselben nur geringe Abweichungen in der Farbennuance zeigte, fanden sich am Rande der Platte in der Nähe der Fläche 3 nach 2 hin, und am Rande der Fläche 5 stärkere Verschiedenheiten. Im convergenten Lichte erschien die Platte überall links drehend, mit Ausnahme des zuvor bezeichneten Theiles in der Nähe der Prismenfläche 3 nach 2 hin; an diesem zuletzt bezeichneten Theile erschienen an einer Stelle Spiralen und zwar ($\alpha 6$ nach oben) links gewundene, so dass hier also gleich dicke Platten rechter und linker Krystalle über einander lagen, und zwar die Platte des rechten Krystalles nach dem oberen Ende hin. In dem grösseren Theile der Platte traten beim Verschieben geringe Aenderungen in der Form der Ringe und der Farbe ihres Centrums ein; in der Nähe der Fläche 2 bildeten sich die allmähligen Uebergänge in die Spiralform.

Die in die Hauptmasse dieses Krystalles eingeschobenen fremden Stücke waren viel grösser als die in den oben S. 364 und 366 beschriebenen rechten Krystallen Nr. VI und Nr. VII beobachteten. Um eine genaue Deutung der eingeschobenen Stücke und ihres Einflusses auf die elektrische Vertheilung geben zu können, würde es übrigens nöthig gewesen sein, noch neue Platten in den verschiedensten Höhen aus dem Krystalle zu schneiden, und der optischen Prüfung oder der Aetzung mit verdünnter Fluorwasserstoffsäure zu unterwerfen. Leider fehlte es hier aber an einem geeigneten Künstler zur Anfertigung dieser Platten; die obige Platte war ebenso, wie die früheren, einfach auf der Drehbank mittelst einer Kupferscheibe aus dem Krystall herausgeschnitten.

Krystall Nr. XX.

Der in Fig. 41 und 42 Taf. II abgebildete Krystall stammt aus Carrara; er zeichnet sich durch seine hohe Klarheit und Durchsichtigkeit aus; ist aber nur am oberen Ende vollkommen ausgebildet, am unteren dagegen abgebrochen; an letzterem Ende sind nur noch Theile von Rhomboederflächen sichtbar.

Die Kante (6. 1) zeigt eine sehr schmale Zuschärfung oder Abstumpfung und Zuschärfung. Am oberen und unteren Ende dieser Kante finden sich auf den Kanten (6. 1 *a*) und (6 *b*. 1) ebenfalls schmale Abstumpfungen (oder Zuschärfungen), die jedoch keine Rhombenflächen, sondern die Flächen eines trigonalen oder hexagonalen Trapezoeders zu sein scheinen; auf der Kante (6 *b*. 1) sind deutlich zwei Flächen zu erkennen; auf der Kante (6. 1 *a*) ist mit Bestimmtheit nur eine Fläche wahrzunehmen, die jedoch gegen 6 eine geringere Neigung hat als gegen 1 *a*. Ausserdem zeigt die Kante (4. 5) in ihrem oberen Theile, soweit derselbe nicht verletzt ist, eine der Kante (6. 1) analoge Abstumpfung oder Zuschärfung.

Die Prismenflächen sind mit Ausnahme der Fläche 4, und geringer ihr benachbarter Stellen auf 3 und 5 unverletzt. Uebrigens ist der Krystall, wie die Beschaffenheit der Prismenflächen nachweist, kein einfacher: auf Fläche 1 findet sich ungefähr $^2/_5$ vom rechten Rande eine mit diesem Rande parallele Naht; eine ungefähr ähnlich gelegene aber viel schwächere gewahrt man auf Fläche 3; dagegen zeigt die Fläche 2 drei solcher Nähte, von denen die beiden links liegenden am deutlichsten hervortreten. Die Fläche 4 lässt wegen ihrer Verletzungen keine Beobachtungen zu; auf den Flächen 5 und 6 endlich ist keine Spur einer Naht sichtbar.

Aus Fig. 42 erkennt man leicht, dass zwei der elektrischen Zonen auf 2 oder 3, ebenso wie die kleine positive Stelle oben rechts auf 4 in die gewöhnliche Vertheilung eingeschoben sind. Die elektrische Vertheilung auf denjenigen Flächen, wo keine Nähte sichtbar werden, also auf den Flächen 5 und 6, und auch zum Theil 1 und 4, weist im Allgemeinen auf einen sogenannten rechten Krystall hin.

Krystall Nr. XXI.

Dieser gleichfalls aus Carrara stammende nur am oberen Ende ausgebildete, am unteren aber abgebrochene äusserst durchsichtige Krystall (Fig. 43 und Fig. 44 Taf. II in natürlicher Grösse abgebildet) ist in noch höherem Grade als der vorhergehende zusammengesetzt; alle seine Flächen mit Ausnahme von 2, auf welcher an der linken Seite ein kleiner Krystall heraustritt, zeigen vielfache Nähte, die Flächen 3 und 4 in ihren Mitten sogar tiefer liegende, den Randkanten parallele Strecken. Am oberen Ende der Prismenflächen finden sich Flächen

spitzerer Rhomboeder, oft nur auf einer Hälfte, wo dann eine Naht die Begrenzung bildet.

Am oberen Ende der Kante (1. 2) liegt auf dem über das allgemeine Niveau der Fläche 2 heraustretenden kleinen Krystalle eine schmale Rhombenfläche, und links darunter (also oben rechts auf 1) eine Trapezoederfläche. Eben diese Bildung wiederholt sich auch in der Mitte der Kante (1. 1 *a*), wo eine starke Naht einsetzt und die linke Hälfte der genannten Kante etwas höher liegt als die rechte. Ferner sieht man am oberen Ende der Kante (3. 4) auf einer Stelle eine Rhombenfläche, auf einer links darunter liegenden durch einen Absatz von der vorhergehenden getrennten Stelle (also oben rechts auf 3) eine Trapezoederfläche; die Kante (6. 1 *a*) zeigt gleichfalls eine schmale Rhombenfläche, so wie links unter ihr (also oben rechts auf 6) eine grosse glänzende Trapezoederfläche.

Die in das Netz eingetragenen Polaritäten beweisen durch ihre vielfachen Wechsel*) und durch ihre ausserordentliche Schwäche ebensó wie die zuvor erwähnte Beschaffenheit der Flächen die grosse Zusammengesetztheit dieses Krystalles.

Schliesslich erwähne ich nur noch, dass grosse schöne, aber gleichfalls vielfach zusammengesetzte Krystalle aus der Schweiz, die ich der Güte des Herrn Prof. Naumann verdanke, gleich dem zuletzt beschriebenen Krystalle, im Allgemeinen sehr schwach elektrisch waren, so dass, wenn auch auf einzelnen Flächen noch eine mässige Spannung beobachtet wurde, dieselbe wiederum auf anderen kaum mit Sicherheit ihrem Zeichen nach bestimmt werden konnte.**)

---

*) Auf der rechten Seite der Fläche 4 wurde zwischen zwei positiven Zonen eine nicht elektrische Stelle beobachtet, die wohl auch als eine schwach negative Zone betrachtet werden darf.

**) Sehr wahrscheinlich haben die grossen dicken von Riess und Rose zu ihren thermoelektrischen Untersuchungen benutzten Exemplare (s. oben S. 324) zu dieser Kategorie gehört, und es findet das Nichtwahrnehmen von elektrischen Spannungen auf den Flächen der Krystalle in dem Vorstehenden seine genügende Erklärung, zumal das von genannten Forschern angewandte Elektrometer jedenfalls nicht so schwache elektrische Erregungen angab, als das von mir construirte, dessen Empfindlichkeit, wie ich bereits S. 343 hervorgehoben habe, möglichst erhöht war.

X. Resultate aus den vorstehenden Untersuchungen.

A. In elektrischer Beziehung.

Durch den glücklichen Umstand, dass es mir gelungen ist, möglichst vollkommene Exemplare der beiden verschiedenen Modificationen des Bergkrystalles zu erlangen, wird die Aufstellung der allgemeinen Gesetze über das thermoelektrische Verhalten dieses Minerals sehr erleichtert; sie reducirt sich grösstentheils auf eine Zusammenstellung der bereits an verschiedenen Orten des vorstehenden Abschnittes als unmittelbares Ergebniss der Beobachtung ausgesprochenen Sätze.

In einem an beiden Enden der Hauptaxe gleich vollkommen ausgebildeten einfachen Bergkrystalle treten beim Erkalten sechs elektrische Zonen, abwechselnd negativ und positiv, auf, und zwar gehen die negativen Zonen von den Flächen des Hauptrhomboeders am oberen Ende schief abwärts zu einer nächsten Fläche eben dieses Hauptrhomboeders am unteren Ende, während die positiven Zonen sich in gleich schiefer Richtung zwischen entsprechenden Flächen des Gegenrhomboeders erstrecken. Wir können hiernach, im Anschluss an die übliche Ausdrucksweise, dem Bergkrystalle sechs elektrische Pole, abwechselnd positiv und negativ, oder drei an ihren Enden entgegengesetzt elektrische Axen, die mit den sogenannten Nebenaxen der sechsseitigen Pyramide zusammenfallen, zuschreiben.

Die schiefe Richtung, in welcher sich die elektrischen Zonen vom oberen Ende nach dem unteren ziehen, ist nun aber bei den beiden Modificationen des Bergkrystalles, den sogenannten rechten und linken Krystallen verschieden; sie ist nämlich stets parallel mit den Streifungen der Rhombenflächen oder parallel mit den Combinationskanten dieser Flächen mit den Flächen des Hauptrhomboeders. Hieraus folgt, dass die positiven Zonen, welche zwischen den Flächen der Gegenrhomboeder liegen, stets über diejenigen Prismenkanten hinweggehen müssen, welche an ihren oberen und unteren Endpunkten Rhombenflächen tragen, oder dass die positiven Pole oder die positiven Endpunkte der elektrischen Axen in die Mitten der eben bezeichneten verticalen Kanten des Prismas fallen, während die negativen Pole oder negativen Endpunkte der elektrischen Axen den dazwischenliegenden Prismenkanten angehören.

in zwei elektrisch verschiedene Hälften getheilt; die an einer Fläche des Hauptrhomboeders liegende Hälfte ist negativ, die an einer Fläche des Gegenrhomboeders liegende dagegen positiv, und zwar geben, wie bereits wiederholt bemerkt, die positiven Zonen über diejenigen verticalen Kanten des Prismas, welche oben und unten die Rhombenflächen tragen. Die Flächen des Hauptrhomboeders am oberen Ende erscheinen auf ihrer Mitte und am linken Rande negativ, am rechten Rande positiv; die Flächen desselben Rhomboeders am unteren Ende verhalten sich ebenso, müssen also auf ihrer Mitte und dem rechten Rande negativ, am linken Rande positiv sein. Ganz in derselben Weise, nur mit entgegengesetzten Elektricitäten treten die Flächen des Gegenrhomboeders auf.

Bei einem sogenannten linken Krystalle gelten dieselben Sätze nur mit den durch die andere Richtung der Zonen bedingten Modificationen. Die Diagonalen, welche auf den Prismenflächen die beiden entgegengesetzt elektrischen Hälften scheiden, gehen von rechts unten nach links oben; aber gerade wie zuvor liegt das negative Flächenstück an der Fläche des Haupt-, und das positive Flächenstück an der Fläche des Gegenrhomboeders, und gehen die positiven Zonen über die mit Rhombenflächen versehenen Kanten hinweg. Die Flächen des Hauptrhomboeders erscheinen am oberen Ende auf ihrer Mitte und dem rechten Rande negativ, am linken Rande positiv, am unteren Ende, in ihrer Mitte und linken Rande negativ, am rechten Rande positiv, während die Flächen des Gegenrhomboeders in entsprechender Weise die entgegengesetzte Polarität darbieten.

Ich habe auf den Flächen der beiden Rhomboeder zuvor beide Elektricitäten, jedoch in verschiedenen Ausdehnungen und Intensitäten angegeben; es fragt sich, ob dies nicht blos eine Folge des Zwischenschiebens der Prismenflächen ist, und ob nicht bei einer gewissen Grösse dieser letzteren auch eine solche Vertheilung, wie wir sie beim Krystall Nr. XI Fig. 24 Taf. II am unteren Ende finden, wo die Flächen des Hauptrhomboeders überall negativ, die des Gegenrhomboeders dagegen überall positiv erscheinen, als eine völlig normale zu betrachten ist. Jedoch wird die Intensität der elektrischen Erregung auf den verschiedenen Punkten einer solchen Fläche verschieden sein müssen, und namentlich an denjenigen Rändern, wo zuvor die entgegengesetzte Polarität angeführt wurde, nur schwach auftreten können.

Die zuvor beschriebene regelmässige Vertheilung der Elektricität am Bergkrystall kann nun aber durch mancherlei Umstände abgeändert werden. Gesetzt der Krystall ist nicht ringsum in gleicher Weise vollkommen ausgebildet, sondern mit seinem einen Ende aufgewachsen, und entwickelt sich erst von hier aus, aus einer trüben verworrenen Masse, zu einer vollkommenen Krystallisation seines oberen Endes: so wird dieses obere Ende für die Vertheilung der Elektricität massgebend und bestimmend sein. Die Flächen des Haupt- und Gegenrhomboeders zeigen die zuvor beschriebene elektrische Vertheilung; von den Flächen des Haupt- und Gegenrhomboeders gehen die negativen Zonen bei den sogenannten rechten Krystallen in schiefer Richtung von rechts oben nach links unten, und bei den sogenannten linken Krystallen in schiefer Richtung von links oben nach rechts unten herab, während von den Flächen des Gegenrhomboeders die positiven Zonen in gleich schiefer Richtung abwärts ziehen, und dabei über die Kanten, welche oben die Rhombenflächen tragen, hinweglaufen. Die Schiefe in der Richtung der Zone ist nach den Umständen sehr verschieden, so dass in vielen Fällen die Grenzen der Zonen nahe mit den Rändern der Prismenflächen parallel laufen.

Durch weitere Störungen in der Krystallisation (Wechsel von rechten und linken Bildungen?) gewinnen einzelne der Zonen eine grössere Ausdehnung als andere, ja es kommen vielfach Fälle vor, in denen eine Zone durch die benachbarten entgegengesetzt elektrischen unterdrückt wird, und sich nur noch durch eine Schwächung der entgegengesetzten Polarität kundgibt. Sehr gewöhnlich drücken sich auch solche Störungen durch die Grössenverhältnisse der Begrenzungsflächen aus, und ich habe im Vorhergehenden wiederholt Anlass genommen, auf den Zusammenhang zwischen anomalen Ausbildungen der Flächen und Störungen der regelmässigen elektrischen Vertheilung hinzuweisen.

Bei ringsum ausgebildeten Krystallen, bei denen beide Enden der Hauptaxe gleich vollkommen erscheinen (beide von gleicher Klarheit und mit grossen Flächen des Haupt- und kleinen Flächen des Gegenrhomboeders in regelmässiger Abwechselung versehen), bleibt, wie bereits S. 357 hervorgehoben, die elektrische Vertheilung ungeändert, wenn man den Krystall umkehrt, d. h. das zuvor als oberes betrachtete Ende zum unteren macht. Dies ist nun nicht mehr der Fall, wenn der Krystall zwar ringsum von Krystallflächen begrenzt, doch an dem einen Ende

eine vollkommenere Bildung (in grösserer Klarheit und regelmässigerer Abwechselung von grossen und kleinen Flächen des Haupt- und Gegenrhomboeders sich aussprechend) zeigt, als an dem anderen. Um in einem solchen Falle, wie z. B. der Krystall Nr. XII Fig. 25 Taf. II ihn darstellt, die Vertheilung der Elektricität zu bestimmen, hat man von dem oberen vollkommeneren Ende auszugehen; auf den Flächen seiner Rhomboeder wird man, wenn keine weiteren Störungen vorliegen, die normale Vertheilung finden; von den Flächen des Hauptrhomboeders gehen dann die negativen und von den Flächen des Gegenrhomboeders die positiven Zonen in mehr oder minderer Schiefe, je nach der Kraft und Regelmässigkeit des unteren Endes, und zwar je nachdem wir es mit einem sogenannten rechten oder linken Krystall zu thun haben, in verschiedenen Richtungen abwärts. Fehlen äussere Kennzeichen zur Bestimmung des Sinnes der Drehung, so ergibt die elektrische Prüfung sowohl der Rhomboeder- als auch der Prismenflächen (vergl. S. 364 u. 371) sofort, ob ein sogenannter rechter oder linker Krystall vorliegt.

Lagern sich Schichten verschiedener Krystalle in verschiedenen Stellungen übereinander, so wird diese Ueberlagerung, falls ungleichnamige Zonen über einander fallen, eine Schwächung in der Intensität der Elektricität bewirken, während die Einkeilung eines Bruchstückes eines Krystalles in einen andern sich ausser durch Schwächung der elektrischen Polarität auch durch mehrfache Abwechselungen in den Zonen bemerklich machen kann.

B. In krystallographischer Beziehung.

Für die Auffassung von Weiss, wonach die Grundform des Bergkrystalles die hexagonale Pyramide, also eine holoedrische Gestalt sein soll, wird sich jetzt Niemand mehr erklären; es scheint also nur die Wahl zwischen der von Hauy und der von Naumann aufgestellten Ansicht übrig zu bleiben; nach ersterer würde der Bergkrystall der scalenoedrischen Abtheilung der hemiedrischen Formen des hexagonalen Systems angehören, während er nach Naumann zu der trapezoedrischen Abtheilung der tetartoedrischen Formen eben dieses Systemes zu stellen wäre.

Aus den vorstehend mitgetheilten Untersuchungen über die thermoelektrischen Verhältnisse des Bergkrystalles lässt sich indess der Nachweis führen, dass auch diese beiden Ansichten in der Natur des Bergkrystalles

nicht begründet sind; die Wahrheit liegt zwischen beiden Ansichten gewissermassen in der Mitte: der Bergkrystall gehört der hemiedrischen Abtheilung des hexagonalen Systemes, jedoch nicht, wie Hauy wollte, der scalenoedrischen, sondern der trapezoedrischen Abtheilung an, wobei ich indess gleich hinzufüge, dass durch eine besondere Eigenthümlichkeit, welche der Bergkrystall eben seines thermoelektrischen Verhaltens wegen besitzen muss, gewisse Gestalten allerdings der von Naumann angenommenen trapezoedrischen Tetartoedrie entsprechend auftreten.

Nach der Meinung der Krystallographen ist bisher die trapezoedrische Hemiedrie noch an keinem Minerale beobachtet worden; ich musste also um so mehr Bedenken tragen, dieselbe beim Bergkrystalle anzunehmen; jedoch lassen die von mir beobachteten elektrischen Phänomene keine Wahl übrig.

Was zunächst die Gruppirung der Flächen an der zwölfseitigen Pyramide (als der allgemeinsten Form der hexagonalen Gestalten) zu gewissen Systemen betrifft, so ist die in der Krystallographie übliche Weise, die über einem Sextanten der Basis gelegenen vier Flächen (zwei obere und die entsprechenden zwei unteren) zu einem Systeme zusammenzufassen, mit dem im Vorhergehenden dargelegten Verhalten des Bergkrystalles nicht vereinbar, weil dieselbe, wenn sie auch schliesslich zu derselben äusseren Gestalt führt, doch eine Beziehung in die Formen trägt, die der Wirklichkeit gerade entgegengesetzt ist.

Wenn bisher die drei Nebenaxen (d. h. die Diagonalen des regelmässigen Sechseckes, welches die Basis der gleichschenkligen sechsseitigen Pyramide bildet) gewissermassen nur eine ideelle Existenz behufs der krystallographischen Ableitungen besassen, so liefern die vorstehenden Untersuchungen den Beweis für ihre physische Existenz. Die zuvor erwähnte Gruppirung der Flächen zu vierflächigen Systemen, welche über einem Sextanten der Basis liegen, ist nun wohl mit einer blos behufs krystallographischer Ableitungen gemachten Annahme dreier Nebenaxen verträglich, dagegen mit der beim Bergkrystall nachweisbaren physischen Existenz dieser Axen unvereinbar, indem sie einerseits die zu einem Endpunkte einer Nebenaxe gehörigen und eben deshalb gleichartigen Flächen auseinander reisst und zwei verschiedenen Systemen zutheilt, und andererseits ungleichartige zu gerade entgegengesetzt beschaffenen Halbaxen gehörige Flächen in ein System vereinigt. Naturgemäss haben wir also, wenigstens beim Bergkrystalle, nicht die über

einem Sextanten der Basis, sondern vielmehr die um den Endpunkt einer Nebenaxe liegenden und eben wegen ihrer Zugehörigkeit zu einer und derselben Halbaxe physisch gleichartigen vier Flächen zu einem Systeme zusammenzufassen.

Bilden wir aus der zwölfseitigen Pyramide die beiden hemiedrischen Körper, indem wir nur die abwechselnden Flächen derselben zur Ausbildung gelangen lassen, so entstehen, je nachdem wir die einen oder anderen Flächen beibehalten, die beiden sich wie rechts zu links verhaltenden hexagonalen Trapezoeder. Gruppirten wir die Flächen nach der bisher üblichen Weise, so würden in diesen Trapezoedern jedes Mal zwei in einer secundären (d. h. den Endpunkt einer Nebenaxe nicht enthaltenden) Mittelkante zusammenstossende Flächen zu einem Systeme gehören; fassen wir dagegen die um eine Halbaxe liegenden Flächen zusammen, so bilden die beiden in einer primären Mittelkante, deren Mitte den Endpunkt einer Halbaxe enthält, zusammenstossenden Flächen ein System. Die vorstehenden Untersuchungen liefern nun durch die Lage der elektrischen Zonen den strengen Beweis, dass beim Bergkrystall das Letztere der Fall ist.

Die ältere Weise der Gruppirung der Flächen entlehnte die Benennung der beiden Trapezoeder als linkes und rechtes von dem Umstande, ob in jedem Sextanten die obere linke oder die obere rechte Fläche zur Ausbildung gelangt ist. Wollten wir ein ähnliches Verfahren auf die Benennung bei der neuen Gruppirung der Flächen anwenden, und also die beiden Trapezoeder nach der Lage ihrer oberen Fläche in Bezug auf die Halbaxe, zu welcher sie gehören, bezeichnen, so würde die Benennung natürlich gerade umgekehrt zu lauten haben, als bisher. Mir scheint aber weniger diese Beziehung der Lage der Flächen gegen ihre Halbaxe, als vielmehr, was freilich eine Folge jener Beziehung, die schiefe Lage des aus den beiden zu einer Halbaxe gehörigen Flächen bestehenden Systemes den charakteristischen Unterschied zwischen den beiden hexagonalen Trapezoedern zu bilden, und von ihr dürfte daher auch die Benennung derselben zu entnehmen sein. Hält der Beschauer ein nach der älteren Auffassung linkes Trapezoeder so vor sich, dass der Endpunkt einer Halbaxe auf ihn gerichtet ist, so zieht sich das ihr zugehörige aus zwei gleichartigen Flächen bestehende System schief von links unten nach rechts oben; denken wir uns in die Hauptaxe dieser Krystallform gestellt, so müssen wir, um vom Schwerpunkte der unteren Fläche zum Schwer-

in Bezug auf die Ausdehnung der Prismenflächen gar kein Unterschied eintreten und in Bezug auf Glanz und Glätte würde ein solcher nur Theile derselben treffen können.

Die sogenannte gleichschenklige sechsseitige Pyramide zweiter Art entsteht aus der ersten sechsseitigen, indem wir die sämmtlichen Nebenaxen im Verhältniss von 1 : 2 verlängern und je durch einen neuen und alten Endpunkt, so wie durch die Endpunkte der Hauptaxe Flächen legen. Unterwerfen wir diese Gestalt dem Gesetze des Hemimorphismus, so dürfen wir nur eine Halbaxe um die andere verlängern, und erhalten dann durch die angegebene Construction eine dreiseitige Pyramide, bei welcher die Mittelpunkte der Grundlinien ihrer Dreiecke in die Endpunkte der nicht verlängerten Halbaxen fallen. Uebrigens entsprechen im vorliegenden Falle, wo wir die sechsseitige Pyramide zweiter Art als hemiedrische Form aufzufassen haben, die Flächen derselben und also auch die Flächen der aus ihr durch Hemimorphismus entstandenen trigonalen Pyramiden nicht sämmtlichen vier um den Endpunkt einer Nebenaxe gelegenen Flächen der zwölfseitigen Pyramide, sondern nur je zwei an einem solchen Endpunkte gegenüberliegenden.

Da die Formen der linken und rechten trigonalen Pyramiden absolut zusammenfallen, so vermag die blosse äussere Gestalt einer trigonalen Pyramide (also abgesehen von der Oberflächenbeschaffenheit) in keiner Weise den Sinn einer Drehung auszudrücken; dagegen weisen ihre Flächen auf einen polarisch entgegengesetzten Zustand der beiden Endpunkte einer Halbaxe hin, und zwar auf ein minderes Hervortreten derjenigen Halbaxen, welche in der Mitte der Basen ihrer Flächen endigen. Auf ein anderes minderes Hervortreten gewisser Halbaxen wies nun auch die ungleiche Ausbildung der Flächen der sechsseitigen Pyramide hin; die beiden minder ausgebildeten Pyramidenflächen sammt den Flächen einer trigonalen Pyramide sind also auf denselben Endpunkt einer Nebenaxe zu beziehen, und während einerseits die ungleich grossen Flächen der sechsseitigen Pyramide zwar eine Drehung andeuteten, dagegen den Sinn derselben nicht bestimmten, andererseits die Flächen der trigonalen Pyramide für sich keine Drehung, sondern nur einen Unterschied in den Endpunkten einer Nebenaxe nachwiesen, vermögen beide vereint mit Bestimmtheit den Sinn der Drehung oder die Zusammengehörigkeit der Flächen mit den Axen zu bezeichnen. Je zwei kleine Flächen der sechsseitigen Pyramide gehören mit dem Eckpunkte oder dem Mittel-

welche die Flächen der trigonalen Pyramide tragen, auftreten, so werden sie doch auch nach Analogie mit den Vorgängen bei den übrigen thermoelektrischen Krystallen an den anderen Halbaxen, welche keine Flächen der trigonalen Pyramide tragen, erscheinen können.

Lassen wir nun endlich die hexagonalen Trapezoeder selbst in aller Strenge hemimorphisch auftreten, so erhalten wir aus jedem der beiden hexagonalen Trapezoeder (sowohl dem rechten als dem linken) zwei trigonale Trapezoeder; und zwar gibt jedes hexagonale Trapezoeder zwei gleichsinnige trigonale Trapezoeder, die sich nur durch ihre Zugehörigkeit zu den entgegengesetzten Endpunkten einer Halbaxe unterscheiden.

Die trigonalen Pyramiden verdankten ihre Entstehung dem Hervortreten der einen oder dem Zurücktreten der anderen Halbaxen; geschieht bei demselben Vorgange die Verlängerung der einen Halbaxen in einem kleineren Verhältnisse als 1 : 2, so entstehen die trigonalen Trapezoeder; die Flächen der letzteren werden also an denselben Halbaxen erscheinen, welche auch die Flächen der trigonalen Pyramiden tragen. Da nun, wie bereits oben bemerkt, in den Flächen der trigonalen Pyramide jede Drehung verschwunden ist, so werden in ihrer unmittelbaren Nähe in verschiedenem Sinne gedrehte Trapezoeder gleichzeitig vorkommen können, wie dies die Beobachtung auch nachweist.

Wird die Hauptaxe der trigonalen Trapezoeder unendlich, so entstehen ditrigonale Prismen, welche Zuschärfungen der abwechselnden Kanten des sechsseitigen Prismas bilden.

Uebrigens werden die trigonalen Trapezoeder und ditrigonalen Prismen, wenn sie auch vorzugsweise denjenigen Kanten des sechsseitigen Prismas angehören, welche die Flächen der trigonalen Pyramide tragen, den bis jetzt beim Hemimorphismus beobachteten Vorgängen gemäss auch an den anderen abwechselnden Kanten erscheinen können, wie dies auch nach Descloizeaux' Beobachtungen in der That Statt findet.

Berichtigungen:

S. 336 Z. 10 von unten lies: finden sich vier, darunter zwei an beiden Seiten u. s. w.

S. 336 Z. 7 von unten ist nach Dauphiné einzuschalten: Krystall Nr. XIV Fig. 29 u. 30 aus Striegau.

TAFELN DER EGERIA

MIT ZUGRUNDELEGUNG

DER IN DEN ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
IN LEIPZIG

VERÖFFENTLICHTEN

STÖRUNGEN DIESES PLANETEN

BERECHNET UND MIT EINLEITENDEN AUFSÄTZEN VERSEHEN

VON

P. A. HANSEN,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des VIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº IV.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1867.

Vom Verfasser übergeben den 1. Mai 1867.
Der Abdruck vollendet den 15. August 1867.

TAFELN DER EGERIA

MIT ZUGRUNDELEGUNG

DER IN DEN ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

IN LEIPZIG

VERÖFFENTLICHTEN STÖRUNGEN DIESES PLANETEN

BERECHNET UND MIT EINLEITENDEN AUFSÄTZEN VERSEHEN

VON

P. A. HANSEN.

EINLEITUNG.

1.

Den hier nachfolgenden Egeriatafeln sind die Störungen dieses Planeten zu Grunde gelegt, die ich in der dritten Abhandlung über die Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten veröffentlicht habe *), auch wurden der Berechnung der definitiven elliptischen Elemente die a. a. O. berechneten mittleren Elemente zu Grunde gelegt. Diese sind:

Für 1851 Dec. 5,0 m. Z. Greenwich

$$\begin{aligned} c &= 18^\circ\ 32'\ 47''.6 \\ n &= 857''.9364 \\ \pi &= 120^\circ\ 11'\ 46''.2 \\ \theta &= 43\ \ 10\ \ 54.3 \\ \varphi &= 4\ \ 59\ \ 47.3 \\ i &= 16\ \ 32\ \ 23.3 \\ \log a &= 0.4110343 \end{aligned}$$

(π und θ: m. Aeq. für 1851.0)

und beziehen sich auf die Ecliptik. Sie wurden indess nicht in dieser Form angewandt, sondern es wurden einige Aenderungen damit vorgenommen. Sie wurden zuerst auf die Epoche 1850 Jan. 0,0 m. Z. Berlin, und das in diesem Zeitpunkt statt findende mittlere Aequinox, und hierauf auf den in demselben Zeitpunkt statt findenden mittleren Aequator hingeführt. Es ergaben sich hiemit für

1850 Jan. 0,0 m. Z. B. und den in diesem Zeitpunkt statt findenden mittleren Aequator nebst Aequinox

$$\begin{aligned} c &= 210^\circ\ 46'\ 40''.0 \\ n &= 857''.9364 \end{aligned}$$

*) S. Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Von P. A. Hansen. Drei, den Abhandlungen der Königl. S. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig BB. V, VI, VII einverleibte Abhandlungen.

$$\pi = 122^\circ\ 35'\ 13''.8$$
$$\theta = 12\ 48\ 37.2$$
$$\varphi = 4\ 59\ 48.9$$
$$i = 37\ 10\ 41.7$$
$$\log a = 0.4110343.$$

Zu diesem Werthe des Elements c, der mittleren Anomalie in der Epoche, ist noch eine Bemerkung zu machen. In der angezogenen Abhandlung wurde bei der Ableitung der mittleren Elemente auf die vom Mars bewirkte kleine Ungleichheit langer Periode keine Rücksicht genommen, und dieses war dadurch legitimirt, dass die Berücksichtigung derselben nur auf das Element c, und nicht auf die übrigen Elemente, wesentlichen Einfluss äussern konnte. Aus diesem Grunde muss der obige Werth des Elements c so betrachtet werden, als wäre in der Epoche der Werth der vom Mars bewirkten Ungleichheit langer Periode Null, und bei Berücksichtigung derselben in den Tafeln muss man daher den Werth derselben für die Epoche von den Werthen derselben für andere Zeiten abziehen, und nur die so entstehenden Unterschiede an den mittleren Anomalien anbringen.

2.

Wenn man die Störungen irgend eines Planeten so in Tafeln bringen will, dass nicht nur die kleinen Glieder vollständige Berücksichtigung finden, sondern auch die Anwendung der Tafeln möglichst bequem wird, so muss man die Form wählen, die ich den Mond- und den Sonnentafeln gegeben habe; allein die Berechnung solcher Tafeln ist sehr mühsam, und konnte sich wohl bei jenen Tafeln lohnen, da daraus jährlich viele Oerter zu berechnen sind. Da hingegen aus den Tafeln der kleinen Planeten jährlich eine weit geringere Zahl von Oertern genau zu berechnen sind, indem die genauen Ephemeriden für die in die Nähe der Opposition mit der Sonne fallenden Zeiten völlig ausreichend sind, so meine ich, dass man bei der Ausarbeitung von Tafeln der kleinen Planeten sich jene mühsame Rechnung ersparen dürfe, wenn gleich dadurch dem Berechner von Oertern aus diesen Tafeln ein wenig mehr Arbeit zugemuthet wird.

Die Berechnung von Tafeln in der Form, wie sie in den älteren Planetentafeln vorkommen, in welchen man jede Ungleichheit für sich in eine Tafel von einfachem Eingange brachte, ist zwar sehr einfach, aber

bei den kleinen Planeten unzweckmässig, weil um hinreichende Genauigkeit im Planetenorte zu erhalten, eine sehr grosse Anzahl von Tafeln eingeführt, und diese um wenigstens Eine Decimale weiter ausgeführt werden müssten, wenn in der Summe der Ungleichheiten nicht die Genauigkeit verloren gehen soll. Auch würde dem Berechner von Planetenörtern durch diese Einrichtung ein Niederschreiben von sehr vielen Zahlen, sowohl bei der Bildung der vielen Argumente, wie beim Ausziehen der Störungen selbst aus den Tafeln erwachsen.

Durch diese Gründe veranlasst habe ich schon vor einer Reihe von Jahren vorgeschlagen die Form von Störungstafeln anzuwenden, die Gauss vor langer Zeit veröffentlicht hat, die zwar dem Berechner von Planetenörtern eine kleine trigonometrische Rechnung zumuthet, aber sonst den Erfordernissen, die man an die Tafeln der kleinen Planeten stellen muss, vollständig genügt. Wir haben schon in den Tafeln der Metis von Lesser ein Beispiel der Anwendung dieser Form. In den hier folgenden Egeriatafeln habe ich auch diese Form, aber etwas anders wie Lesser, eingeführt, und bin überdies darin noch etwas weiter gegangen, dass ich aus den Abtheilungen, die nur kleine Störungsglieder enthalten, Tafeln mit doppeltem Eingange berechnet habe, in welchen das eine Argument während Eines Umlaufs der Egeria um die Sonne unveränderlich ist. Bei den kleinen Störungsgliedern konnten diese Tafeln ohne grossen Zuwachs an Arbeit berechnet werden, wollte man aber auch die Abtheilungen, die grosse Störungscoefficienten enthalten, so ausarbeiten, so würde beträchtliche Arbeit erforderlich werden, und man würde den Tafeln, um ihre Anwendung nicht unbequem zu machen, eine sehr grosse Ausdehnung geben müssen.

3.

Die in der Theorie, die ich in den oben angezogenen Abhandlungen entwickelt habe, vorkommenden Argumente der Störungsglieder haben die folgende allgemeine Form:

$$(i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - \mu c)$$

wo ε die excentrische Anomalie des gestörten Planeten, μ das Verhältniss der mittleren Bewegung des störenden zu der des gestörten Planeten, c und c' die Anomalien während der Zeitepoche, und i und i' ganze

Zahlen sind. Wenn man ausserdem mit g und g' überhaupt die mittleren Anomalien dieser beiden Planeten bezeichnet, wodurch

$$g = nt + c\,,\; g' = n't + c'$$

werden, und den Ausdruck $\mu = \frac{n'}{n}$ zuzieht, so findet man leicht, dass die Argumente auch durch folgenden Ausdruck dargestellt werden,

$$i\varepsilon - i'g' - i'\mu(\varepsilon - g).$$

Da man $ig + i(\varepsilon - g)$ statt $i\varepsilon$ schreiben kann, so geht hieraus hervor, dass der Haupttheil eines jeden Arguments aus der Summe oder dem Unterschiede von irgend zwei Vielfachen der beiden mittleren Anomalien besteht, welcher eine Verbesserung bekommt, die Function des Unterschiedes zwischen der excentrischen und der mittleren Anomalie des gestörten Planeten folglich eine periodische Function ist, die ein gewisses Maximum nicht übersteigen kann.

Bezeichnet man nun mit Q die Summe der Störungen irgend einer der drei Coordinaten des gestörten Planeten, und mit $a(i, i')$ und $b(i, i')$ die numerischen Werthe von irgend zwei, von denselben Indices i und i' abhängigen Coefficienten, so wird

$$\begin{aligned} Q = & \Sigma\Sigma a(i, i') \sin\{i\varepsilon - i'g' - i'\mu(\varepsilon - g)\} \\ & + \Sigma\Sigma b(i, i') \cos\{i\varepsilon - i'g' - i'\mu(\varepsilon - g)\} \end{aligned}$$

Man kann noch einen Schritt weiter gehen, und durch die Einführung einer willkührlichen ganzen Zahl, die ich k nennen werde, Q auf die folgende Form bringen,

$$\begin{aligned} Q = & \Sigma\Sigma a(i, i') \sin\{(i - k)\varepsilon + [kg - i'g'] + (k - i'\mu)(\varepsilon - g)\} \\ & + \Sigma\Sigma b(i, i') \cos\{(i - k)\varepsilon + [kg - i'g'] + (k - i'\mu)(\varepsilon - g)\} \end{aligned}$$

deren Identität mit der vorhergehenden leicht zu erkennen ist. Theilt man nun diesen Ausdruck in so viele Theile, wie verschiedene Werthe von i', mit merklichen Coefficienten behaftet, vorhanden sind, dergestalt dass in jeder Abtheilung i' durchgehends denselben Werth bekommt, und setzt für jede Abtheilung besonders

$$\begin{aligned} p \sin P &= \Sigma a(i, i') \sin(i - k)\varepsilon + \Sigma b(i\; i') \cos(i - k)\varepsilon \\ p \cos P &= \Sigma a(i, i') \cos(i - k)\varepsilon - \Sigma b(i, i') \sin(i - k)\varepsilon \end{aligned}$$

so wird

$$Q = \Sigma p \sin\{P + [kg - i'g'] + (k - i'\mu)(\varepsilon - g)\}$$

Hiemit kann jede Abtheilung der Störungen in Eine Tafel gebracht

werden, und die Zahl aller dieser Tafeln ist für jede Coordinate der Zahl der verschiedenen Werthe, die der Index i' annimmt, gleich.

Es sind hiezu noch die folgenden Bemerkungen zu machen. Die eingeführte ganze Zahl k, die theoretisch betrachtet willkührlich ist, hat den praktischen Nutzen, dass man durch angemessene Bestimmung derselben bewirken kann, dass die numerischen Werthe der Grössen p und P, die für Werthe von $(i-k)\varepsilon$, die den ganzen Umkreis durchlaufen, zu berechnen sind, möglichst kleine Unterschiede bekommen, wodurch die Anwendung der Tafeln sehr erleichtert wird. Man muss um diesen Zweck zu erreichen k demjenigen Werthe des Index i gleich setzen, dem in der betreffenden Abtheilung die grössten Coefficienten angehören. Wenn in einer Abtheilung für zwei Werthe von i grosse Coefficienten vorkommen, dann wird in der Regel dieser Zweck durch das angegebene Mittel nicht erreicht, aber man kann alsdann das eine Paar der Glieder mit grossen Coefficienten ausschiessen, und für sich in eine Tafel mit einfachem Argument bringen, wodurch der Zweck wieder erreicht wird. Es braucht dieses letztere Mittel jedoch nur bei sehr grossen Coefficienten angewandt zu werden. In den nachfolgenden Tafeln fand ich nur nöthig die Glieder, die von $i=1$, $i'=1$, und $i=1$, $i'=3$ abhängen, auszuschiessen, und in besondere Tafeln zu bringen; letztere auch nur in den Störungen der mittleren Anomalie.

Eine andere Bemerkung besteht darin, dass man die Grössen p und P, die nur von ε abhängen, auf einfache Weise als Functionen der mittleren Anomalie g in Tafeln bringen kann. Man braucht zu dem Ende nur im Voraus für die in gleichen Abständen fortschreitende Reihe von Werthen von g, die man zu Argumenten der Tafeln machen will, die entsprechenden Werthe der excentrischen Anomalie zu berechnen, und diese in die Ausdrücke für $p\sin P$ und $p\cos P$ zu substituiren. Man umgeht hiedurch die ausserdem bei der Berechnung von Oertern aus den Tafeln anzubringende Verbesserung des Arguments g. Will man aus einigen der Formen $p\sin(P+$ etc.) die Tafeln mit doppeltem Eingange berechnen, wovon oben die Rede war, dann ist die eben erklärte Elimination von ε durchaus nothwendig.

4.

Ich werde jetzt die Störungsglieder einzeln anführen, die in den nachfolgenden Tafeln enthalten, und aus der dritten der oben angezo-

genen Abhandlungen entnommen sind. Die Coefficienten, die sich im Art. 149 der dritten Abhandlung vorfinden, sind auf die Zeit 1850,0 reducirt.

1) Störungen der mittleren Anomalie.

$i' = 0$

Mit t zu multipliciren.

$$\left.\begin{array}{l} -1''6994 \sin \varepsilon + 0''0398 \sin 2\varepsilon \\ -4.6999 \cos \varepsilon + 0.1018 \cos 2\varepsilon \end{array}\right\} \ldots \text{Tafel 9.}$$

Mit $\left(\frac{t}{100}\right)^2 = t_1^2$ zu multipliciren.

$$\left.\begin{array}{l} -10''271 \sin \varepsilon + 0''035 \sin 2\varepsilon \\ + 2.012 \cos \varepsilon + 0.127 \cos 2\varepsilon \end{array}\right\} \ldots \text{Tafel 10.}$$

Ohne den Factor t.

$$\left.\begin{array}{l} -2''31 \sin \varepsilon + 0''10 \sin 3\varepsilon \\ +0.72 \cos \varepsilon - 0.11 \cos 3\varepsilon \end{array}\right\} \ldots \text{Tafel 11.}$$

a) Vom Jupiter bewirkt.

$i' = 1 = 2, =$ etc.

Ausgeschossene Glieder.

Argument: $\varepsilon - g' - \mu(\varepsilon - g) = K$

$$\left.\begin{array}{l} + 42''09 \sin K - 184''28 \sin 2K + 2''56 \sin 3K + 1''09 \sin 4K - 1''29 \sin 5K \\ -115.20 \cos K - 140.24 \cos 2K - 12.80 \cos 3K + 4.97 \cos 4K - 0.11 \cos 5K \\ \text{Jährliche Aenderungen.} \\ -0''00182 \sin K - 0''00452 \sin 2K - 0''00311 \sin 3K \\ -0.00115 \cos K + 0.00616 \cos 2K - 0.01068 \cos 3K \end{array}\right\} \text{Ta}$$

Ferner $i' = 1,\ k = 0$

Hülfsbogen: $D = g' + \mu(\varepsilon - g)$

$$\left.\begin{array}{rl} p \sin P = & +3''27 \sin \varepsilon - 0''06 \sin 2\varepsilon - 0''01 \sin 3\varepsilon \\ & -12''26 + 5.98 \cos \varepsilon + 2.29 \cos 2\varepsilon - 0.77 \cos 3\varepsilon \\ p \cos P = & -20.28 + 3.27 \cos \varepsilon - 0.58 \cos 2\varepsilon + 0.01 \cos 3\varepsilon \\ & -5.98 \sin \varepsilon + 2.69 \sin 2\varepsilon - 0.77 \sin 3\varepsilon \end{array}\right\} \text{Tafel 8.}$$

Die jährlichen Aenderungen sind hier ihrer Kleinheit wegen weggelassen worden.

$i' = 2,\ k = 1$

Hülfsbogen: $B = g - 2g' + (1 - 2\mu)(\varepsilon - g)$

$$\left.\begin{array}{l}
p \sin P = \qquad -11''18 \sin \varepsilon + 4''28 \sin 2\varepsilon + 0''23 \sin 3\varepsilon \\
\qquad -170''17 + 13.45 \cos \varepsilon + 3.70 \cos 2\varepsilon + 0.09 \cos 3\varepsilon \\
p \cos P = -174.52 + 11.18 \cos \varepsilon + 3.80 \cos 2\varepsilon + 0.27 \cos 3\varepsilon \\
\qquad +13.45 \sin \varepsilon - 2.82 \sin 2\varepsilon - 0.11 \sin 3\varepsilon \\
\text{Jährliche Aenderungen.} \\
p \sin P = \qquad -0''00842 \sin \varepsilon - 0''00090 \sin 2\varepsilon \\
\qquad -0''01753 - 0.00510 \cos \varepsilon + 0.00267 \cos 2\varepsilon \\
p \cos P = +0.02581 + 0.00842 \cos \varepsilon - 0.00090 \cos 2\varepsilon \\
\qquad -0.00510 \sin \varepsilon - 0.00267 \sin 2\varepsilon
\end{array}\right\} \text{Taf. 5.}$$

$i' = 3,\ = 6,\ = 9$

Ausgeschossene Glieder.

Argument: $-[\varepsilon - 3g' - 3\mu(\varepsilon - g)] = K'$

$$\left.\begin{array}{l}
+611''11 \sin K' - 19''45 \sin 2K' + 0''45 \sin 3K' \\
-649.43 \cos K' + 2.18 \cos 2K' + 0.57 \cos 3K' \\
\text{Jährliche Aenderung.} \\
+0''01829 \sin K' - 0''57249 \cos K'
\end{array}\right\} \text{Taf. 13.}$$

Ferner $i' = 3,\ k = 2$

Hülfsbogen: $A = 2g - 3g' + (2 - 3\mu)(\varepsilon - g)$

$$\left.\begin{array}{l}
p \sin P = \qquad +18''05 \sin 2\varepsilon - 0''55 \sin 3\varepsilon \\
\qquad + 25''79 - 7.82 \cos 2\varepsilon + 0.42 \cos 3\varepsilon \\
p \cos P = +736.43^{*)} - 18.91 \cos 2\varepsilon + 0.41 \cos 3\varepsilon \\
\qquad - 8.04 \sin 2\varepsilon + 0.22 \sin 3\varepsilon \\
\text{Jährliche Aenderung.} \\
p \sin P = \qquad -0''00366 \sin 2\varepsilon \\
\qquad +0''06468 + 0.00194 \cos 2\varepsilon \\
p \cos P = +0.01627 + 0.00336 \cos 2\varepsilon \\
\qquad +0.00186 \sin 2\varepsilon
\end{array}\right\} \text{Taf. 4.}$$

$i' = 4,\ k = 2$

Hülfsbogen: $2B = 2g - 4g' + (2 - 4\mu)(\varepsilon - g)$

$$\left.\begin{array}{l}
p \sin P = \qquad + 8''93 \sin \varepsilon + 0''23 \sin 2\varepsilon \\
\qquad - 3''08 - 16.40 \cos \varepsilon - 0.15 \cos 2\varepsilon \\
p \cos P = +31.33 + 3.81 \cos \varepsilon - 0.23 \cos 2\varepsilon \\
\qquad +17.68 \sin \varepsilon - 0.15 \sin 2\varepsilon
\end{array}\right\} \text{. Taf. 6.}$$

---

*) Durch einen Additionsfehler steht in der Abhandlung 746''49, oder auf 1850.0 reducirt 746''43.

$$i' = 5,\quad k = 2$$

$$\text{Hülfsbogen: } C = 2g - 5g' + (2 - 5\mu)(\varepsilon - g)$$

$$\left.\begin{array}{rl} p \sin P = & +\ 1''57 \sin \varepsilon + 2''22 \sin 2\varepsilon \\ & +\ 4''22 - 12.44 \cos \varepsilon + 2.29 \cos 2\varepsilon \\ p \cos P = & +18.07 +\ 0.59 \cos \varepsilon + 2.22 \cos 2\varepsilon \\ & +13.58 \sin \varepsilon - 2.29 \sin 2\varepsilon \end{array}\right\} .\quad \text{Taf. 7.}$$

$$i' = 6,\quad k = 3$$

$$\text{Hülfsbogen} = 3g - 6g' + (3 - 6\mu)(\varepsilon - g)$$

$$\left.\begin{array}{rl} p \sin P = & +2''32 \sin \varepsilon - 1''12 \sin 2\varepsilon + 0''09 \sin 3\varepsilon \\ & +12''15 + 0.33 \cos \varepsilon + 0.37 \cos 2\varepsilon - 0.37 \cos 3\varepsilon \\ p \cos P = & -\ 4.93 + 2.32 \cos \varepsilon - 0.68 \cos 2\varepsilon + 0.09 \cos 3\varepsilon \\ & -0.33 \sin \varepsilon - 0.57 \sin 2\varepsilon + 0.37 \sin 3\varepsilon \end{array}\right\} \text{Taf. 14.}$$

$$i' = 7,\quad k = 3$$

$$\text{Hülfsbogen} = 3g - 7g' + (3 - 7\mu)(\varepsilon - g)$$

$$\left.\begin{array}{rl} p \sin P = & +0''71 \sin \varepsilon - 0''27 \sin 2\varepsilon - 0''10 \sin 3\varepsilon \\ & +1''77 + 0.15 \cos \varepsilon + 0.39 \cos 2\varepsilon - 0.34 \cos 3\varepsilon \\ p \cos P = & -0.57 + 0.87 \cos \varepsilon - 0.27 \cos 2\varepsilon - 0.10 \cos 3\varepsilon \\ & -0.29 \sin \varepsilon - 0.39 \sin 2\varepsilon + 0.34 \sin 3\varepsilon \end{array}\right\} \text{Taf. 18.}$$

$$i' = 8,\quad k = 3$$

$$\text{Hülfsbogen} = 3g - 8g' + (3 - 8\mu)(\varepsilon - g)$$

$$\left.\begin{array}{rl} p \sin P = & +0''79 \sin \varepsilon - 0''10 \sin 2\varepsilon - 0''11 \sin 3\varepsilon \\ & +1''45 + 0.35 \cos \varepsilon + 0.16 \cos 2\varepsilon - 0.13 \cos 3\varepsilon \\ p \cos P = & -0.58 + 0.79 \cos \varepsilon - 0.10 \cos 2\varepsilon - 0.11 \cos 3\varepsilon \\ & -0.35 \sin \varepsilon - 0.16 \sin 2\varepsilon + 0.13 \sin 3\varepsilon \end{array}\right\} \text{Taf. 19.}$$

$$i' = 9$$

Argument: $4g - 9g' + (4 - 9\mu)(\varepsilon - g) = K''$

$$-0''61 \sin K'' - 0''33 \cos K'' \qquad \text{Taf. 11.}$$

Von den vorstehenden Abtheilungen sind die, welche von $i' = 6$, $i' = 7$, $i' = 8$ abhängen, in Tafeln von doppeltem Eingange umgewandelt worden.

b) Vom Saturn bewirkt.

$$i' = 1,\quad k = 1$$

$$\text{Hülfsbogen} = g - g'' + (1 - \mu')(\varepsilon - g)$$

$$\left.\begin{array}{rl} p \sin P = & -0''87 \sin \varepsilon - 0''35 \sin 2\varepsilon \\ & -2''40 - 0.24 \cos \varepsilon + 0.27 \cos 2\varepsilon \\ p \cos P = & -3.96 + 0.87 \cos \varepsilon + 0.35 \cos 2\varepsilon \\ & -0.24 \sin \varepsilon + 0.27 \sin 2\varepsilon \end{array}\right\} .\quad \text{Taf. 16.}$$

$i' = 2,\ k = 1$

$$\text{Hülfsbogen} = g - 2g'' + (1 - 2\mu')(\varepsilon - g)$$

$$\left.\begin{aligned} p \sin P &= +1''59 \sin\varepsilon \\ & +3''80 + 1.78 \cos\varepsilon \\ p \cos P &= +2.03 + 1.21 \cos\varepsilon \\ & -2.91 \sin\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{Taf. 15.}$$

$i' = 3,\ k = 1$

$$\text{Hülfsbogen} = g - 3g'' + (1 - 3\mu')(\varepsilon - g)$$

$$\left.\begin{aligned} p \sin P &= +0''39 \sin\varepsilon - 0''01 \sin 2\varepsilon \\ & +0''93 + 0.32 \cos\varepsilon + 0.21 \cos 2\varepsilon \\ p \cos P &= +0.36 + 0.39 \cos\varepsilon - 0.01 \cos 2\varepsilon \\ & -0.32 \sin\varepsilon - 0.21 \sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{Taf. 17.}$$

Diese drei Abtheilungen sind alle in Tafeln von doppeltem Eingange umgewandelt worden.

c) Vom Mars bewirkt.

$i' = 1$

$$\text{Argument} = -(2g - g'''),\ \text{Verb. unmerklich.}$$

$$-0''29 \sin(2g - g''') - 0''13 \cos(2g - g''') \qquad \text{Taf. 11.}$$

Die mittlere Anomalie und deren Störungen sind in den Tafeln nicht in Secunden, sondern in Decimaltheilen des Grades ausgedrückt worden. Die fünfte Decimale ist in den Störungstafeln als Einheit angenommen worden, und es sind folglich die vorstehenden Coefficienten mit dem Factor multiplicirt worden, dessen Logarithmus = 1.44370 ist. Eine Einheit dieser Angabe der Störungen entspricht demnach 0″036.

2) Störungen des Log. des Radius Vectors.

$i' = 0$

Mit t zu multipliciren.

$$\left.\begin{aligned} &+0''0748 + 0''8530 \cos\varepsilon - 0''0011 \cos 2\varepsilon \\ & -2.3497 \sin\varepsilon - 0.0006 \sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{Taf. 22.}$$

Mit t_1^2 zu multipliciren.

$$\left.\begin{aligned} &+0''557 + 5''166 \cos\varepsilon + 0''077 \cos 2\varepsilon \\ & +1.003 \sin\varepsilon + 0.055 \sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{Taf. 23}$$

Ohne den Factor t.

$$\left.\begin{aligned} &-3''98 + 1''97 \cos\varepsilon + 1''78 \cos 2\varepsilon \\ & +0.23 \sin\varepsilon - 0.49 \sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{Taf. 24.}$$

a) Vom Jupiter bewirkt.

Anm. Da die Argumente und Hülfsbögen sämmtlich dieselben sind wie oben, so lasse ich sie hier und im Folgenden weg.

$i' = 1$

Ausgeschossene Glieder.

$$\left.\begin{array}{l}-14''77\cos 2K+110''14\cos 2K-13''28\cos 3K\\ -40.36\sin 2K-\ 83.85\sin 2K-\ 9.01\sin 3K\\ \qquad\qquad -\ 1''03\cos 4K+\ 1''06\cos 5K\\ \qquad\qquad +\ 3.59\sin 4K-\ 0.05\sin 5K\end{array}\right\}.\ \text{Taf. 25.}$$

Ferner $i' = 1,\ k = 0$

$$\left.\begin{array}{rl}p\sin P = & +3''75\sin\varepsilon+0''14\sin 2\varepsilon-0''65\sin 3\varepsilon\\ & +2''24-1.95\cos\varepsilon-0.45\cos 2\varepsilon-0.03\cos 3\varepsilon\\ p\cos P = & +1.16+3.75\cos\varepsilon-0.26\cos 2\varepsilon+0.65\cos 3\varepsilon\\ & +1.95\sin\varepsilon-0.87\sin 2\varepsilon-0.03\sin 3\varepsilon\end{array}\right\}\ \text{Taf. 30.}$$

$i' = 2,\ k = 1$

$$\left.\begin{array}{rl}p\sin P = & +6''56\sin\varepsilon+0''66\sin 2\varepsilon+0''09\sin 3\varepsilon\\ & +44''10+5.96\cos\varepsilon+0.46\cos 2\varepsilon-0.24\cos 3\varepsilon\\ p\cos P = & -40.47-6.56\cos\varepsilon-0.50\cos 2\varepsilon+0.09\cos 3\varepsilon\\ & +5.96\sin\varepsilon-0.39\sin 2\varepsilon+0.24\sin 3\varepsilon\end{array}\right\}\ \text{Taf. 21.}$$

Bei den vorstehenden Gliedern sind die jährlichen Aenderungen ihrer Kleinheit wegen weggelassen.

$i' = 3,\ k = 2$

$$\left.\begin{array}{rl}p\sin P = & -21''70\sin\varepsilon-\ 4''97\sin 2\varepsilon+0''12\sin 3\varepsilon\\ & -359''03-49.61\cos\varepsilon-10.58\cos 2\varepsilon+0.01\cos 3\varepsilon\\ p\cos P = & +\ 11.94+21.70\cos\varepsilon+\ 4.51\cos 2\varepsilon-0.12\cos 3\varepsilon\\ & -49.61\sin\varepsilon-10.38\sin 2\varepsilon+0.01\sin 3\varepsilon\\ & \text{Jährliche Aenderungen.}\\ p\sin P = & +0''00141\sin 2\varepsilon\\ & -0''00796+0.00151\cos 2\varepsilon\\ p\cos P = & +0.03164-0.00158\cos 2\varepsilon\\ & +0.00121\sin 2\varepsilon\end{array}\right\}\ \text{Taf. 20.}$$

$i' = 4,\ k = 2$

$$\left.\begin{array}{rl}p\sin P = & -10''88\sin\varepsilon-0''08\sin 2\varepsilon+0''11\sin 3\varepsilon\\ & -11''29-\ 5.80\cos\varepsilon-0.20\cos 2\varepsilon-0.10\cos 3\varepsilon\\ p\cos P = & -\ 2.49-10.88\cos\varepsilon+0.08\cos 2\varepsilon+0.11\cos 3\varepsilon\\ & +\ 3.36\sin\varepsilon-0.20\sin 2\varepsilon+0.10\sin 3\varepsilon\end{array}\right\}\ \text{Taf. 28.}$$

$i' = 5,\ k = 2$

$$\left.\begin{aligned} p \sin P &= \qquad -7''03 \sin \varepsilon + 1''62 \sin 2\varepsilon \\ &\quad -2''95 - 1.13 \cos \varepsilon - 1.74 \cos 2\varepsilon \\ p \cos P &= -0.12 - 7.37 \cos \varepsilon + 1.62 \cos 2\varepsilon \\ &\quad + 0.53 \sin \varepsilon + 1.74 \sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{Taf. 29.}$$

$i' = 6,\ k = 3$

$$\left.\begin{aligned} p \sin P &= \qquad +0''16 \sin \varepsilon + 0''24 \sin 2\varepsilon - 0''32 \sin 3\varepsilon \\ &\quad +2''23 + 0.20 \cos \varepsilon + 0.84 \cos 2\varepsilon - 0.11 \cos 3\varepsilon \\ p \cos P &= +5.67 + 0.76 \cos \varepsilon + 0.48 \cos 2\varepsilon - 0.32 \cos 3\varepsilon \\ &\quad +2.64 \sin \varepsilon - 0.52 \sin 2\varepsilon + 0.11 \sin 3\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \text{Taf. 26.}$$

Von diesen Abtheilungen sind die, welche von den Werthen $i' = 1$, $i' = 4$, $i' = 5$, $i' = 6$ abhängen, in Tafeln von doppeltem Eingange gebracht worden.

b) Vom Saturn bewirkt.

$i' = 1$

Argument: $g - g'' + (1 - \mu')(\varepsilon - g) = K'''$

$+1''76 \cos K''' - 1''07 \sin K''' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad$ Taf. 24.

$i' = 2,\ k = 1$

$$\left.\begin{aligned} p \sin P &= \qquad +1''64 \sin \varepsilon \\ &\quad -0''91 - 0.98 \cos \varepsilon \\ p \cos P &= +1.68 + 1.64 \cos \varepsilon \\ &\quad +0.98 \sin \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{Taf. 27.}$$

Von diesen ist die zweite Abtheilung in eine Tafel von doppeltem Argument gebracht worden. Die Störungen alle sind auf Einheiten der sechsten Stelle des Briggischen Logarithmus gebracht, folglich bei der Berechnung der Tafeln mit dem Factor, dessen Logarithmus $= 0.32335$ ist, multiplicirt worden.

3) Störungen der dritten Coordinate, oder der Grösse $\frac{u}{\cos i}$.

$i' = 0.$

Mit t zu multipliciren.

$$\left.\begin{aligned} &\qquad -12''0328 \sin \varepsilon - 0''0007 \sin 2\varepsilon \\ &-0''1667 + 1.9057 \cos \varepsilon - 0.0018 \cos 2\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{Taf. 36.}$$

Mit t_1^2 zu multipliciren.

$$\left.\begin{aligned} &\qquad -0''612 \sin \varepsilon + 0''531 \sin 2\varepsilon + 0''007 \sin 3\varepsilon \\ &+2''159 - 10.860 \cos \varepsilon + 1.098 \cos 2\varepsilon + 0.021 \cos 3\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \text{Taf. 37.}$$

Ohne den Factor t.

$$\left.\begin{aligned} &-0''26 \sin \varepsilon - 0''02 \sin 2\varepsilon \\ +3''62 &- 0.37 \cos \varepsilon - 0.04 \cos 2\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{Taf. 38.}$$

Hier sind die Glieder mit berücksichtigt worden, die im Art. 132 der dritten Abhandlung berechnet worden sind. Die Grösse P ist ihrer Kleinheit wegen übergangen worden.

a) Vom Jupiter bewirkt.

$i' = 1, \; = 2, \; = \text{etc.}$

Ausgeschossene Glieder.

$$\left.\begin{aligned} &-8''13 \sin K - 5''33 \sin 2K - 0''20 \sin 3K + 0''25 \sin 4K \\ &-4.97 \cos K + 3.74 \cos 2K - 0.95 \cos 3K + 0.05 \cos 4K \\ &\qquad\text{Jährliche Aenderung.} \\ &-0''02134 \sin K + 0''00413 \cos K \end{aligned}\right\} \text{Taf. 39.}$$

Ferner $i' = 1, \; k = 0$

$$\left.\begin{aligned} p \sin P &= \qquad\quad -2''08 \sin \varepsilon - 5''28 \sin 2\varepsilon + 0''15 \sin 3\varepsilon \\ &\quad + \; 5''98 + 3.13 \cos \varepsilon - 0.69 \cos 2\varepsilon - 0.01 \cos 3\varepsilon \\ p \cos P &= -10.47 - 2.08 \cos \varepsilon + 5.28 \cos 2\varepsilon - 0.15 \cos 3\varepsilon \\ &\qquad\quad -3.13 \sin \varepsilon - 0.69 \sin 2\varepsilon - 0.01 \sin 3\varepsilon \end{aligned}\right\} \text{Taf. 35.}$$

$i' = 2, \; k = 1$

$$\left.\begin{aligned} p \sin P &= \qquad\quad -8''94 \sin \varepsilon + 0''60 \sin 2\varepsilon \\ &\quad +11''37 - 4.48 \cos \varepsilon - 0.69 \cos 2\varepsilon \\ p \cos P &= -13.09 + 8.94 \cos \varepsilon + 0.50 \cos 2\varepsilon \\ &\qquad\quad -4.48 \sin \varepsilon + 1.01 \sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\} . \quad \text{Taf. 32.}$$

$i' = 3, \; k = 2$

$$\left.\begin{aligned} p \sin P &= \qquad\quad - \; 2''67 \sin \varepsilon + 6''89 \sin 2\varepsilon + 0''02 \sin 3\varepsilon \\ &\quad -95''86 + 12.39 \cos \varepsilon + 4.02 \cos 2\varepsilon + 0.06 \cos 3\varepsilon \\ p \cos P &= -35.25 + \; 2.67 \cos \varepsilon - 6.49 \cos 2\varepsilon - 0.02 \cos 3\varepsilon \\ &\qquad\quad +12.39 \sin \varepsilon + 3.60 \sin 2\varepsilon + 0.06 \sin 3\varepsilon \\ &\qquad\text{Jährliche Aenderung.} \\ p \sin P &= \qquad\quad +0''01667 \sin \varepsilon - 0''00799 \sin 2\varepsilon \\ &\quad +0''02473 - 0.00292 \cos \varepsilon + 0.02268 \cos 2\varepsilon \\ p \cos P &= -0.00155 - 0.01667 \cos \varepsilon + 0.00605 \cos 2\varepsilon \\ &\qquad\quad +0.00292 \sin \varepsilon + 0.02156 \sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\} \text{Taf. 31.}$$

$i' = 4,\ k = 2$

$$\left.\begin{aligned} p \sin P &= \quad -3''56 \sin \varepsilon + 0''20 \sin 2\varepsilon \\ &\quad -2''91 + 1.34 \cos \varepsilon - 0.04 \cos 2\varepsilon \\ p \cos P &= -4.10 - 2.84 \cos \varepsilon - 0.20 \cos 2\varepsilon \\ &\quad +1.00 \sin \varepsilon - 0.04 \sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\} . \quad \text{Taf. 33.}$$

$i' = 5,\ k = 2$

$$\left.\begin{aligned} p \sin P &= \quad -3''02 \sin \varepsilon + 0''19 \sin 2\varepsilon \\ &\quad -0''48 + 2.80 \cos \varepsilon - 0.63 \cos 2\varepsilon \\ p \cos P &= -0.46 - 3.12 \cos \varepsilon + 0.19 \cos 2\varepsilon \\ &\quad -1.94 \sin \varepsilon + 0.60 \sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\} . \quad \text{Taf. 34.}$$

$i' = 6,\ k = 3$

$$\left.\begin{aligned} p \sin P &= \quad +0''06 \sin \varepsilon + 0''08 \sin 2\varepsilon \\ &\quad -2''48 - 0.49 \cos \varepsilon - 0.18 \cos 2\varepsilon \\ p \cos P &= +1.82 - 0.56 \cos \varepsilon + 0.22 \cos 2\varepsilon \\ &\quad +0.85 \sin \varepsilon - 0.40 \sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\} . \quad \text{Taf. 40.}$$

$i' = 7,\ k = 3$

$$\left.\begin{aligned} p \sin P &= \quad -0''20 \sin \varepsilon + 0''16 \sin 2\varepsilon \\ &\quad -0''14 - 0.24 \cos \varepsilon \quad - \\ p \cos P &= +0.14 - 0.20 \cos \varepsilon + 0.16 \cos 2\varepsilon \\ &\quad +0.24 \sin \varepsilon \quad - \end{aligned}\right\} . \quad \text{Taf. 43.}$$

Von diesen Abtheilungen sind die, welche von $i' = 6$ und $i' = 7$ abhängen, in Tafeln von doppeltem Eingange gebracht worden.

b) Vom Saturn bewirkt.

$i' = 1,\ k = 1$

$$\left.\begin{aligned} p \sin P &= \quad -0''12 \sin \varepsilon - 0''07 \sin 2\varepsilon \\ &\quad +0''08 - 0.15 \cos \varepsilon + 0.04 \cos 2\varepsilon \\ p \cos P &= -0.21 + 0.12 \cos \varepsilon + 0.07 \cos 2\varepsilon \\ &\quad -0.15 \sin \varepsilon + 0.04 \sin 2\varepsilon \end{aligned}\right\} . \quad \text{Taf. 42.}$$

$i' = 2,\ k = 1$

$$\left.\begin{aligned} p \sin P &= \quad +0''16 \sin \varepsilon \\ &\quad -0''48 + 0.06 \cos \varepsilon \\ p \cos P &= +0.98 - 0.16 \cos \varepsilon \\ &\quad +0.06 \sin \varepsilon \end{aligned}\right\} . \; . \; . \; . \quad \text{Taf. 41.}$$

Beide diese Abtheilungen sind in Tafeln von doppeltem Eingange gebracht worden.

Diese Störungen der dritten Coordinate sind in den Tafeln vor Allem mit $\cos i$, wo i sich auf den Aequator bezieht, multiplicirt, und in Theile des Kreisradius verwandelt worden, wobei die sechste Decimale desselben zur Einheit angenommen wurde. Dem Logarithmus des Reductionsfactors wurde überdies die Zahl 0,01053 hinzugefügt, die weiter unten erklärt werden wird. Der Logarithmus des Factors, mit dem die vorstehenden Angaben multiplicirt worden sind, ist demnach = 0,59743. Um in der Summe dieser Störungen die sechste Decimale möglichst richtig zu erhalten, wurde auch die siebente mit in den Tafeln aufgenommen, und durch ein Komma von den andern abgesondert. Ich füge noch hinzu, dass alle Störungsglieder überhaupt auf Eine Decimale, manchmal zwei, mehr berechnet worden sind, wie die Tafeln angeben; auch wurden sie später, nach Ermittelung des Correctionsfactors der Jupitermasse, diesem gemäss berichtigt.

5.

Ich werde jetzt noch die Bedeutung der in der Tafel 1 angesetzten Argumente und die Werthe der Constanten angeben, die verschiedenen Tafeln hinzugefügt worden sind.

Arg. 1 ist g, Periode = 100.

A	. . $2g-3g'$	Sind in Bogentheilen ausgedrückt.
B	. . $g-2g'$	
C	. . $2g-5g'$	
D	. . g'	

Arg. 2	. . $4g-9g'$	Perioden = 100.
3	. . $(2g-g''')$ Suppl.	
4	. . $g-g''$	
5	. . $g-g'$	
6	. . $(g-3g')$ Suppl.	

7 . Doppelte mittlere trop. Sonnenlänge, Periode = 50.

8 . Suppl. der trop. Länge des Mondknotens, Per. = 100.

Arg. I.	. . $3g-6g'$	Periode =	48
II.	. . $g-2g''$	» »	48
III.	. . $g-g''$	» »	48
IV.	. . $g-3g''$	» »	36
V.	. . $3g-7g'$	» »	36
VI.	. . $3g-8g'$	» »	36

Arg. VII. . . $2g-4g'$ Periode = 36
VIII. . . $2g-5g'$ » » 18
IX. . . g' » » 12

Die Angaben der mit römischen Zahlen bezeichneten Argumente beziehen sich auf den nächst vorangegangenen Durchgang der Egeria durch das Perihel, und bleiben unverändert bis zu dem darauf folgenden Durchgange. Sie sind neben dem Jahre angesetzt für dessen Anfang sie zuerst Geltung bekommen, aber da der Durchgang der Egeria durch das Perihel im Allgemeinen nicht mit dem Anfange eines Jahres zusammenfällt, so haben sie auch für den Theil des nächst vorangegangenen Jahres Geltung, in welchem die Egeria schon durch das Perihel gegangen ist. Der Zeitpunkt des Wechsels dieser Argumente ist der, in welchem das Arg. 1 von 399,999 in 0 übergeht, also leicht erkennbar.

Allen Argumenten ist bez. die grosse Ungleichheit des Jupiters, oder die des Saturns schon hinzugefügt, auch ist der in der Tafel 48 enthaltenen mittleren Anomalie der Egeria schon der Betrag der vom Mars bewirkten Ungleichheit langer Periode, nemlich

$$+11''90 \sin(11g-5g''')+26''33 \cos(11g-5g''')$$

(S. Art. 131 der dritten Abhandlung) mit Berücksichtigung der hier im Art. 1 dazu erklärten Bedingung hinzugefügt worden.

Da diese Ungleichheiten sich nicht der Zeit proportional ändern, so sind die Bewegungen der so vorbereiteten Argumente strenge genommen nicht gleichförmig; im gegenwärtigen Falle sind jedoch die Ungleichförmigkeiten so unbedeutend, dass sie in der Bewegung derselben für die Theile des Jahres übergangen werden konnten. Es wurden demgemäss die Argumente für die Anfänge der Jahre zwar mit Berücksichtigung der ungleichförmigen Bewegung derselben berechnet, aber für die Bewegungen während der Theile des Jahres das Mittel aus den wahren Bewegungen angesetzt, es kann hiernach an den Werthen der Argumente innerhalb irgend eines Jahres höchstens Eine Einheit Fehler der letzten Stelle entstehen.

Die Tafel 3 enthält die Verbesserungen der Argumente, und zwar die Grössen

$(2-3\mu)(\varepsilon-g)$ für A
$(1-2\mu)(\varepsilon-g)$ » B
$(2-5\mu)(\varepsilon-g)$ » C
$\mu(\varepsilon-g)$ » D

$(4-9\mu)(\varepsilon-g)$ für 2
$(1-\mu')(\varepsilon-g)$ » 4
$(1-\mu)(\varepsilon-g)$ » 5
$-(1-3\mu)(\varepsilon-g)$ » 6

Die Verbesserungen der mit römischen Zahlen bezeichneten Argumente konnten bei der Berechnung der bez. Tafeln sogleich berücksichtigt werden.

6.

Den Tafeln, die auf trigonometrische Rechnung führen, können zwar keine Constanten hinzugefügt werden, den übrigen Tafeln wurden die folgenden hinzugefügt.

1) Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel	Arg.	
Tafel 11.	Arg. 1	71
	» 2	20
	» 3	18
» 12.	» 5	9003
» 13.	» 6	24313
» 14.	» I.	440
» 15.	» II.	180
» 16.	» III.	165
» 17.	» IV.	50
» 18.	» V.	80
» 19.	» VI.	70
	Summa =	34410

Diese Summe ist wieder von den Angaben der mittleren Anomalie der Tafel 48. abgezogen worden.

2) Störungen des Log. des Radius Vectors.

Tafel	Arg.	
Tafel 24.	Arg. 1	14
	» 4	5
» 25.	» 5	356
» 26.	» I.	20
» 27.	» II.	10
» 28.	» VII.	55
» 29.	» VIII.	20
» 30.	» IX.	20
	Summa =	500

Diese Summe ist wieder von den Angaben der Tafel 52 für das Hauptglied des Log. des Radius Vectors, oder $\log \bar{r}$, abgezogen worden.

3) Störungen der dritten Coordinate.

Tafel 38.	Arg. 1	. . .	0
» 39.	» 5	. . .	65.0
» 40.	» I.	. . .	15.5
» 41.	» II.	. . .	5.0
» 42.	» III.	. . .	2.0
» 43.	» V.	. . .	2.5
		Summa =	90.0

Ich habe nicht für zweckmässig erachtet, die entsprechende Constante von der Tafel für den Sinus der Abweichung wieder abzuziehen, welches allerdings hätte geschehen können. Man muss daher bei der Berechnung eines Ortes die Zahl 90.0 von der Summe der erhaltenen Störungen der dritten Coordinate abziehen.

Es sind ausserdem noch die folgenden Constanten eingeführt worden.

Tafel 46,	Arg. 7,	1. Col. . .	23,	3. Col. . .	16
» 47,	» 8,	» . .	322,	» . .	230
		Summa	345,		246

Diese Summen sind von den bez. Columnen der Tafel 44 wieder abgezogen worden.

7.

Die Berücksichtigung der Präcession und Nutation, oder mit anderen Worten, die Hinführung der tabularischen Oerter der Egeria auf den gleichzeitigen Aequator und das gleichzeitige Aequinox, habe ich durch das Verfahren bewirkt, welches ich in den A. N. Nr. 823 u. f. entwickelt habe. Lässt man

α die heliocentrische gr. Aufsteigung,

δ die heliocentrische Abweichung,

beide auf den gleichzeitigen Aequator nebst Aequinox bezogen,

f die wahre Anomalie,

ω die Entfernung des Perihels vom Knoten,

θ die Knotenlänge,

i die Neigung,

die letzten drei auf den mittleren Aequator nebst Aequinox der Zeitepoche, und

(s) die Störungen des Sinus der Abweichung bedeuten, dann wird

$$\alpha = f+\omega+\eta+\theta+\lambda-R-(s)\frac{\operatorname{tg} i\cos(f+\omega+\eta)}{1-\sin^2 i\sin^2(f+\omega+\eta)}$$

$$\sin\delta = \sin i\sin(f+\omega+\eta)+(s)$$

wo

$$(s) = s+\xi\sin(f+\omega+\eta)$$

$$\operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}i\sin 2(f+\omega+\eta)}{1+\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}i\cos 2(f+\omega+\eta)}$$

sind, und s die Summe der planetarischen Störungen des Sinus der Abweichung bedeutet. Die Grössen η, ξ, λ sind aus folgenden Ausdrücken zu berechnen*):

$$\begin{aligned}\eta = {} & A\frac{\cos\theta}{\sin i}(t-t_0)+\left\{a'_1\frac{\cos\theta}{\sin i}-b'_1\frac{\sin\theta}{\sin i}+A^2\frac{\cos i}{\sin^2 i}\sin\theta\cos\theta\right\}(t-t_0)^2\\ & +6''902\frac{\cos\theta}{\sin i}\sin\Theta+9''271\frac{\sin\theta}{\sin i}\cos\Theta\\ & -0''083\frac{\cos\theta}{\sin i}\sin 2\Theta-0''091\frac{\sin\theta}{\sin i}\cos 2\Theta\\ & -0''499\frac{\cos\theta}{\sin i}\sin 2\odot-0''544\frac{\sin\theta}{\sin i}\cos 2\odot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi = {} & -A\cos i\sin\theta(t-t_0)-\left\{a'_1\cos i\sin\theta+b'_1\cos i\cos\theta-A^2\frac{\cos^2 i-\sin^2\theta}{2\sin i}\right\}(t-t_0)^2\\ & -6''902\cos i\sin\theta\sin\Theta+9''271\cos i\cos\theta\cos\Theta\\ & +0.083\cos i\sin\theta\sin 2\Theta-0.091\cos i\cos\theta\cos 2\Theta\\ & +0.499\cos i\sin\theta\sin 2\odot+0.544\cos i\cos\theta\cos 2\odot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda = {} & \{C-A\operatorname{cotg} i\cos\theta\}(t-t_0)+\Big\{c'_1-a'_1\operatorname{cotg} i\cos\theta+b'_1\operatorname{cotg} i\sin\theta\\ & \qquad -A^2\frac{1+\cos^2 i}{2\sin^2 i}\sin\theta\cos\theta\Big\}(t-t_0)^2\\ & +\{15''899-6''902\operatorname{cotg} i\cos\theta\}\sin\Theta-9''271\operatorname{cotg} i\sin\theta\cos\Theta\\ & -\{0.191-0.083\operatorname{cotg} i\cos\theta\}\sin 2\Theta+0.091\operatorname{cotg} i\sin\theta\cos 2\Theta\\ & -\{1.150-0.499\operatorname{cotg} i\cos\theta\}\sin 2\odot-0.544\operatorname{cotg} i\sin\theta\cos 2\odot\end{aligned}$$

in welchen Θ das Supplement der tropischen Länge des aufsteigenden Mondknotens auf der Ecliptik, $\odot$ die mittlere tropische Sonnenlänge, und t_0 die Zeitepoche der Tafeln bedeuten. Die Constanten A, C, a_1', b_1', c_1', haben zufolge der Aenderung der Sonnenbahn im Raume, die ich durch die Theorie erhalten habe, und mit Zugrundelegung der Luni-Solarpräcession

---

*) Die Ableitung dieser Ausdrücke wird weiter unten, in dem Zusatz I. näher erläutert werden.

$= 50''35593$ für 1800.0

folgende numerischen Werthe,

$$A = 20''05117 - 0''00008500\,(t_0 - 1800)$$
$$C = 46.04672 + 0.00028138\,(t_0 - 1800)$$
$$a'_1 = -0''00004250$$
$$b'_1 = +0.00223812$$
$$c'_1 = +0.00014069$$

Einige sehr kleine Glieder zweiter Ordnung, die a. a. O. mit in den Entwickelungen aufgenommen worden sind, konnten hier weggelassen werden, nachdem ich mich überzeugt hatte, dass sie im gegenwärtigen Falle nichts Merkliches geben können.

Für die Egeria fand ich durch die vorstehenden Ausdrücke und numerischen Angaben

$$\begin{aligned}\eta = & +872.28\,(t-1850) + 10.3\left(\frac{t-1850}{100}\right)^2 \\ & +300.3 \sin\Theta - 3.6 \sin 2\Theta - 21.7 \sin 2\odot \\ & +137.4 \cos\Theta - 1.4 \cos 2\Theta + 8.1 \cos 2\odot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi = & -24.968\,(t-1850) - 40.86\left(\frac{t-1850}{100}\right)^2 \\ & - 8.60 \sin\Theta + 0.10 \sin 2\Theta + 0.62 \sin 2\odot \\ & +33.90 \cos\Theta - 0.33 \cos 2\Theta + 2.00 \sin 2\odot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda = & +584.49\,(t-1850) - 49.8\left(\frac{t-1850}{100}\right)^2 \\ & +202.3 \sin\Theta - 2.4 \sin 2\Theta - 14.7 \sin 2\odot \\ & -109.5 \cos\Theta + 1.1 \cos 2\Theta - 6.9 \cos 2\odot\end{aligned}$$

Die Einheiten, in welchen diese Grössen ausgedrückt sind, sind für η und λ die fünfte Decimale des Grades, und für ξ die sechste Decimale des Kreisradius. Die von der Präcession abhängenden Theile sind der Tafel 44 einverleibt worden, die Tafel 46 giebt die von der Solarnutation, und die Tafel 47 die von der Lunarmutation abhängigen Theile.

8.

Ich werde jetzt zeigen, wie man aus diesen Tafeln die auf den gleichzeitigen Aequator und das gleichzeitige Aequinox bezogene heliocentrische grade Aufsteigung und Abweichung bekommt.

Nachdem die Summe der Störungen der mittleren Anomalie, des Logarithmus des Radius Vectors, und der dritten Coordinate (wie ich sie genannt habe) aus den oben erklärten Tafeln, die drei Bögen $\omega + \eta$,

ξ, $\theta+\lambda$ aus den Tafeln 44—47, und die ungestörte mittlere Anomalie aus der Tafel 48 berechnet worden sind, addirt man die Summe der Störungen der mittleren Anomalie zu dieser selbst, und kann damit aus der Tafel 49 die Mittelpunktgleichung entnehmen. Nicht nur diese, sondern zugleich damit addirt man den Bogen $\omega+\eta$ zur gestörten mittleren Anomalie, wodurch sich das Argument der Abweichung oder der Bogen $f+\omega+\eta$ ergiebt. Dieser dient zuerst als Argument der Tafeln 50 und 51, deren erstere die Reduction auf den Aequator oder den Bogen $-R$, und deren andere den Logarithmus des Factors

$$-\frac{\operatorname{tg} i \cos(f+\omega+\eta)}{1-\sin^2 i \sin^2(f+\omega+\eta)}$$

giebt, der zufolge des vor. Art. mit der Summe der Störungen des Sinus der Abweichung zu multipliciren und darauf nebst der genannten Reduction und dem Bogen $\theta+\lambda$ zu $f+\omega+\eta$ zu addiren ist, um die heliocentrische grade Aufsteigung zu erhalten. Diese kann man sogleich addiren, aber das erwähnte Product erfordert eine Vorbereitung, die noch erklärt werden muss.

Man kann demungeachtet ohne Weiteres aus der Tafel 52 das Hauptglied des Log. des Radius Vectors, oder $\log \bar{r}$, entnehmen, und die bez. Störungen dazu addiren, so wie aus der Tafel 53 den Sinus der Declination, dem noch die Störungen hinzuzufügen sind, die eine kleine logarithmische Rechnung erfordern.

Die Grösse u, deren Glieder dem Vorhergehenden nach unter der Bezeichnung »Störungen der dritten Coordinate« in den Tafeln 31 bis mit 43 enthalten sind, hat folgende Zusammensetzung

$$u = \frac{\bar{r}}{a} s$$

(S. Erste Abhandlung Art. 26) wo s wie im vor. Art. die planetarischen Störungen des Sinus der Abweichung sind. Da diese zur Erlangung des vollständigen Werthes des Sinus der heliocentrischen Abweichung des Planeten erforderlich sind, so muss man, der vorstehenden Gleichung zufolge, welche

$$s = u\frac{a}{\bar{r}}$$

giebt, die tabularischen Störungen der dritten Coordinate mit a multipliciren und mit $\bar{r}$ dividiren. Es ist dem Vorhergehenden zufolge

$$\log a = 0.41103$$

zeitigen Aequator nebst zugehörigem Aequinox bezogenen rechtwinklichen Coordinaten desselben durch die folgenden Ausdrücke berechnen,

$$x = r\cos\delta\cos\alpha,\ y = r\cos\delta\sin\alpha,\ z = r\sin\delta$$

und diese auf bekannte Art mit den analogen Sonnencoordinaten verbinden; aber ich kann dieses Verfahren nicht empfehlen. Denn man erreicht durch dasselbe wenigstens in der Nähe der Oppositionen, worauf es hier vorzugsweise ankommt, nicht die entsprechende Genauigkeit, wenn man nicht Logarithmen von mehr Stellen, wie sonst nöthig ist, anwendet. Aus demselben Grunde und noch aus vielen anderen Gründen, muss ich mich gegen die Berechnung der Störungen der rechtwinklichen Coordinaten, sei es durch mechanische Quadraturen, oder auf andere Weise erklären, die eine Anzahl von Uebelständen herbeiführen*). Die zweckmässigsten Formeln zum Uebergange von den auf den Aequator bezogenen heliocentrischen Oertern eines Planeten zu den geocentrischen sind die folgenden:

$$(A)\begin{cases} d\cos\delta'\sin(\alpha'-\alpha) = R\cos D\sin(A-\alpha) \\ d\cos\delta'\cos(\alpha'-\alpha) = R\cos D\cos(A-\alpha) + r\cos\delta \\ d\sin\delta' = R\sin D + r\sin\delta \end{cases}$$

in welchen α', δ', d die geocentrische grade Aufsteigung, Abweichung und Entfernung des Planeten von der Erde, so wie A, D, R die grade Aufsteigung, Abweichung und Radius Vector der Sonne sind. Diese Ausdrücke verlangen, wie alle anderen, drei Functionen des Sonnenorts, nemlich

$$A,\ \log R\cos D,\ \log R\sin D$$

und man kann diese aus den Angaben der Ephemeriden auf mehr wie Eine Weise erhalten. Wenn die Ephemeriden, wie z. B. der Nautical Almanac A und D für den mittleren Mittag enthalten, so kann man daraus durch eine kurze Rechnung ihre Werthe für die mittlere Mitternacht, für welchen Zeitpunkt man gewöhnlich die Ephemeriden der kleinen Planeten berechnet, ableiten, die Befreiung dieser von der Aberration kostet ebenfalls wenig Zeit, und hierauf sind die obigen Functionen leicht zu erhalten.

Wenn die Ephemeriden, die man benutzen will, blos die Sonnen-

*) In früheren Jahren hatte ich einmal die Gelegenheit mich mit Bessel über die Anwendung der Störungen der rechtwinklichen Coordinaten mündlich zu besprechen, und ihm meine Gründe dagegen vorzutragen. Ich fand bei ihm ganz dieselbe Ansicht, er drückte sich auf das Entschiedenste dagegen aus.

länge für den mittleren Mittag geben, so lässt sich daraus auch sehr leicht die Sonnenlänge für die mittlere Mitternacht ableiten, bezeichnet man diese (auch von der Aberration befreit) mit $\odot$, die gleichzeitige wahre Schiefe der Ecliptik mit ε, und die in Theilen des Kreisradius auszudrückende Sonnenbreite über der wahren Ecliptik mit B, so erhält man

$$\begin{aligned}\cos D \sin A &= \cos\varepsilon \sin \odot - B \sin \varepsilon\\ \cos D \cos A &= \cos \odot\\ \sin D &= \sin\varepsilon \sin \odot + B \cos\varepsilon\end{aligned}$$

woraus sich auch leicht die oben verlangten drei Functionen finden lassen. Endlich, wenn die Ephemeride die rechtwinklichen Sonnencoordinaten X, Y, Z giebt, bekommt man auch die oben angeführten Functionen aus den Ausdrücken

$$(B)\begin{cases} R \cos D. \sin A = Y\\ R \cos D. \cos A = X\\ R \sin D. = Z\end{cases}$$

Diese Ausdrücke setzen aber voraus, dass in der Ephemeride sowohl die rechtwinklichen, wie die Polarcoordinaten der Sonne auf das gleichzeitige Aequinox bezogen worden sind; wenn dieses nicht der Fall ist, so wird sowohl diese, wie manche andere Anwendung der Ephemeride weitläuftiger und zeitraubender.

Die obigen Ausdrücke (A) und (B) habe ich zur Berechnung der geocentrischen Oerter der Egeria, deren ich bei der Ausarbeitung der Tafeln bedurfte, angewandt, mich dabei sechsstelliger Logarithmen bedient, und in den Resultaten die Genauigkeit vollständig erhalten, die man überhaupt durch Anwendung sechsstelliger Logarithmen erlangen kann. Es ist hiebei zu bemerken, dass in der Nähe der Opposition $\alpha'-\alpha$ und $A-\alpha$ immer sehr kleine Winkel sind, und $\alpha'-\alpha$ immer kleiner wie $A-\alpha$ ist, der Fehler, den man daher bei dem Uebergange von der heliocentrischen graden Aufsteigung zur geocentrischen befürchten muss, ist bei der Anwendung von sechsstelligen Logarithmen in der Regel durchgehends kleiner wie 0"1. In der geocentrischen Abweichung ist dieser Fehler bei Neigungen wie die der Egeria grösser, und kann auf 0"2 bis 0"3 steigen, aber bei kleineren Neigungen wird er auch kleiner. Hätte ich die geocentrischen Oerter vermittelst der rechtwinklichen Coordinaten berechnen wollen, so hätte ich zur Erlangung von ohngefähr derselben Genauigkeit, mich siebenstelliger Logarithmen bedienen müssen, und

hätte noch über die erlangte Genauigkeit zweifelhaft sein müssen, da die Tafeln schon so eingerichtet waren, dass sie den Logarithmus des Radius Vectors der Egeria nur auf sechs Stellen geben.

10.

Bei der Vergleichung der vorhandenen Beobachtungen der Egeria mit den aus den obigen Elementen und Störungen hervorgehenden Oertern kam ich auf einen Umstand, der nothwendiger Weise nachtheiligen Einfluss auf die Genauigkeit der schliesslich abgeleiteten Elemente geäussert haben muss.

Manche Beobachtungsreihen zeigen freilich eine hinreichend gute Uebereinstimmung unter einander, aber bei manchen anderen ist dieses nicht der Fall, und da man im Voraus nicht wissen kann, welche die besseren sind, so kann man keine ausschliessen, wenn nicht etwa die Unterschiede die sich zeigen so gross sind, dass man sicher erkennen kann, dass Fehler vorgekommen sein müssen. Der Mangel an hinreichend guter Uebereinstimmung bei den Beobachtungsreihen, die man nicht ausschliessen kann, muss aber nothwendiger Weise bewirken, dass die daraus abgeleiteten Normalörter weniger Genauigkeit besitzen, und dieses muss sich schliesslich auf die abgeleiteten Verbesserungen der Elemente übertragen. Die erwähnten Unterschiede verschiedener Beobachtungsreihen finden nicht nur bei den Mikrometerbeobachtungen, sondern auch bei verschiedenen Reihen von Meridianbeobachtungen statt, wo sie doch am Wenigsten vermuthet werden könnten. Von diesen will ich die Resultate einiger Reihen hier anführen.

In der Opposition der Egeria des Jahres 1864 sind Meridianbeobachtungen von Bonn und Leiden vorhanden, deren Vergleichung mit der ersten Ephemeride folgende Resultate gaben:

Bonn

	$\Delta\alpha'$	$\Delta\delta'$
Jan. 11	+70"0	−5"1
» 12	68.1	5.1
» 13	74.5	4.6
» 14	72.1	3.7
» 15	70.9	3.2
Mittel	+71"1	−4"3

Leiden

	$\Delta\alpha'$	$\Delta\delta'$
Jan. 9	+79"6	−3"5
» 11	80.8	6.3
» 12	82.8	3.1
» 13	78.9	4.3
» 14	83.5	3.7
» 16	81.0	3.7
Mittel	+81"0	−4"1

Hier stimmen die Beobachtungen jeder Reihe gut unter einander, und auch die Mittel aus den Abweichungen, die auf jeder dieser beiden Sternwarten erhalten worden sind, lassen nichts zu wünschen übrig. Dahingegen ist das Mittel aus den in Leiden erhaltenen graden Aufsteigungen 9″9 von dem Mittel der in Bonn erhaltenen verschieden. Da ich nicht wissen konnte, welche Beobachtungsreihe der anderen vorzuziehen ist, so habe ich bei der Bildung des Normalortes das Mittel aus allen angewandt. Später habe ich noch Kenntniss von Beobachtungen dieser Opposition, die auf Barcley's Sternwarte in Leyton angestellt worden sind, erhalten, diese geben in grader Aufsteigung sehr nahe das Mittel aus den beiden eben angeführten Reihen.

Ferner sind in derselben Opposition Beobachtungen in Washington und Kremsmünster angestellt worden, von welchen aber nur die letzteren Meridianbeobachtungen sind. Die Vergleichung dieser gab

Washington		$\Delta\alpha'$	$\Delta\delta'$	Kremsmünster		$\Delta\alpha'$	$\Delta\delta'$
Jan.	5	+52″7	−11″9	Jan.	31	+71″9	+28″6
»	6	60.8	11.3	Febr.	2	75.0	− 5.1
»	9	71.3	7.4	»	3	70.0	+ 5.3
»	11	84.6	11.1				

Diese sahe ich mich genöthigt auszuschliessen.

Die Opposition von 1865 bietet einen noch auffallenderen Unterschied zwischen Meridianbeobachtungen dar. Die Vergleichung gab

Leiden		$\Delta\alpha'$	$\Delta\delta'$	Kremsmünster		$\Delta\alpha'$	$\Delta\delta'$
Mai	12	+42″7	−22″8	Mai	20	+65″4	−0″8
»	17	46.0	23.4	»	21	64.3	0.5
»	22	43.0	22.6	»	22	64.9	+0.2
»	24	46.0	22.0	»	27	65.9	−1.4
»	25	46.5	21.6	»	28	67.4	0.1
»	26	48.5	23.6	Mittel		+65″6	−0″5
Mittel		+45″6	−22″7				

Hier stimmen die Beobachtungen einer jeden der vier Reihen wieder sehr gut unter einander, aber zwischen den Beobachtungen an diesen beiden Sternwarten findet ein bedeutender Unterschied statt, der in grader Aufsteigung 20″0 und in Abweichung 22″2 beträgt. Daausserdem in derselben Opposition die Egeria noch in Washington, Paris und

Krakau beobachtet worden ist, und diese Beobachtungen mit den Leidener gut übereinstimmen, so habe ich den Normalort aus den Beobachtungen dieser vier Sternwarten bestimmt, jedoch die Krakauer Abweichungen, eines besonderen dabei vorkommenden Umstandes wegen ausgeschlossen. Diese Beobachtungen von Kremsmünster mussten natürlich auch ausgeschlossen werden, obgleich gegen die Aufnahme anderer Beobachtungen dieser Sternwarte kein Bedenken vorlag.

11.

Im Ganzen sind jetzt, die Entdeckungszeit einbegriffen, die nach der damaligen Opposition statt fand, Beobachtungen der Egeria von zwölf Oppositionen vorhanden. Unter diesen sind mir von den Oppositionen der Jahre 1853 und 1861 nur je zwei Beobachtungen in Washington bekannt geworden, und da diese beiden Oppositionen jedenfalls ein weit kleineres Gewicht wie die übrigen hätten bekommen müssen, so habe ich vorgezogen sie ganz auszuschliessen; den übrigen Oppositionen habe ich mir erlaubt gleiches Gewicht beizulegen, da eine Unterscheidung unter den statt findenden Umständen sehr mislich geworden wäre.

Es wurden nun zuerst durch Vergleichungen mit vorläufigen Ephemeriden die folgenden Normalörter gebildet.

			α'	δ'
m. Z. Berl.	1850 Dec.	6.5	23° 42′ 39.2	+ 9° 39′ 28″7
	1852 März	17.5	177 58 25.4	+24 41 4.2
	1854 Oct.	1.5	23 21 21.2	— 3 42 42.0
	1856 Febr.	24.5	162 16 8.8	+36 8 3.7
	1857 Juni	21.5	261 14 12.1	—41 1 9.6
	1858 Sept.	25.5	10 23 33.6	—14 16 13.9
	1860 Febr.	15.5	137 53 47.8	+44 45 31.5
	1862 Sept.	21.5	356 52 40.0	—23 46 10.0
	1864 Jan.	17.5	114 5 3.6	+47 50 23.9
	1865 Mai	22.5	233 1 1.3	—26 39 3.3

Diese Oerter sind die im Raume statt findenden, und sie beziehen sich alle auf den gleichzeitigen wahren Aequator nebst Aequinox, so wie auf den Erdmittelpunkt.

Ich konnte, wie ich so weit war, schon voraus sehen, dass die Verbesserung der mittleren Bewegung grösser ausfallen würde, wie die der

übrigen elliptischen Elemente, und ich suchte daher zuerst eine vorläufige Verbesserung derselben, mit welcher ich eine Verbesserung der Epoche der mittleren Anomalie verband, da diese mit jener in enger Beziehung steht. Es ergab sich durch diese beiläufig geführte Rechnung

$$\Delta c = -11''1, \quad \Delta n = +0''00877$$

die zuerst für sich allein berücksichtigt wurden.

12.

Die im Art. 1 angeführten provisorischen mittleren Elemente gehen hierauf, und wenn man, statt der täglichen mittleren Bewegung, die Einem Julianischen Jahr entsprechende einführt, in die folgenden über

$$\begin{aligned} c &= 210^\circ\, 46'\, 28''9 \quad \text{für } 1850{,}0 \text{ m. Z. Berl.} \\ n &= 313364''4735 \\ \pi &= 122^\circ\, 35'\, 13''8 \\ \theta &= 18\;\; 48\;\; 37.2 \\ i &= 37\;\; 10\;\; 41.7 \\ \varphi &= 4\;\; 59\;\; 48.9 \\ \log a &= 0.4110314 \end{aligned}$$

(π, θ, i: mittl. Aequinox und Aequator der Epoche)

und aus diesen ergaben sich mit Hülfe von schon vorhandenen provisorischen Störungstafeln, für die Zeiten, die den obigen Normalörtern zukommen, die folgenden geocentrischen Oerter:

α'	δ'
23° 42' 27"6,	+ 9° 39' 28"3
177 58 30.1	+24 41 0.9
23 21 19.3	− 3 42 37.4
162 16 9.2	+36 8 0.7
261 14 21.1	−41 1 13.3
10 23 32.6	−14 16 12.6
137 53 48.8	+44 45 34.3
356 52 41.0	−23 46 6.7
114 5 0.2	+47 50 26.5
233 1 9.5	−26 39 10.9

Diese sind indessen noch nicht mit den Normalörtern des vor. Art. unmittelbar vergleichbar. Denn die Sonnenörter wurden dem Berliner Jahrbuche entnommen, die für eine Anzahl der hier in Betracht kommenden Jahre auf älteren Sonnentafeln beruhen. Es wurde daher für jede der obigen Zeiten der Sonnenort aus den Tafeln von Olufsen und mir berechnet, und dessen Einfluss auf den geocentrischen Ort der

Egeria bestimmt, wodurch die folgenden Verbesserungen erhalten wurden:

Verb. d. ☉ Länge	$\cos\delta' \Delta\alpha'$	$\Delta\delta'$
$-2''9$	$+1''0$	$-0''3$
+1.3	−0.9	+0.1
+2.2	−1.2	−0.5
+1.4	−0.9	+0.4
+3.6	−2.0	+0.2
+4.7	−2.5	−1.2
+2.5	−1.6	+0.3
+2.4	−1.3	−0.5
0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0

die den berechneten Oertern hinzuzufügen sind.

Die Unterschiede im Radius Vector der Sonne und der Breite erwiesen sich so klein, dass sie übergangen werden konnten. Die hierauf erhaltenen Bedingungsgleichungen sind in der folgenden Tafel zusammengestellt.

Δl	$10\Delta n$	$\Delta\varphi$	$\frac{1}{10}\Delta\chi$	Δi	$\Delta\theta$	3600μ	$R-B$.
			1) für $\Delta\alpha'.\cos\delta'$				
+1.0942	+0.0847	−2.2137	−0.1503	−0.3828	+0.4764	+0.2447	$-10''4$
+1.5177	+0.3356	+2.1505	−1.6482	+0.4005	+0.5034	−0.1086	+ 3.4
+1.2304	+0.5919	−2.4528	+0.3550	+0.0290	+0.5791	−0.1829	− 3.1
+1.6657	+1.0270	+1.5814	−2.3130	+0.5635	+0.3376	−0.1387	− 0.6
+1.2954	+0.9643	+1.6413	+1.9509	−0.4097	+0.0872	−0.3693	+ 4.8
+1.1803	+1.0347	−2.2242	+0.8674	+0.2334	+0.5512	−0.3114	− 3.5
+1.8217	+1.8392	+0.6768	−2.8535	+0.4134	+0.1355	+0.1184	− 3.0
+1.1525	+1.4657	−1.9020	+1.3144	+0.3789	+0.4687	−0.3368	− 0.7
+1.9508	+2.7376	−0.5241	−3.0840	+0.0890	+0.0058	+0.1039	− 2.3
+1.2886	+1.9806	+2.4078	+1.0060	−0.5475	+0.3533	−0.3645	+ 7.3
			2) für $\Delta\delta'$				
+0.8865	+0.0758	−1.7301	−0.2585	+0.5050	−0.6165	+0.1983	$-0''7$
−1.0442	−0.2189	−1.2689	+1.3071	+0.5772	+0.7254	+0.1104	− 3.2
+0.9295	+0.4385	−1.8336	+0.4375	−0.0381	−0.7615	−0.1382	+ 4.1
−0.9365	−0.5627	−0.5635	+1.4402	+0.9940	+0.5954	+0.0780	− 2.6
−0.3746	−0.2875	−0.3330	−0.6649	−1.3935	+0.2964	+0.1068	− 3.5
+0.8683	+0.7517	−1.5678	+0.8109	−0.3102	−0.7327	−0.2292	+ 0.1
−0.5253	−0.5165	+0.1378	+0.8862	+1.3226	+0.4337	−0.0341	+ 3.1
+0.7550	+0.9507	−1.1388	+1.0119	−0.5553	−0.6869	−0.2206	+ 2.8
−0.0879	−0.1099	+0.3567	+0.1058	+1.5979	+0.1041	−0.0047	+ 2.6
−0.7395	−1.1410	−1.3481	−0.6575	−0.9465	+0.6108	+0.2092	− 7.6

Aus dem Art. 77 der ersten der oben angezogenen Abhandlungen geht hervor, dass ich die Jupiterstörungen der Egeria mit der Jupitermasse

$$= \frac{1}{1053,92}$$

berechnet habe, die damals wie ich diese Rechnungen anfing für die richtigste galt. Da man aber später Veranlassung gefunden hat diese Masse wesentlich zu vergrössern, so hielt ich es für dienlich einen Correctionsfactor desselben mit unter den Unbekannten aufzunehmen. Dieser ist oben mit μ bezeichnet, und auf bekannte Art zu verstehen, nemlich so dass $(1+\mu)m'$ die verbesserte Masse wird, wenn die der Rechnung zu Grunde gelegte mit m' bezeichnet wird.

Die Bedeutung der übrigen Unbekannten der Bedingungsgleichungen, die Berechnung der Coefficienten derselben, und die Berechnung des Einflusses der Verbesserung der Sonnenörter auf die geocentrischen Oerter des Planeten anbelangend, verweise ich auf den unten angehängten Zusatz III, wo man die erforderlichen Erklärungen und Entwickelungen finden wird.

13.

Die Auflösung der zwanzig Bedingungsgleichungen des vor. Art. durch die Methode der kleinsten Quadrate, wobei einer jeden derselben das Gewicht $= 1$ beigelegt wurde, ergab die folgenden Verbesserungen der oben angeführten provisorischen Elemente.

$$\begin{array}{llll}
\Delta l = +0''62 & & \Delta c = +5''40 \\
\Delta n = -0.0368 & & \\
\Delta\varphi = -1.55 & & \\
\Delta\chi = -4.81 & & \Delta\pi = -4.02 \\
\Delta i = -1.37 & & \\
\Delta\theta = +3.92 & & \\
\mu = +0.002657 & &
\end{array}$$

und die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler $= 43.77$. Aus der Substitution dieser Verbesserungen in die Bedingungsgleichungen selbst folgen die in diesen übrig bleibenden Fehler, und zwar:

	$\Delta\alpha' \cos\delta'$	$\Delta\delta'$
1850	−1″6	+2″6
1852	+2.1	+0.7
1854	+1.5	+2.7
1856	−2.0	−1.1
1857	−0.9	+1.3
1858	−0.4	−2.2
1860	−0.8	+1.9
1862	−0.1	+0.2
1864	+1.1	+0.2
1865	−1.8	+0.5

und aus diesen ergiebt sich die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler = 45.5, mit dem obigen Werthe zur Genüge übereinstimmend.

Fügt man hierauf die obigen Verbesserungen den provisorischen Elementen hinzu, so werden diese schliesslich

$$
\begin{aligned}
c &= 210^\circ\, 46'\, 34''30 \\
n &= 313364''4367 \\
\pi &= 122^\circ\, 35'\; 9''78 \\
\theta &= 18\;\; 48\;\; 41.12 \\
i &= 37\;\; 10\;\; 40.33 \\
\varphi &= 4\;\; 59\;\; 47.35 \\
\log a &= 0.4110315 \\
m' &= \frac{1}{1051.12}
\end{aligned}
$$

die den unten folgenden Tafeln zu Grunde liegen. Die Jupitermasse ist wie man sieht grösser geworden, jedoch nicht so gross, wie andere neuere Berechnungen ergeben haben.

Aus der obigen Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler folgt auf bekannte Art der mittlere zu befürchtende Fehler eines Normalorts = 1″84.

14.

Als Rechenbeispiel soll der Ort der Egeria für 1862 Sept. 21.5 m. Z. Berlin gerechnet werden. Die den Tafeln voran gestellte Hülfstafel giebt hiemit

1862+264.5 Tagen

und man erhält ferner

	Arg. 1	*A*	*B*	2*B*	*C*	*D*
1, 1862	194.806	253° 9'.2	230° 19'.6		308° 9'	152° 30'
2 { 200d	52.960	45 28.48	14 25.71		12 14.4	16 37.1
60d	15.888	13 38.54	4 19.72		3 40.3	4 59.1
4d.5	1.192	1 1.39	19.48		16.5	22.4
	264.846	313 17.6	249 24.5		324 20	174 29
, Arg. 1, Verb.		−3 52.0	−1 13.6		−1 3	−1 25
		309 25.6	248 10.9	136 22	323 17	173 4
bis 8, Arg. 1, *P* {		3 34.7	220 19.9	−1 59	71 42	234 13
		+3.5	+3.7			
		313 3.8	108 34.5	134 23	34 59	47 17
log *p* {		4.31209	3.85399	2.6149	2.530	2.8351
		+15	−24			
log sin		9.86368*n*	9.97676	9.8541	9.758	9.8661

ferner Taf. 1

Arg. I. = 22.90
» II. = 35.72
» III. = 41.86
» IV. = 22.15
» V. = 8.04
» VI. = 34.90
» VII. = 35.45
» VIII. = 13.16
» IX. = 3.05

	Arg. 2	3	4	5	6	7	8	*t*	t_1^2
af. 1, 1862	54	284	116	25.364	313.524	27.7	23.84	12.000	0.0144 }
» 2 200d	46	11	46	34.496	2.432	4.8	2.94	0.548	0.0169 }
60d	14	3	14	10.349	0.730	16.4	0.88	0.164	
4d.5	1	0	1	0.776	0.055	1.3	0.07	0.012	
	115	298	177	70.985	316.741	0.2	27.73	12.724	0.0162
» 3, Arg. 1, Vb.	−4		−4	−2.933	−0.207				
	111		173	68.052	316.534				

Anm. Diese Argumente, die ich hier des Formates wegen von den *A*, *B*, etc. getrennt hingeschrieben habe, pflege ich in der Anwendung gleich neben diesen, auf ein Quartblatt grossen Formates hinzuschreiben. Auch lasse ich immer so viel Platz, dass die durch Logarithmen zu berechnenden Störungsglieder der beiden anderen Coordinaten gleich unter den obigen ähnlichen hingeschrieben, und alle Logarithmen unmittelbar nach einander aufgeschlagen werden können.

—*A*)	= −14994,	Taf. 11, Arg. 1		0
—*B*)	= +6769	» » 2		5
—2*B*)	= + 292	» » 3		17
—*C*)	= + 194	» 12, » 5	{	6548 0
—*D*)	= + 503	» 13, » 6	{	3433 −57
Arg. 1	+1463			
» 1	+ 2	» 14 bis 19		1248
	+9223			11194
	−14994			
Sa. =	− 5771	. . . .		− 5771
				5423 = Summe d. Störungen d. mittl. Anomalie.

		250	260	270
Taf. 14, Verl. Arg.	I.	638	598	568
» 15 » »	II.	274	284	294
» 16 » »	III.	143	159	176
» 17 » »	IV.	61	59	59
» 18 » »	V.	79	87	90
» 19 » »	VI.	63	61	61
	Sa.	1258,	1248,	1248

	A, *B*	
und 21, Arg. 1, *P* {	309° 26'	248°.2
	275 9	139.6
	+4	
	224 39	27.8
log *p* {	2.8230	2.063
	+1	
log sin	9.8468*n*	9.669

						250	260
$p \sin (P+A)$	−468	Taf. 24, Arg. 1	0	Taf. 26 Verl. Arg.	I.	26	26
$p \sin (P+B)$	+ 54	» » 4	1	» 27 » »	VI.	9	9
Taf. 22, Arg. 1	+ 40	» 25, » 5	16	» 28 » »	VII.	59	56
		» 26 bis 30	132	» 29 » »	VIII.	19	23
			149	» 30 » »	IX.	15	17
Sa. =	−374	. . . . .	−374			128,	131,
			−225	= Summe der Störungen des Log. des I			

A, B, etc.	309° 26′	248° 11′	136° 4	323° 3	173° 1
Taf. 31 bis 35, Arg. 1, P	246 37 +12	122 10	190, 9	11, 5	173, 7
	196 15	10 21	327, 3	334, 8	346, 8
$\log p$	2.6466 −5	2.0142	1.110	1.133	1.564
$\log \sin$	9.4469n	9.2545	9.732n	9.629n	9.959n

							250
$p \sin (P+A)$	−115.6		Taf. 38, Arg. 1	13.9	Taf. 40, Verl. Arg.	I.	8.6
$p \sin (P+B)$		+ 18.5	» 39, » 5	4.5	» 41 » »	II.	7.9
$p \sin (P+2B)$	− 7.0			0	» 42 » »	III.	0.7
$p \sin (P+C)$	− 5.8		» 40 bis 43	20.3	» 43 » »	V.	1.2
$p \sin (P+D)$	− 8.4			38.7			18.4
constante	− 90.0						
Taf. 36, Arg. 1		+428.9					
» 37 »		+ 0.5					
	−226.8						
	+447.9						
Sa. =	+221.1 . .		. . . . . .	+221.1			
				+259.8	= Summe der Störungen d		

Coordinate = u.

	$\omega+\eta$	ξ	$\theta+\lambda$
Taf. 44, 1862	103⁰87579	−300.2	18⁰87928
» 45 200ᵈ	478	− 13.8	320
» 45 60ᵈ	143	− 4.1	96
» 45 4ᵈ.5	11	− 0.3	7
» 46, Arg. 7	30	+ 2.0	10
» 47 » 8	606	− 14.0	448
Sa. =	103⁰88847	−330.4	18⁰88806

Taf. 48 1862	174⁰98087
200ᵈ	47.66364.1
60	14.29909.2
4.5	1.07343.2
mittl. Anom.	238⁰01604
Störungen	5423
nz =	238⁰07027

Taf. 51, log factor = 0.6233n; log const. = 0.4 ; log ξ

log (s) = 2.5869 ; log u = 2.4147 log sin ($f+\omega+\eta$)

8.2102n log $\bar{r}$ = 0.4322

Zahl = −1623 log s = 2.3825 Zabl

s

(s)

288⁰07027

Taf. 49, Mittlp. Gl. = −7.89251
$\omega+\eta$ = 103.88847
$f+\omega+\eta$ = 333⁰97623
Taf. 50, Red. = +4.76690
wegen (s) = −1623
$\theta+\lambda$ = 18.88806
α = 357⁰61496

oder durch die Hülfstafel

α = 357⁰36′53″9

Taf. 52, log $\bar{r}$ = 0.432198,
Stör. = −225
log r = 0.431973

Taf. 53 . . . −0.26
(s) =
sin δ = −0.26
log sin δ = 9.4228
log r = 0.4319
log cos δ = 9.9842

Aus dem Berl. Jahrbuche für 1862 berechnete ich

$A = 178^\circ\, 47'\, 36''3$, $\log R \cos D = 0.001369$, $\log R \sin D = 7.962128$

und hiemit ergab sich durch die Ausdrücke(A) des Art. 9

$= 181^\circ 10' 42''4$, $\log\sin(A-\alpha)$	$= 8.318156n$,	$\log R\cos D \sin(A-\alpha)$	$= 8.314525n$,	$\log R \sin D$	$= 7.962128$
$\log R \cos D$	$= 0.001369$	$\log\cos(\alpha'-\alpha)$	$= 9.999964$	subtr. log	$= -5596$
$\log\cos(A-\alpha)$	$= -92n$		0.205304	$\log r \sin\delta$	$= 9.854799n$
$\log R\cos D\cos(A-\alpha)$	$= 0.001277n$	$\log\operatorname{tg}(\alpha'-\alpha)$	$= 8.109221$	$\log d \sin\delta'$	$= 9.849203n$
subtr. log	$= -210889$	$\alpha'-\alpha$	$= -0^\circ 44' 12''8$	$\log\cos\delta'$	$= 9.964504$
$\log r \cos\delta$	$= 0.416198$	α	$= 357\ 36\ 53.9$		0.205340
		α'	$= 356^\circ 52' 41''6$	$\log\operatorname{tg}\delta'$	$= 9.643863n$
				δ'	$= -23^\circ 46' 10''0$
				$\log d$	$= 0.243839$

Diese Werthe von α' und δ' bekommen noch die oben angeführte Verbesserung wegen Fehler der angewandten Sonnenlänge.

Zusatz I.

15.

In der oben angezogenen, in den A. N. Nr. 823 u. f. abgedruckten Abhandlung habe ich einige Relationen und numerische Ausdrücke, ohne ihre Ableitung anzuführen, aufgestellt, weil ich meinte annehmen zu dürfen, dass jeder Astronom sie sich richtig würde ableiten können. Dass dieses jedoch nicht ohne Ausnahme der Fall ist, habe ich dadurch in Erfahrung gebracht, dass mir Zuschriften zugegangen sind, die unhaltbare Bedenken gegen die eine oder die andere dieser Relationen enthalten. Ich will daher hier Gelegenheit nehmen die Ableitung dieser Relationen zu geben, in soweit dieses durch trigonometrische Behandlung geschehen kann. Die erste Grundlage aller dieser Relationen bildet die Theorie der Bewegung der Erde um die Sonne, oder die Sonnenbewegung, und die Theorie der Umdrehung der Erde um ihre Achse, aber es würde viel zu weit führen, wenn ich diese beiden Theorien hier von Neuem entwickeln wollte, und aus diesem Grunde muss ich sie als bekannt annehmen.

Ich werde hier auch nur die Reduction der Planeten auf den gleichzeitigen Aequator und den gleichzeitigen Frühlingspunkt, oder Aequinox, behandeln, da diese zusammengesetzter ist wie die Reduction auf die homologe Ecliptik.

Die in der angezogenen Abhandlung mit t_0 bezeichnete Zeit fällt in

dem Falle, wo die absoluten Störungen berechnet sind, und in Tafeln gebracht werden sollen, mit der dort t_{00} genannten Zeit zusammen, und ich werde daher hier diese beiden Zeitpunkte für identisch halten, und mit t_0 bezeichnen. Vorläufig werde ich auch t_0 mit T für identisch halten, weil ich meine, dass die Ableitungen dadurch vereinfacht werden, und erst gegen das Ende dieses Aufsatzes werde ich t_0 von T absondern. Die Figuren, aus welchen die erforderlichen Relationen entnommen werden können, werde ich hier beifügen.

Als Einleitung zu der eigentlichen Aufgabe werde ich die Relationen zwischen der Luni-Solarpräcession und der allgemeinen Präcession, so wie zwischen der veränderlichen und einer constanten Schiefe der Ecliptik ableiten, und vor Allem die Ausdrücke aufstellen, die aus der Theorie der Sonnenbewegung und der der Umdrehung der Erde um ihre Achse als bekannt betrachtet werden müssen.

16.

Sei T eine bestimmte, und t irgend eine unbestimmte, in Julianischen Jahren auszudrückende Zeit, g die Neigung, und m die Länge des aufsteigenden Knotens der zur Zeit t statt findenden Ebene der Ecliptik in Bezug auf die zur Zeit T statt findende, und das dieser Zeit zukommende Aequinox, dann giebt die Theorie der Sonnenbewegung g und m in der folgenden Form:

$$\sin g \sin m = a(t-T)+a'(t-T)^2$$
$$\sin g \cos m = b(t-T)+b'(t-T)^2$$

wo a, a', b, b' sich als numerische Coefficienten darstellen, von welchen a und b von der ersten, a' und b' hingegen von der zweiten Ordnung in Bezug auf die Massen der störenden Planeten sind. Die Werthe dieser Coefficienten, die ich bei der Bearbeitung der Sonnentheorie, unter der Annahme des Anfangs des Jahres 1800 für T_1 gefunden, und den Sonnentafeln einverleibt habe, sind die folgenden:

$$a = +0''057723, \quad a' = +0''000018870$$
$$b = -0.467698, \quad b' = +0.000005623$$

Sei ferner ε die Neigung des Aequators zur Zeit t gegen die Ecliptik zur Zeit T, (ε) dieselbe zur Zeit T, und ψ die Zurückweichung der Aequinoctialpunkte auf der Ecliptik zur Zeit T, während des Zeitraums

$t-T$, also ψ die Luni-Solarpräcession sammt der Nutation, dann giebt die Theorie der Umdrehung der Erde um ihre Achse

$$\psi = \zeta(t-T)+\zeta b \cot g\, 2(\varepsilon)(t-T)^2+\Delta\psi$$
$$\varepsilon = (\varepsilon)+\tfrac{1}{2}\zeta a(t-T)^2+\Delta\varepsilon$$

*) wo ζ ein numerischer Coefficient — die Luni-Solarpräcession für die Zeit T — ist, der gleichwie (ε) nur durch Beobachtungen ermittelt werden kann, und $\Delta\psi$ und $\Delta\varepsilon$ die Nutation der Länge und der Schiefe der Ecliptik bedeuten, die vom Werthe von ζ und anderen bekannten Grössen abhängen. Die numerischen Werthe, die ich in der angezogenen Abhandlung zu Grunde gelegt habe, sind die folgenden, die ich aus Bessels Bestimmung der Präcession abgeleitet habe:

$$(\varepsilon) = 23^0\, 27'\, 54''80$$
$$\zeta = 50''35593$$
$$\Delta\psi = +17''332 \sin\Theta - 0''208 \sin 2\Theta - 1''254 \sin 2\odot$$
$$\Delta\varepsilon = +\ 9'''271 \cos\Theta - 0.091 \cos 2\Theta + 0.544 \cos 2\odot$$

die sich auch auf $T = 1800$ beziehen, und in welchen Θ das Supplement der tropischen Länge des aufsteigenden Mondknoten auf der Ecliptik, und $\odot$ die tropische Sonnenlänge bedeuten. Die Säcularänderungen der Nutationscoefficienten habe ich auch berechnet, aber so unbedeutend gefunden, dass sie durchaus keine Berücksichtigung verdienen.

17.

Ehe wir die Hauptaufgabe vornehmen, sollen die Ausdrücke für die allgemeine Präcession und Schiefe der Ecliptik abgeleitet werden, und dazu die folgende Figur dienen, die uns auch weiter unten nützlich werden wird.

Die Linien dieser Figur sollen grösste Kreisbögen auf einer Kugeloberfläche von unbestimmtem Halbmesser vorstellen, und ihre Bedeutung ist in der Figur angezeigt. Sie stellen die Ecliptik und den Aequator in den zwei von einander verschiedenen Zeitpunkten t und T dar, und es sind demzufolge, und da die Bewegung von der linken zur rechten gedacht wird, der Punkt B das Frühlingsäquinox zur Zeit T, so wie T dasselbe zur Zeit t.

*) Bei Poisson kommt im Coefficienten von $(t-T)^2$ des Ausdrucks von ψ noch ein, von der Säcularänderung der Excentricität der Erdbahn abhängiges, Glied vor, dessen numerischer Werth aber so klein ist, dass ich meine es weglassen zu dürfen.

$$\lambda = \frac{\sin g \sin m}{\sin \varepsilon} + \frac{\psi}{\sin \varepsilon} \sin g \cos m - \frac{\cos \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon} \sin^2 g \sin m \cos m$$

Substituirt man nun die eben gegebenen Ausdrücke von $\sin g \sin m$, $\sin g \cos m$, ψ, ε, so erhält man

$$\varepsilon_1 = (\varepsilon) + b(t-T) + \{b' - \tfrac{1}{2}a\zeta + \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{cotg}(\varepsilon)\}(t-T)^2 + \Delta\varepsilon$$

$$\psi_1 = \{\zeta - a \operatorname{cotg}(\varepsilon)\}(t-T)$$

$$+ \left\{\tfrac{1}{2}ab(1+2\operatorname{cotg}^2(\varepsilon)) - a' \operatorname{cotg}(\varepsilon) - \frac{\zeta b}{2 \sin(\varepsilon)\cos(\varepsilon)}\right\}(t-T)^2 + \Delta\psi$$

$$\lambda = \frac{a}{\sin(\varepsilon)}(t-T) + \left\{\frac{a'}{\sin(\varepsilon)} + \frac{\zeta b}{\sin(\varepsilon)} - ab\frac{\cos(\varepsilon)}{\sin^2(\varepsilon)}\right\}(t-T)^2$$

indem die Producte von $\Delta\psi$ und $\Delta\varepsilon$ mit a und b ganz unmerklich sind.

Die allgemeine Präcession ψ_1 ist in der angezogenen Abhandlung eben so bezeichnet, und unter der Form

$$\psi_1 = c(t-T) + c'(t-T)^2 + N$$

aufgestellt worden, die Vergleichung mit dem Vorhergehenden giebt daher

$$c = \zeta - a \operatorname{cotg}(\varepsilon)$$

$$c' = \tfrac{1}{2}ab(1+2\operatorname{cotg}^2(\varepsilon)) - a' \operatorname{cotg}(\varepsilon) - \frac{\zeta b}{2\sin(\varepsilon)\cos(\varepsilon)}$$

$$N = \Delta\psi$$

Durch die Substitution der oben angeführten numerischen Werthe bekommt man hieraus

$$c = 50''22295, \quad c' = +0''00011207$$

wie in der Abhandlung, und der dort angegebene Werth von N stimmt auch mit dem hier angegebenen Werthe von $\Delta\psi$ überein. Substituirt man ferner dieselben numerischen Werthe in den obigen Ausdruck für ε_1, so ergiebt sich

$$\varepsilon_1 = 23^0 27' 54''80 - 0''467698(t-T) - 0''000001405(t-T)^2$$
$$+ 9''271 \cos\Theta - 0''091 \cos 2\Theta + 0''544 \cos \odot$$

wo, gleich wie in dem numerischen Ausdruck für ψ_1, $T = 1800$ zu setzen ist. Auch dieser Ausdruck ist identisch mit dem in der angezogenen Abhandlung gegen das Ende des Art. 18 angeführten Werthe derselben Grösse, wobei indess bemerkt werden muss, dass dort durch

Versehen in der Nutation 0"089 statt 0"091 und 0"551 statt 0"542 angesetzt worden sind, welche Unterschiede aber keinen Belang haben*).

Der Bogen λ kommt in der angezogenen Abhandlung nicht vor, wird hier aber weiter unten gebraucht werden.

19.

Wir kommen jetzt zu der Hauptaufgabe, die darin besteht, die Grössen

$$\alpha = \sin\varphi \sin k$$
$$\beta = \sin\varphi \cos k$$

durch bekannte Grössen auszudrücken. Es bedeuten hier φ die Neigung des Aequators zur Zeit t gegen den Aequator zur Zeit t_{00} oder hier t_0, und k die grade Aufsteigung des aufsteigenden Knotens jenes auf diesem. Zufolge des Art. 15 soll aber hier vorläufig

$$t_{00} = t_0 = T$$

gesetzt werden, und es sind daher zunächst nicht die vorstehenden, sondern die folgenden Grössen

$$\alpha_2 = \sin\varphi_2 \sin k_2$$
$$\beta_2 = \sin\varphi_2 \cos k_2$$

wo φ_2 die Neigung des Aequators zur Zeit t gegen den zur Zeit T, und k_2 die von dem zur Zeit T statt findenden Aequinox gezählte, grade Aufsteigung des aufsteigenden Knotens jenes auf diesem. Wenden wir uns nun zur Figur des Art. 17, so ist sogleich zu erkennen dass

$$BGF = \varphi_2$$
$$BG = k_2$$

sind, und macht man, mit Rücksicht auf den Inhalt der Anmerkung zum Art. 17, $GE = GB$, so erkennt man, dass der Bogen FE die Zurückweichung der Aequinoctialpunkte auf dem Aequator während der Zeit $t-T$ ist. Sei

$$FE = \psi_2$$

hiemit, und mit Zuziehung der im Art. 17 schon eingeführten Bezeichnungen der übrigen Theile der Figur, ergiebt sich, dass in dem sphärischen

*) Ich darf nicht unterlassen, hier anzuführen, dass die Coefficienten der Aenderungen der beiden Präcessionen, der Schiefe der Ecliptik u. s. w. die Bessel in den »Tabulae Regiomontanae« angewendet, bedeutend unrichtig sind.

Dreieck CBG die Seiten und die gegenüberliegenden Winkel die folgenden

$$\begin{array}{lll} \psi\,, & k_2\,, & k_2+\psi_2+\lambda \\ \varphi_2\,, & \varepsilon\,, & 180^0-(\varepsilon) \end{array}$$

sind. Die sphärische Trigonometrie giebt nun zuerst die strengen Gleichungen

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi_2 \sin\tfrac{1}{2}(\psi_2+\lambda) = \sin\tfrac{1}{2}\psi \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon+(\varepsilon))$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi_2 \cos\tfrac{1}{2}(\psi_2+\lambda) = \cos\tfrac{1}{2}\psi \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon-((\varepsilon))$$

und da mit Rücksicht auf den Grad der Genauigkeit, der hier festgesetzt worden ist, in diese Gleichungen

$$\cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon-(\varepsilon)) = 1\,,\quad \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon+(\varepsilon)) = \cos(\varepsilon)$$

gesetzt werden darf, so geben sie sogleich

$$\psi_2+\lambda = \psi\cos(\varepsilon)$$

die bis auf Grössen dritter Ordnung richtig ist. Die Substitution der obigen Ausdrücke für ψ und ε verwandelt diesen Ausdruck in den folgenden,

$$\begin{aligned} \psi_2+\lambda = {} & \zeta\cos(\varepsilon)(t-T) \\ & +\zeta b\cos(\varepsilon)\operatorname{cotg} 2(\varepsilon)(t-T)^2+\Delta\psi\cos(\varepsilon) \end{aligned}$$

Es ist hier ein mit dem Product der Präcession in die Nutation multiplicirtes Glied übergangen worden, und es soll dieses auch in allen folgenden Ausdrücken geschehen, da diese Glieder nur in den seltensten Fällen merklich werden. Uebrigens wird weiter unten ein Verfahren angegeben werden, durch welches man diese Gattung von Gliedern aus den Endformeln ableiten kann.

Die Substitution des oben erhaltenen Ausdrucks für λ in den vorigen giebt endlich

$$\begin{aligned} \psi_2 = {} & \left\{\zeta\cos(\varepsilon)-\frac{a}{\sin(\varepsilon)}\right\}(t-T) \\ & +\left\{ab\frac{\cos(\varepsilon)}{\sin^2(\varepsilon)}-\tfrac{1}{2}\zeta b\frac{1+2\sin^2(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)}-\frac{a'}{\sin(\varepsilon)}\right\}(t-T)^2+\Delta\psi\cos(\varepsilon). \end{aligned}$$

20.

Dasselbe, im vor. Art. eingeführte, sphärische Dreieck giebt ferner

$$\begin{aligned} \sin\varphi_2\sin(k_2+\psi_2+\lambda) &= \sin(\varepsilon)\sin\psi = \psi\sin(\varepsilon) \\ \sin\varphi_2\cos(k_2+\psi_2+\lambda) &= -\cos(\varepsilon)\sin\varepsilon+\sin(\varepsilon)\cos\varepsilon\cos\psi \\ &= -\sin(\varepsilon-(\varepsilon))-\tfrac{1}{2}\psi^2\sin(\varepsilon)\cos(\varepsilon) \end{aligned}$$

bis auf Grössen dritter Ordnung, und es wird nach der Substitution der Ausdrücke für ψ und ε folglich

$$\sin\varphi_2 \sin(k_2+\psi_2+\lambda) = \zeta\sin(\varepsilon)(t-T)+\zeta b\sin(\varepsilon)\operatorname{cotg}2(\varepsilon)(t-T)^2+\varDelta\psi\sin(\varepsilon)$$
$$\sin\varphi_2\cos(k_2+\psi_2+\lambda) = -\tfrac{1}{2}\{\zeta^2\sin(\varepsilon)\cos(\varepsilon)+\zeta\alpha\}(t-T)^2-\varDelta\varepsilon.$$

Die Elimination von λ durch dessen im Art. 18 entwickelten Ausdruck giebt daher

$$\sin\varphi_2\sin(k_2+\psi_2) = \zeta\sin(\varepsilon)(t-T)+\zeta b\sin(\varepsilon)\operatorname{cotg}2(\varepsilon)(t-T)^2+\varDelta\psi\sin(\varepsilon)$$
$$\sin\varphi_2\cos(k_2+\psi_2) = -\tfrac{1}{2}\{\zeta\sin(\varepsilon)\cos(\varepsilon)-\zeta a\}(t-T)^2-\varDelta\varepsilon.$$

Nimmt man daher an dass

$$\sin\varphi_2\sin(k_2+\psi_2) = a_1(t-T)+a'_1(t-T)^2+N$$
$$\sin\varphi_2\cos(k_2+\psi_2) = \qquad -b'_1(t-T)^2+N'$$
$$\psi_2 = c_1(t-T)+c'_1(t-T)^2+N''$$

so erhalten die jetzt eingeführten Coefficienten die folgenden Ausdrücke

$$a_1 = \zeta\sin(\varepsilon)$$
$$c_1 = \zeta\cos(\varepsilon)-\frac{a}{\sin(\varepsilon)}$$
$$a'_1 = \zeta b\sin(\varepsilon)\operatorname{cotg}2(\varepsilon)$$
$$b'_1 = \tfrac{1}{2}\{\zeta^2\sin(\varepsilon)\cos(\varepsilon)-\zeta a\}$$
$$c'_1 = ab\frac{\cos(\varepsilon)}{\sin^2(\varepsilon)}-\tfrac{1}{2}\zeta b\frac{1+2\sin^2(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)}-\frac{a'}{\sin(\varepsilon)}$$
$$N = \varDelta\psi\sin(\varepsilon),\quad N' = -\varDelta\varepsilon,\quad N'' = \varDelta\psi\cos(\varepsilon)$$

und man erkennt, dass die Gleichung

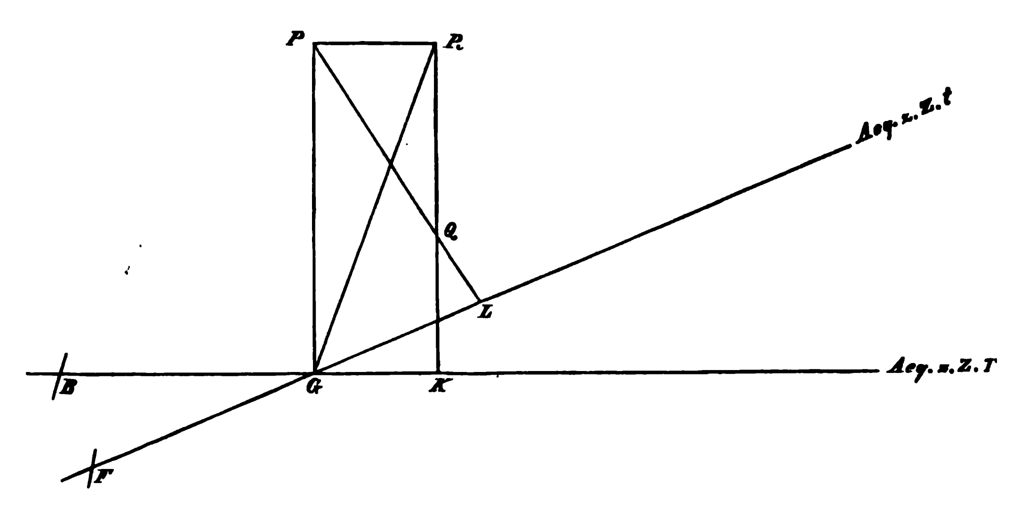
$$a_1 c_1 = 2b'_1$$

zwischen denselben statt findet.

Die vorstehenden Gleichungen sind mit den ersten Gleichungen des Art. 14 der angezogenen Abhandlung identisch, nur dass dort ψ_1 statt ψ_2 und a, c, etc. statt a_1, c_1, etc. geschrieben worden ist, welches hier nicht thunlich war, da a_1, c_1, etc. in Function von a, b, etc. dargestellt worden sind, und ψ_2 und ψ_1 verschiedene Bögen Einer Figur sind, die nicht gleiche Bezeichnung bekommen durften, wogegen a. a. O. diese Umstände nicht vorhanden waren. Ich mache ausserdem darauf aufmerksam, dass die Gleichung $2b'_1 = a_1 c_1$, die hier bewiesen worden ist, in jener Abhandlung schon angegeben wurde.

21.

Ziehen wir jetzt die folgende Figur in Betracht, in welcher die Linien wieder Bögen grösster Kreise auf einer Kugeloberfläche von un-



bestimmtem Halbmesser bedeuten. Da hier wieder der Punkt B das Frühlingsäquinox zur Zeit T, und F dasjenige zur Zeit t bedeuten, so sind wieder die Bögen

$$BG = k_2, \quad FG = k_2 + \psi_2$$

und auch so wieder der Winkel

$$BGF = \varphi_2.$$

Lässt man ferner P den Pol des Aequators zur Zeit t, und P_0 den Pol des Aequators zur Zeit T bedeuten, so sind die Bögen GP und GP_0 auf der Kugeloberfläche jeder 90° lang, und die Winkel GPP_0 und GP_0P sind rechte Winkel, endlich sind auch die Bögen

PP_0 = dem Winkel LGK oder BGF
GL = » » GPL
GK = » » GP_0K.

Bezieht man nun den Punkt Q, in welchem die bez. auf den Aequator zur Zeit t, und den zur Zeit T senkrecht gezogenen Bögen PL und P_0K einander schneiden, auf beide Aequatoren der Figur, und nennt für die Zeit t die grade Aufsteigung und die Abweichung desselben α und δ, so wie für die Leit T die analogen Bögen α_0 und δ_0, dann sind in dem sphärischen Dreieck QPP_0 die Seiten und die gegenüber liegenden Winkel

$$\varphi_2, \quad 90^0 - \delta, \quad 90^0 - \delta_0$$
$$90^0 + \alpha_0 - k_2, \quad 90^0 - (\alpha - k_2 - \psi_2)$$

und die sphärische Trigonometrie giebt uns die Gleichungen

$$\cos\delta\cos(\alpha-k_2-\psi_2)=\cos\delta_0\cos(\alpha_0-k_2)$$
$$\cos\delta\sin(\alpha-k_2-\psi_2)=\sin\delta_0\sin\varphi_2+\cos\delta_0\cos\varphi_2\sin(\alpha_0-k_2)$$
$$\sin\delta\qquad\qquad=\sin\delta_0\cos\varphi_2-\cos\delta_0\sin\varphi_2\sin(\alpha_0-k_2).$$

Aus den beiden ersten dieser folgen, wenn man gleich einige der Glieder dritter Ordnung weglässt, leicht die folgenden,

$$\delta\sin(\alpha-\alpha_0-\psi_2)=\sin\delta_0\sin\varphi_2\cos(\alpha_0-k_2)-\tfrac{1}{2}\cos\delta_0\sin^2\varphi_2\sin(\alpha_0-k_2)\cos(\alpha_0-k_2)$$
$$\delta\cos(\alpha-\alpha_0-\psi_2)=\cos\delta_0+\sin\delta_0\sin\varphi_2\sin(\alpha_0-k_2)-\tfrac{1}{2}\cos\delta_0\sin^2\varphi_2\sin^2(\alpha_0-k_2).$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\sin\varphi_2\sin(k_2+\psi_2)=h$$
$$\sin\varphi_2\cos(k_2+\psi_2)=-l,$$

wo zu bemerken ist, dass h von der ersten, aber l von der zweiten Ordnung ist, dann gehen die beiden vorstehenden Gleichungen, die erste bis auf Grössen dritter, und die zweite bis auf Grössen zweiter Ordnung in die folgenden über

$$\cos\delta\sin(\alpha-\alpha_0-\psi_2)=h\sin\delta_0\sin\alpha_0-l\sin\delta_0\cos\alpha_0$$
$$+\tfrac{1}{2}\cos\delta_0 h^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0+\psi_2 h\sin\delta_0\cos\alpha_0$$
$$\cos\delta_0\cos(\alpha-\alpha_0-\psi_2)=\cos\delta_0-h\sin\delta_0\cos\alpha_0$$

und geben durch die Division, mit Rücksicht darauf, dass aus der strengen Gleichung $2b'_1=a_1c_1$ bis auf Grössen dritter Ordnung die Gleichung

$$h\psi_2=2l$$

folgt

$$\alpha-\alpha_0=\psi_2+h\,\mathrm{tg}\,\delta_0\sin\alpha_0+l\,\mathrm{tg}\,\delta_0\cos\alpha_0+\tfrac{1}{2}h^2(1+2\,\mathrm{tg}^2\delta_0)\sin\alpha_0\cos\alpha_0.$$

Die dritte der obigen strengen trigonometrischen Gleichungen giebt, mit Rücksicht auf die eben erhaltene Gleichung $h\psi_2=2l$, bis auf Grössen dritter Ordnung,

$$\sin\delta=\sin\delta_0+h\cos\delta_0\cos\alpha_0-l\cos\delta_0\sin\alpha_0-\tfrac{1}{2}h^2\sin\delta_0$$

und hieraus bekommt man durch Hülfe eines oben bei der Entwickelung von ε_1 angeführten Satzes,

$$\delta-\delta_0=h\cos\alpha_0-l\sin\alpha_0-\tfrac{1}{2}h^2\,\mathrm{tg}\,\delta_0\sin^2\alpha_0.$$

Diese Ausdrücke für $\alpha-\alpha_0$ und $\delta-\delta_0$ stimmen mit den anderweitig bekannten Ausdrücken für die Präcession und die Nutation in grader Aufsteigung und Abweichung eines Fixsterns vollständig überein, und die erste derselben zeigt die Richtigkeit der in der oft angezogenen Abhandlung Art. 14 gegebenen Erklärung der Bedeutung der Ausdrücke

für h, l und φ_2. Es folgt nämlich aus der vorhergehenden Analyse, dass in der That

$$a_1(t-T)+a'_1(t-T)^2$$

die in dem Ausdruck der Präcession in grader Aufsteigung eines Fixsterns mit der Tangente der Abweichung und dem Sinus der graden Aufsteigung multiplicirten Glieder,

$$b'_1(t-T)^2$$

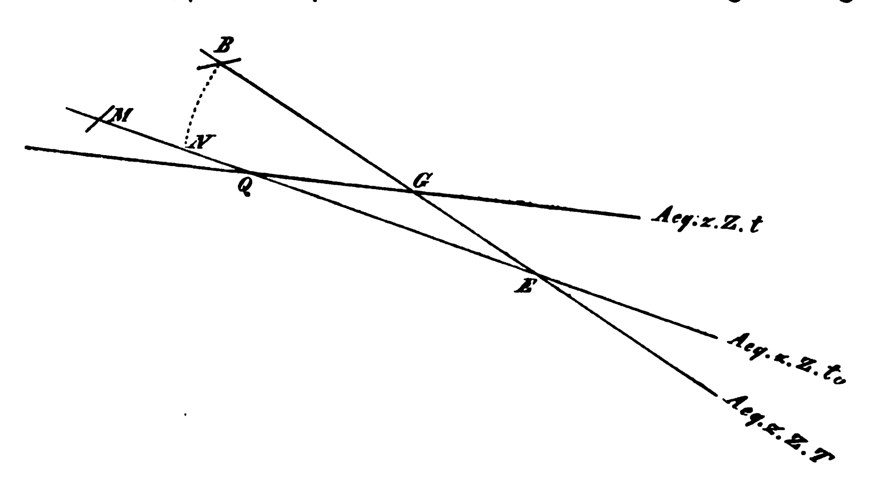
das in denselben Ausdruck mit der Tangente der Abweichung und dem Cosinus der graden Aufsteigung multiplicirte Glied, und

$$c_1(t-T)+c'_1(t-T)^2$$

die in demselben Ausdruck von dem Orte des Fixsterns unabhängigen Glieder sind, so wie dass N, N', N'' in dem Ausdruck der Nutation in grader Aufsteigung eines Fixsterns auf dieselbe Weise enthalten sind.

22.

Wir wollen jetzt t_0 von T verschieden annehmen und die Relationen zwischen α, β und α_2, β_2 entwickeln. Dazu wird die folgende Figur



dienen, wo wieder die Linien Bögen grösster Kreise auf der Kugeloberfläche bezeichnen, und die Bedeutung derselben in der Figur eingeschrieben ist.[†] Es ist nun wieder B der Frühlingspunkt zur Zeit T, und M soll den zur Zeit t_0 bezeichnen, und auch ist wieder

$$BG = k_2,\ BGQ = \varphi_2.$$

Nimmt man den Bogen $NE = BE$, so ist der Bogen MN die Zurück-

weichung der Aequinoctialpunkte auf dem der Zeit t_0 zukommenden Aequator während des Zeitraums $t_0 - T$; es soll

$$MN = \psi_0$$

gesetzt werden. Bezeichnet man ferner die Neigung des Aequators zur Zeit t_0 gegen den zur Zeit T mit φ_1, und die grade Aufsteigung des aufsteigenden Knotens jenes auf diesem mit k_1, dann ist in der Figur

der Winkel $GEQ = \varphi_1$
und der Bogen $BE = k_1$

und ausserdem sind

$$GQE = \varphi$$
$$MQ = k,$$

wenn den Grössen φ und k dieselbe Bedeutung beigelegt wird, die zu Anfang des Art. 19 erklärt wurde. Sei endlich

$$\alpha_1 = \sin\varphi_1 \sin k_1$$
$$\beta_1 = \sin\varphi_1 \cos k_1$$

während die oben schon eingeführten ähnlichen Relationen, nemlich

$$\alpha_2 = \sin\varphi_2 \sin k_2$$
$$\beta_2 = \sin\varphi_2 \cos k_2$$
$$\alpha = \sin\varphi \sin k$$
$$\beta = \sin\varphi \cos k$$

auch beibehalten werden. Aus der Figur geht nun hervor, dass im sphärischen Dreieck GQE die Seiten und die gegenüber liegenden Winkel die folgenden sind

$$-\;k_1 - k_2\,,\quad k_1 - k + \psi_0$$
$$\varphi_1\,,\quad \varphi\,,\quad 180^\circ - \varphi_2$$

und die Trigonometrie giebt daher

$$\sin\varphi \sin(k_1 - k + \psi_0) = \sin\varphi_2 \sin(k_1 - k_2)$$
$$\sin\varphi \cos(k_1 - k + \psi_0) = -\cos\varphi_2 \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 \cos(k_1 - k_2).$$

Aber φ_1 und φ_2 sind kleine Grössen erster Ordnung, und da in den vorstehenden Gleichungen $\cos\varphi_2$ nur mit $\sin\varphi_1$, und $\cos\varphi_1$ nur mit $\sin\varphi_2$ multiplicirt vorkommen, so dürfen wir sogleich

$$\cos\varphi_1 = 1,\ \cos\varphi_2 = 1$$

setzen, indem die Berücksichtigung der folgenden Glieder der Reihenentwickelung dieser Cosinusse nur Glieder von der dritten und den

höheren Ordnungen hervorbringen würde. Es dürfen daher die vorstehenden Gleichungen sofort in die folgenden umgewandelt werden,

$$\sin\varphi\sin(k_1-k+\psi_0) = \sin\varphi_1\sin(k_1-k_2)$$
$$\sin\varphi\cos(k_1-k+\psi_0) = -\sin\varphi_1+\sin\varphi_2\cos(k_1-k_2).$$

Durch Multiplicationen dieser mit $\sin(k_1+\psi_0)$ und $\cos(k_1+\psi_0)$, und durch Additionen und Subtractionen ergeben sich hieraus

$$\sin\varphi\sin k = \sin\varphi_2\sin(k_2+\psi_0)-\sin\varphi_1\sin(k_1+\psi_0)$$
$$\sin\varphi\cos k = \sin\varphi_2\cos(k_2+\psi_0)-\sin\varphi_1\cos(k_1+\psi_0)$$

und diese verwandelt man leicht in

$$\alpha = (\alpha_2-\alpha_1)\cos\psi_0+(\beta_2-\beta_1)\sin\psi_0$$
$$\beta = -(\alpha_2-\alpha_1)\sin\psi_0+(\beta_2-\beta_1)\cos\psi_0.$$

Aber wenn nur nicht die Zeitpunkte t_0 und T Jahrhunderte von einander abstehen, so ist auch ψ_0 eine kleine Grösse erster Ordnung, und es werden bis auf Grössen dritter Ordnung

$$\alpha = \alpha_2-\alpha_1+\psi_0(\beta_2-\beta_1)$$
$$\beta = \beta_2-\beta_1-\psi_0(\alpha_2-\alpha_1).$$

Da ich hier β, β_1, β_2 nicht minder wie α, α_1, α_2 als Grössen erster Ordnung betrachtet habe, so dienen die vorstehenden Gleichungen auch zu der Reduction der Planetenörter auf die gleichzeitige Ecliptik, wenn die betreffenden Werthe darin substituirt worden; sie sind identisch mit den Gleichungen (20) der oft angezogenen Abhandlung. Sei ferner die Präcession während des Zeitraums $t-t_0$ mit ψ bezeichnet, so wird

$$\psi = \psi_2-\psi_0$$

man mag die Präcessionen auf der Ecliptik oder auf dem Aequator zählen. Diese Gleichung ist wieder identisch mit der (21) der Abhandlung, da hier in Bezug auf den Aequator ψ_2 dasselbe bedeutet, wie dort an den betreffenden Stellen ψ_1. Will man diese Gleichung auf die Ecliptik anwenden, so ist ausser dem Werthe von ψ_0 in Bezug auf die Ecliptik, statt ψ_2 die hier oben entwickelte Präcession ψ_1 darein zu substiuiren.

23.

Wenden wir uns nun zu den Gleichungen

$$\sin\varphi_2\sin(k_2+\psi_2) = a_1(t-T)+a'_1(t-T)^2+N$$
$$\sin\varphi_2\cos(k_2+\psi_2) = -b'_1(t-T)^2+N'$$
$$\psi_2 = c_1(t-T)+c'_1(t-T)^2+N''$$

des Art. 20 und eliminiren durch Hülfe der dritten ψ_2 aus den beiden ersten, so ergiebt sich durch Zuziehung der Gleichung $2b'_1 = a_1 c_1$

$$\alpha_2 = a_1 (t-T) + a'_1 (t-T)^2 + N$$
$$\beta_2 = \qquad + b'_1 (t-T)^2 + N'$$

*) und es ist an sich klar, dass hieraus die Ausdrücke für α_1 und β_1 entstehen, wenn man t_0 statt t setzt; dieselbe Substitution verwandelt auch ψ_2 in ψ_0. Da jedoch unter dem Frühlingspunkt M der Figur des vor. Art. der mittlere verstanden werden muss, so müssen in den Ausdrücken für α_1, β_1, ψ_0 die Nutationen weggelassen werden. Wir erhalten also

$$\alpha_1 = a_1 (t_0 - T) + a'_1 (t_0 - T)^2$$
$$\beta_1 = \qquad b'_1 (t_0 - T)^2$$
$$\psi_0 = c_1 (t_0 - T) + c'_1 (t_0 - T)^2$$

und da identisch

$$(t-T)^2 - (t_0 - T)^2 =$$
$$2 (t_0 - T)(t - t_0) + (t - t_0)^2$$

ist, so geben die Ausdrücke des vor. Art.

$$\alpha = A(t - t_0) + a'_1 (t - t_0)^2 + N$$
$$\beta = \qquad b'_1 (t - t_0)^2 + N'$$
$$\psi = C(t - t_0) + c'_1 (t - t_0)^2 + N''$$

wo

$$A = a_1 + 2a'_1 (t_0 - T)$$
$$C = c_1 + 2c'_1 (t_0 - T)$$

die wieder mit den betr. Ausdrücken der Abhandlung identisch sind, wenn man darin a_1, c_1, a'_1, etc. für a, c, a', etc. und t_0 für t_{00} schreibt.

Auch die Substitution der oben gegebenen numerischen Werthe in die hier entwickelten Ausdrücke giebt die betr. numerischen, in der Abhandlung angegebenen Werthe wieder. Man bekommt daher auch so-

---

*) Man kann hiezu Folgendes bemerken. Die vorstehenden Gleichungen zeigen, dass bis auf Grössen zweiter Ordnung in der Figur des Art. 17 die Dreieckseite

$$BG = k_2 = 90^0 - \frac{b'_1}{a_1} (t-T) = 90^0 - \tfrac{1}{2} c_1 (t-T)$$

und dahingegen

$$FG = k_2 + \psi_2 = 90^0 + \tfrac{1}{2} c_1 (t-T)$$

ist. Die Summe der Bögen $BG + FG$ ist also von 180^0 nur um eine Grösse zweiter Ordnung verschieden. Ebenso ergiebt sich, dass die Summe der Dreieckseiten

$$CG + BG = 180^0 + \frac{a}{\sin(\varepsilon)} (t-T)$$

also von 180^0 um eine Grösse erster Ordnung verschieden ist.

wohl die analytischen wie die numerischen Werthe der Grössen η, ξ, λ in allen verschiedenen Formen, die denselben in der Abhandlung gegeben worden sind, unverändert wieder.

In den vorstehenden Ableitungen habe ich ein paar Bögen etwas anders definirt, wie in der angezogenen Abhandlung geschehen ist, und in Folge dessen sind hier einige der Zwischenrelationen etwas anders ausgefallen wie dort; nichts desto weniger sind die Endrelationen hier und dort identisch geworden. Ich habe diese Abänderungen nicht ohne Ursache vorgenommen, denn solche bieten ein sehr wirksames Mittel dar, um etwa vorhandene, versteckte Fehler zum Vorschein zu bringen.

24.

Um Nichts wegzulassen, was zur Verification meiner Ausdrücke für η, ξ, λ dienen kann, will ich noch die folgenden Betrachtungen aufstellen und durchführen, obgleich dieses schon früher von mir geschehen ist.

Das Verfahren zur Reduction der Gestirne auf die gleichzeitige Ecliptik oder den gleichzeitigen Aequator, welches Gegenstand dieses Aufsatzes, und in den nachfolgenden Egeriatafeln angewandt worden ist, hat nur dann ausschliesslich Vortheil, wenn es sich um einen Planeten oder Cometen handelt, aber es steht nichts im Wege dasselbe auch bei Fixsternen anzuwenden, obgleich dieses keinen Nutzen bringen würde. Es folgt aber hieraus, dass die Ausdrücke, auf welche dieses Verfahren führt, mit den Ausdrücken für die Reduction eines Fixsterns müssen identisch gemacht werden können, und dass dieses in der That der Fall ist, soll jetzt gezeigt werden. Um nicht zu weit zu gehen, sollen hier blos die Ausdrücke zur Reduction auf den Aequator vorgenommen, und in diesen nur die Präcession in Betracht gezogen werden, da die Ausdrücke für die Nutation daraus von selbst folgen; auch soll zu mehrerer Einfachheit $t_0 = T$ gesetzt werden. Da nun auch die planetarischen Störungen wegfallen, so werden die im Art. 7 angeführten Ausdrücke die folgenden.

$$\alpha = f + \omega + \eta + \theta + \lambda - R - (s)\frac{\operatorname{tg} i \cos(f+\omega+\eta)}{1-\sin^2 i \sin^2(f+\omega+\eta)}$$

$$\sin\delta = \sin i \sin(f+\omega+\eta) + (s)$$

$$\operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} i \sin 2(f+\omega+\eta)}{1+\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2} i \cos 2(f+\omega+\eta)}$$

$$(s) = \xi \sin(f+\omega+\eta)$$

$$\eta = h\frac{\cos\theta}{\sin i} - l\frac{\sin\theta}{\sin i} + h^2\frac{\cos i}{\sin^2 i}\sin\theta\cos\theta$$
$$\xi = -h\cos i\sin\theta - l\cos i\cos\theta + h^2\frac{\cos^2 i - \sin^2\theta}{2\sin i}$$
$$\lambda = \psi_2 - h\operatorname{cotg} i\cos\theta + l\operatorname{cotg} i\sin\theta - h^2\frac{1+\cos^2 i}{2\sin^2 i}\sin\theta\cos\theta$$

, gleichwie im Art. 21

$$h = \sin\varphi_2\sin(k_2+\psi_2)$$
$$-l = \sin\varphi_2\cos(k_2+\psi_2)$$

d. Obgleich ein Fixstern keine für uns sichtbare Bahn, wie die eines
neten oder Cometen beschreibt, so können wir doch eine solche
ziren, für welche die Neigung i, die Knotenlänge θ, die Entfernung
; Perihels vom Knoten ω, und die wahre Anomalie f ist. Zur Zeit-
oche, auf welche sich die Bahnelemente beziehen, können wir daher
folgenden Gleichungen aufstellen,

$$\cos\delta_0\sin(\alpha_0-\theta) = \cos i\sin(f+\omega)$$
$$\cos\delta_0\cos(\alpha_0-\theta) = \cos(f+\omega)$$
$$\sin\delta_0 = \sin i\sin(f+\omega)$$

rauf die vorhergehenden Ausdrücke zu jeder anderen Zeit den Ort
ses Sterns in Bezug auf den gleichzeitigen Aequator und das gleich-
tige Aequinox geben müssen. Da im gegenwärtigen Falle die drei
gen i, θ, $f+\omega$ von den zwei, als gegeben zu betrachtenden Bögen
und δ_0 vermittelst der vorstehenden Gleichungen abhängen, und diese
· zwei von einander wesentliche Gleichungen bilden, so kann man
weder irgend einen jener drei Bögen willkührlich annehmen, oder als
e Function der beiden andern betrachten, und dieses kann auf ver-
iedene Weise geschehen. Hier werde ich annehmen, dass

$$f+\omega = 90^0$$

, da hieraus eine einfache Auflösung unserer Aufgabe entspringt.
rmöge dieser Annahme bekommen wir

$$\alpha_0 = 90^0+\theta,\ \delta_0 = i$$

l substituirt man diese in die voranstehenden allgemeinen Ausdrücke,
ergiebt sich zuerst, wenn wie immer die Grössen dritter und höherer
dnung weggelassen werden,

$$R = -2\eta\frac{\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}i}{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}i} = \eta - \frac{\eta}{\cos\delta_0}$$
$$(s) = \xi$$
$$\alpha = \alpha_0 + \lambda + \frac{\eta}{\cos\delta_0} + \eta\xi\frac{\sin\delta_0}{\cos^3\delta_0}$$
$$\sin\delta = \sin\delta_0 - \tfrac{1}{2}\eta^2\sin\delta_0 + \xi$$

und

$$\eta = h\frac{\sin\alpha_0}{\sin\delta_0} + l\frac{\cos\alpha_0}{\sin\delta_0} - h^2\frac{\cos\delta_0}{\sin^2\delta_0}\sin\alpha_0\cos\alpha_0$$

$$\xi = h\cos\delta_0\cos\alpha_0 - l\cos\delta_0\sin\alpha_0 = h^2\frac{\cos^2\delta_0-\cos^2\alpha_0}{2\sin\delta_0}$$

$$\lambda = \psi_2 - h\,\mathrm{cotg}\,\delta_0\sin\alpha_0 - l\,\mathrm{cotg}\,\delta_0\cos\alpha_0 + h^2\frac{1+\cos^2\delta_0}{2\sin^2\delta_0}\sin\alpha_0\cos\alpha_0.$$

Die Substitution dieser in die vorstehenden giebt nach einer leichten Reduction

$$\alpha-\alpha_0 = \psi_2 + h\,\mathrm{tg}\,\delta_0\sin\alpha_0 + l\,\mathrm{tg}\,\delta_0\cos\alpha_0 + \tfrac{1}{2}h^2(1+2\,\mathrm{tg}^2\delta_0)\sin\alpha_0\cos\alpha_0$$

$$\sin\delta - \sin\delta_0 = h\cos\delta_0\cos\alpha_0 - l\cos\delta_0\sin\alpha_0 - \tfrac{1}{2}h^2\sin\delta_0$$

die mit den betr. Gleichungen des Art. 21 identisch sind. W. z. b. w.

25.

Wie ich im Art. 19 ankündigte, dass hier die Glieder, die vom Product der Nutation in die Präcession abhängen, weggelassen werden sollten, führte ich zugleich an, dass ich weiter unten ein Verfahren angeben würde um sie zu berücksichtigen. Dieses Verfahren besteht einfach darin, dass man in den Theilen der allgemeinen Ausdrücke von η, ξ, λ, die von der Nutation abhängen, statt der Werthe von i und θ die der Zeitepoche angehören, die Werthe zu substituiren hat, die dem Zeitpunkt angehören, für welchen man den Ort des Planeten berechnen will, und in welchem blos die Glieder niedrigster Ordnung der Präcession zu berücksichtigen sind. Bezeichnet man diese Werthe mit i_1 und θ_1, dann ist zufolge der oft angezogenen Abhandlung allgemein

$$\sin i_1 = \sin i + \xi, \quad \theta_1 = \theta + \lambda$$

und daher für den jetzigen Zweck hinreichend genau

$$i_1 = i - a_1\sin\theta(t-t_0)\cdot \quad \theta_1 = \theta + (c_1 - a_1\,\mathrm{cotg}\,i\cos\theta)(t-t_0).$$

Substituirt man diese in die genannten Glieder, und entwickelt, so bekommt man die analytischen Ausdrücke der verlangten Glieder.

26.

Der Ausdruck für die Lunisolarpräcession, welcher im Art. 16 gegeben wurde, bezieht sich auf die Ecliptik für die Zeit T als feste Grundebene, und im Laufe dieses Aufsatzes ist $T = 1800.0$ gesetzt worden, da sich aber ereignen kann, dass man diese Präcession in Bezug auf irgend eine andere Ecliptik auszudrücken wünscht, so soll die Ent-

wickelung dieser Reduction hier vorgenommen werden. Der Zeitpunkt, auf dessen als fest betrachtete Ecliptik man die Lunisolarpräcession hinführen will, soll mit T_0, und diese Präcession selbst mit ψ_0 bezeichnet werden, man bekommt daher zufolge des angezogenen Artikels

$$\psi_0 = \zeta_0 (t - T_0) + \zeta b \operatorname{cotg} 2(\varepsilon)(t - T_0)^2$$

von ζ_0 die unbekannte, zu bestimmende, Grösse ist. Die Nutation habe ich hiebei weggelassen, weil sie keine merkliche Aenderung erleidet, wenn nicht $T - T_0$ eine Anzahl von Jahrhunderten umfasst, welcher Fall hier, wie überhaupt in diesen Entwickelungen, ausgeschlossen wird. Aus demselben Grunde, und weil hier, wie überall, die Grössen dritter und höherer Ordnungen übergangen worden, durfte ich im letzten Gliede des vorstehenden Ausdrucks die sich auf den Zeitpunkt T beziehenden Grössen ζ, b, (ε), statt der dem Zeitpunkt T_0 zukommenden setzen.

Da die oben mit α, β, ψ_2 bezeichneten Functionen in jedem Zeitpunkt dieselben Werthe behalten müssen, welchem Zeitpunkt auch die in denselben enthaltenen Grössen ζ, (ε), u. s. w. angehören, so können wir diese Eigenschaft benutzen, um unsere Unbekannte ζ_0 zu bestimmen, und da wir bei den Grössen zweiter Ordnung stehen bleiben werden, so brauchen wir in den Entwickelungen die mit $(t - t_0)^2$ multiplicirten Glieder nicht zu berücksichtigen. Die Aufgabe reducirt sich hiemit auf die Identificirung der im Art. 23 mit A und C bezeichneten Grössen, nachdem sie sowohl durch die dem Zeitpunkt T, wie durch die dem Zeitpunkt T_0 zukommenden Grössen ausgedrückt sein werden. Bezeichnet man alle dem letztgenannten Zeitpunkt angehörigen Grössen mit einer unten angehängten Null, so erhalten die zu erfüllenden Gleichungen die folgende Form,

$$A = a_1 + 2a'_1(t_0 - T) = a_0 + 2a'_0(t_0 - T_0)$$
$$C = c_1 + 2c'_1(t_0 - T) = c_0 + 2c'_0(t_0 - T_0)$$

und da diese beiden Gleichungen nur die beiden Unbekannten ζ_0 und $(\varepsilon)_0$ enthalten, so reichen sie zur Bestimmung derselben aus. Es ist aber leicht einzusehen, dass $(\varepsilon)_0$ aus dem Ausdruck des Art. 16 für ε_1 hervorgehen muss, wenn in demselben T_0 statt t gesetzt wird, und wir erhalten daher sogleich

$$(\varepsilon)_0 = (\varepsilon) + b(T_0 - T) + \cdot\ \cdot\ \cdot$$

wodurch $(\varepsilon)_0$ schon gegeben ist, und folglich die vorstehenden Gleichungen zwei Bestimmungen von ζ_0 geben, die, wenn alle Entwickelungen

richtig sind, identisch sein müssen. Diese sollen beide entwickelt werden, da sie eine neue Verification der Ableitungen dieses Aufsatzes gewähren.

Substituirt man die Ausdrücke für a_1, a'_1, a_0, a'_0 in die obige Gleichung für A, so bekommt man

$$\xi \sin(\varepsilon) + 2\zeta b \sin(\varepsilon)\operatorname{cotg} 2(\varepsilon)(t_0 - T) =$$
$$\zeta_0 \sin(\varepsilon)_0 + 2\zeta b \sin(\varepsilon)\operatorname{cotg} 2(\varepsilon)(t_0 - T_0)$$

da wieder erlaubt ist, im Coefficienten des zweiten Gliedes zweiter Ordnung ξ, b, (ε) statt ζ_0, b_0, $(\varepsilon)_0$ zu setzen. Der obige Ausdruck für $(\varepsilon)_0$ giebt aber

$$\sin(\varepsilon)_0 = \sin(\varepsilon) + b\cos(\varepsilon)(T_0 - T)$$

substituirt man diesen und reducirt, so ergiebt sich

$$\zeta_0 = \zeta - \zeta b \operatorname{tg}(\varepsilon)(T_0 - T).$$

Substituirt man ferner die Ausdrücke für c_1, c'_1, c_0, c'_0 in die obige Gleichung für C, so ergiebt sich zuerst

$$\zeta \cos(\varepsilon) - \frac{a}{\sin(\varepsilon)} + \left\{2ab\frac{\cos(\varepsilon)}{\sin^2(\varepsilon)} - \zeta b\frac{1+2\sin^2(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)} - \frac{2a'}{\sin(\varepsilon)}\right\}(t_0 - T)$$
$$= \zeta_0 \cos(\varepsilon)_0 - \frac{(a)_0}{\sin(\varepsilon)_0} + \left\{2ab\frac{\cos(\varepsilon)}{\sin^2(\varepsilon)} - \zeta b\frac{1+2\sin^2(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)} - \frac{2a'}{\sin(\varepsilon)}\right\} t_0 - T_0)$$

*) Der obige Ausdruck für $(\varepsilon)_0$ giebt aber

$$\cos(\varepsilon)_0 = \cos(\varepsilon) - b\sin(\varepsilon)(T_0 - T)$$
$$\frac{1}{\sin(\varepsilon)_0} = \frac{1}{\sin(\varepsilon)} - b\frac{\cos(\varepsilon)}{\sin^2(\varepsilon)}(T_0 - T)$$

und aus der oft angezogenen Abhandlung (Sp. 113) ergiebt sich

$$(a)_0 = a + (2a' + bc)(T_0 - T)$$

nachdem T_0 statt t_{00} gesetzt worden ist. Durch die Substitution dieser drei Ausdrücke verwandelt man leicht die vorstehende Gleichung in die folgende,

$$\zeta_0 \cos(\varepsilon) = \zeta\cos(\varepsilon) + \left\{ab\frac{\cos(\varepsilon)}{\sin^2(\varepsilon)} - \zeta b\frac{1+\sin^2(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)} + \frac{bc}{\sin(\varepsilon)}\right\}(T_0 - T).$$

Aber zufolge des Art. 18 ist

$$c = \zeta - a\operatorname{cotg}(\varepsilon)$$

und eliminirt man hiemit c, so wird

$$\zeta_0 = \zeta - \zeta b\operatorname{tg}(\varepsilon)(T_0 - T)$$

*) Der hier vorkommende, $(a)_0$ genannte Coefficient correspondirt mit a, während der oben mit a_0 bezeichnete mit a_1 correspondirt.

mit dem eben gefundenen Werthe dieser Grösse identisch. Es wird demzufolge neben den im Art. 23 abgeleiteten Ausdrücken auch

$$A = a_0 + 2a'_0(t_0 - T_0)$$
$$C = c_0 + 2c'_0(t_0 - T_0)$$

in welchen

$$a_0 = \zeta_0 \sin(\varepsilon)_0, \quad c_0 = \zeta_0 \cos(\varepsilon)_0 - \frac{(a)_0}{\sin(\varepsilon)_0}$$
$$a'_0 = a'_1, \quad c'_0 = c'_1$$

sind, während die Ausdrücke des Art. 23 für α, β, ψ_2 dieselben bleiben. Für die Lunisolarpräcession ψ_0 in Bezug auf die zur Zeit T_0 stattfindende Ecliptik erhalten wir den Ausdruck

$$\psi_0 = \{\zeta - \zeta b \operatorname{tg}(\varepsilon)(T_0 - T)\}(t - T_0) + \zeta b \operatorname{cotg} 2(\varepsilon)(t - T_0)^2.$$

Die Substitution der oben angegebenen numerischen Werthe giebt

$$\psi_0 = \{50''35593 + 0''00004956(T_0 - 1800)\}(t - T_0)$$
$$-0''00010673(t - T_0)^2.$$

Es wird also z. B. auf der Ecliptik von 1750.0

$$\psi_0 = 50''35345(t - 1750) - 0''00010673(t - 1750)^2$$

auf der von 1800.0

$$\psi_0 = 50''35593(t - 1800) - 0''00010673(t - 1800)^2$$

und auf der von 1850.0

$$\psi_0 = 50''35841(t - 1850) - 0''00010673(t - 1850)^2.$$

Da ferner der Ausdruck für ε_1 des Art. 18

$$(\varepsilon)_0 = (\varepsilon) - 0''46770(T_0 - 1800) - 0''000001407(T_0 - 1800)^2$$

giebt, wo

$$(\varepsilon) = 23^0\, 27'\, 54''8$$

und der numerische Ausdruck von a_0 (s. Abh. Sp. 113)

$$(a)_0 = 0''057723 - 0''000076 14(T_0 - 1800)$$

ist, so folgt hieraus für 1750.0

$$\zeta_0 = 50''35345, \quad (\varepsilon)_0 = 23^0\, 28'\, 18''19, \quad (a)_0 = 0''061530$$

und für 1850.0

$$\zeta_0 = 50''35841, \quad (\varepsilon)_0 = 23^0\, 27'\, 31''41, \quad (a)_0 = 0''053916$$

und hiemit geben die obigen Ausdrücke

$$= 20''05560 - 0''00008500(t_0 - 1750), \quad C = 46''03256 + 0''00028138(t_0 - 1750)$$
$$= 20.05135 - 0.00008500(t_0 - 1800), \quad C = 46.04662 + 0.00028138(t_0 - 1800)$$
$$= 20.04710 - 0.00008500(t_0 - 1850), \quad C = 46.06060 + 0.00028138(t_0 - 1850)$$

Rechnet man nun aus den Angaben der ersten und dritten Zeile die Werthe von 1800, so erhält man

$$A = 20''05135, \quad C = 46''04663$$
$$A = 20.05135, \quad C = 46.04662$$

mit den für diesen Zeitpunkt direkt berechneten Werthen übereinstimmend, und die drei vorstehenden Ausdrücke für A und C stimmen daher für jeden Zeitpunkt mit einander überein.

27.

Endlich will ich auch noch untersuchen, welche Werthe die im Vorhergehenden angewandten, von der Präcession abhängigen, Constanten annehmen, wenn man statt der Bessel'schen Bestimmung der Präcession die von O. Struve bestimmte anwendet. Sowohl Struve wie Bessel haben in diesen Untersuchungen die beiden Grössen, die sie mit m und n bezeichnen, jede für sich bestimmt. Diese beiden Grössen sind aber mit den hier mit c_1 und a_1 bezeichneten identisch, und diese hängen, wie man im Art. 20 gesehen hat, von der einzigen Unbekannten ζ, der Lunisolarpräcession für die Zeitepoche, ab, deren Verbesserung man, strenge genommen, statt der Verbesserungen von m und n in die Rechnungen hätte einführen, und in Bezug auf die Präcession als einzige Unbekannte betrachten müssen. Da dieses jedoch nicht geschehen ist, so bleibt nichts weiter übrig als die vorher auf den Zeitpunkt T zu reducirenden Werthe von m und n, die durch die Beobachtungen gefunden worden sind, als zwei auf verschiedene Art gefundene Functionen von ζ zu betrachten, und daraus durch die Methode der kleinsten Quadrate die letztere zu bestimmen. Nennt man daher p das Gewicht der Bestimmung von m, p' das von n, reducirt zuerst m und n auf das Jahr 1800.0, so bekommt man durch die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Ausdrücke für a_1 und c_1 des Art. 20.

$$\zeta = \frac{\frac{p}{p'}\left(m + \frac{a}{\sin(\varepsilon)}\right)\cos(\varepsilon) + n\sin(\varepsilon)}{1 + \frac{p-p'}{p'}\cos^2(\varepsilon)}$$

worauf ζ sich auch auf 1800.0 bezieht. Auf diese Art habe ich schon vor vielen Jahren den im Art. 16 angegebenen Werth von ζ aus den Bessel'schen Werthen der Tab. Reg. von m und n berechnet.

28.

Das Struve'sche Resultat ist

$$m = 46''0557 \text{ mit dem wahrscheinl. Fehler } \frac{0''61}{70}$$

$$n = 20.0643 \quad » \quad » \quad » \quad » \quad \frac{0''342}{70}$$

und gilt für das Jahr 1790*). Nun findet man für die Reduction dieser Angaben auf das Jahr 1800, durch die Ausdrücke des Art. 23 die Werthe

$$+0''00281\,, \quad -0''00085, \text{ so wie } \frac{a}{\sin(\varepsilon)} = +0''14496$$

und zufolge des Vorstehenden kann man die Gewichte

$$p = \left(\frac{70}{61}\right)^2, \quad p' = \left(\frac{70}{34.2}\right)^2$$

setzen, womit der Ausdruck des vor. Art.

$$\zeta = 50''37543$$

giebt. Der Unterschied zwischen dieser Bestimmung und der obigen nach Bessel ist $= +0''0195$, also in 100 Jul. Jahren $= +1''95$. Die Substitution des vorstehenden Werthes von ζ, so wie die von a, b, a', b' des Art. 16, in die Ausdrücke der Art. 20 und 23 gab

$$A = 20''05911 - 0''00008504(t-1800)$$
$$C = 46.06452 + 0''000028152(t-1800)$$
$$a'_1 = -0''00004252$$
$$b'_1 = +0.00223988$$
$$c'_1 = +0.00014076$$

Durch die Substitution derselben Werthe in die bez. Ausdrücke des Art. 16 bekam ich ferner die Lunisolarpräcession in Bezug auf die Ecliptik des Jahres 1800, nebst der dazu gehörigen Schiefe der Ecliptik

$$\psi = 50''37543(t-1800) - 0''00010677(t-1800)^2 + \Delta\psi$$
$$\varepsilon = 23^0\,27'\,54''8 + 0''000007049(t-1800)^2 + \Delta\varepsilon$$

und durch die Ausdrücke des Art. 18 die allgemeine Präcession, und die wahre Schiefe der Ecliptik

$$\psi_1 = 50''24246(t-1800) + 0''00011213(t-1800)^2 + \Delta\psi$$
$$\varepsilon_1 = 23^0\,27'\,54''80 - 0''46770(t-1800) + 0''000001407(t-1800)^2 + \Delta\varepsilon$$

---

*) S. Peters, Numerus constans nutationis etc. pag. 70.

Man hat in neuester Zeit die Länge des störenden Planeten in seiner Bahn, nebst i' und θ', theils für lange Reihen von Jahren, theils in jährlichen Abschnitten im Voraus berechnet und zusammengestellt, aber diese Angaben lassen noch etwas zu wünschen übrig. Man hat sogleich die feste Ecliptik bestimmt, und eine Anzahl von Jahren voraus oder zurück verlegt, man ist sogar bis zur Ecliptik des Jahres 1810 zurück gegangen, welcher Zeitpunkt mehr wie ein halbes Jahrhundert von der Gegenwart entfernt ist. Die Benutzung dieser Angaben versetzt den Berechner der Störungen in die Nothwendigkeit die Elemente des gestörten Planeten auf die Ecliptik desselben Zeitpunkts beziehen zu müssen, gleichviel ob nicht für ihn Gründe vorlägen, andere Epochen zu wählen; sie beengt ihn also. Nichts desto weniger lässt sich solchen Vorausberechnungen und Zusammenstellungen eine Form geben, wodurch der Berechner der Störungen nicht im Mindesten beengt wird, und diese besteht einfach darin, die anzugebenden Werthe der Functionen $f'+\pi'-\theta'$, i_1' θ' immer auf die gleichzeitige mittlere Ecliptik nebst zugehörigem Aequinox zu beziehen. Ich werde zeigen wie man diese Angaben zur Berechnung der Störungen eines Planeten oder Cometen durch mechanische Quadraturen anwenden kann, ohne genöthigt zu sein die Oerter des gestörten Gestirns auch auf die gleichzeitige Ecliptik nebst Aequinox reduciren zu müssen.

31.

Analysiren wir, so weit wie es für unsern Zweck nöthig ist, die Bouvard'schen Tafeln der älteren Planeten. Bezeichnet man mit L' die wahre siderische Länge in der Bahn, oder die mittlere Länge nach Hinzufügung der Längenstörungen der Tafeln, aber mit Weglassung der Nutationen, mit ψ_1 die allgemeine Präcession, und mit l' die wahre tropische Länge in der Bahn, so geben diese Tafeln

$$l' = L' + \psi_1$$

wobei zu bemerken ist, dass man schon ψ_1 der mittleren Länge einverleibt findet. Nennt man ferner i'_0 und θ'_0 die Neigung und Länge des aufsteigenden Knotens der Planetenbahn auf der Ecliptik, die der in den Tafeln angenommenen Zeitepoche entspricht, mt und $\psi_1 + m't$ die diesen Elementen in den Tafeln hinzugefügten jährlichen Aenderungen, wobei wieder bemerkt werden muss, dass man $\psi_1 + m't$ schon der Knotenlänge hinzugefügt vorfindet, und bezeichnet man — mit Ausschluss der

kleinen periodischen Breitenstörungen — die Breite des Planeten gegen die gleichzeitige Ecliptik mit b', so geben die Tafeln ferner

$$b' = (i''_0+mt)\sin(L'+\psi_1-[\theta'_0+\psi_1+m't])$$

Stellen wir diesem das Verfahren gegenüber, welches in der im vor. Zusatz oft angezogenen, in den Astr. Nachr. Nr. 823 u. f. abgedruckten, Abhandlung erklärt ist, so finden wir dass

$$l' = L'+\eta'+\lambda'$$
$$b' = \left(i''_0+\frac{\xi'}{\cos i'_0}\right)\sin(L'-\theta'_0+\eta')+s'$$

ist, wenn wir für die Sinusse von b' und i'_0 die Bögen setzen. Aber es lässt sich s' auf die folgende Form bringen,

$$s' = q'\sin(L'-\theta'_0+\eta')-p'\cos(L'-\theta'_0+\eta')$$

wo hier

$$p' = \sin i'\sin(\theta'-\theta'_0)$$
$$q' = \sin i'\cos(\theta'-\theta'_0)-\sin i'_0$$

angenommen werden können, und i' und θ' Neigung und Knotenlänge für die unbestimmte Zeit t bezeichnen. Lässt man auch hier die periodischen Breitenstörungen weg und übergeht das Quadrat der störenden Kraft, so nehmen p' und q' die folgenden Formen an,

$$p' = ut,\ q' = wt$$

wo u und w gleich wie die oben eingeführten m und m' bestimmte numerische Coefficienten sind. Durch die Substitution dieser Ausdrücke lässt sich der obige zweite Ausdruck für b' auf die folgende Form bringen

$$b' = \left(i''_0+wt+\frac{\xi'}{\cos i'_0}\right)\sin\left(L'-\theta'_0-\frac{u}{\sin i'_0}t+\eta'\right)$$

und diese Ausdrücke für l' und b' müssen mit den oben aus den Tafeln erhaltenen identisch sein. Diese Bedingung giebt die Gleichungen

$$\psi_1 = \eta'+\lambda'$$
$$mt = wt+\frac{\xi'}{\cos i'_0},$$
$$m't = \frac{u}{\sin i'_0}t-\eta.$$

Untersuchen wir diese näher.

32.

Aus der oft angezogenen Abhandlung erhalten wir, mit Uebergehung der Glieder zweiter Ordnung

$$\eta' = \frac{1}{\sin i'_0}\{\alpha\cos\theta'_0 - \beta\sin\theta'_0\}(t-t_0)$$
$$\xi' = -\cos i'_0\{\alpha\sin\theta'_0 + \beta\cos\theta'_0\}(t-t_0)$$
$$\lambda' = \psi_1 - \operatorname{cotg} i'_0\{\alpha\cos\theta'_0 - \beta\sin\theta'_0\}(t-t_0)$$

wo t_0 die Zeit der Epoche bezeichnet, und die numerischen Werthe von α und β mit Weglassung der mit $(t-t_0)^2$ multiplicirten Glieder

$$\alpha = +0''0577723 - 0''00007614(t_0-1800)$$
$$\beta = -0.467698 - 0.00000281(t_0-1800)$$

sind, in welchen hier auch die zweiten Glieder hätten weggelassen werden können. Substituirt man nun diese Ausdrücke in die beiden letzten, im vor. Art. erhaltenen Bedingungsgleichungen, so ergiebt sich, wenn auch dort $t-t_0$ statt t geschrieben wird,

$$m = w - \{\alpha\sin\theta'_0 + \beta\cos\theta'_0\}$$
$$m' = \frac{u}{\sin i'_0} - \frac{1}{\sin i'_0}\{\alpha\cos\theta'_0 - \beta\sin\theta'_0\}$$

Diese stimmen mit den betr. Gleichungen der Méc. cél. überein, und nach diesen sind die Säcularänderungen der Neigung und der Knoten in Bezug auf die gleichzeitige Ecliptik in den Tafeln der älteren Planeten berechnet worden. In Art. 14 der Abhandlung in Nr. 799 u. f. habe ich mich derselben Ausdrücke bedient um w und u aus m und m' zu erhalten.

Gehen wir nun zur ersten Bedingungsgleichung des vor. Art. über, so findet sich dass

$$\psi_1 = \psi_1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i'_0\{\alpha\cos\theta'_0 - \beta\sin\theta'_0\}$$

sein müsste, welches unmöglich ist. Man sieht hieraus, dass Bouvard das zweite Glied rechter Hand, dieses Ausdrucks übergangen hat. In Bezug auf die älteren Planeten, deren Neigungen gegen die Ecliptik sehr klein sind, ist dieses Glied auch sehr klein, und daher mag die Uebergehung desselben in den Bouvard'schen Tafeln den übrigen dortigen Uebergehungen zur Seite gestellt werden.

Untersucht man die Analyse der Leverrier'schen Planetentafeln, so findet man, dass dieses Glied darin berücksichtigt ist. Man bekommt daher aus diesen Tafeln zuerst die vorstehenden Gleichungen für m und m' wieder, und ferner

$$\psi_1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} i'_0\{\alpha\cos\theta'_0 - \beta\sin\theta'_0\} = \psi_1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i'_0\{\alpha\cos\theta'_0 - \beta\sin\theta'_0\}$$

die für identisch erachtet werden kann, da für die älteren Planeten der Unterschied zwischen $\frac{1}{2}\operatorname{tg} i'_0$ und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}i'_0$ für verschwindend erachtet

werden kann. Ich erwähne noch, dass sowohl für den Mond wie für die Sonne das in Rede stehende Glied Null ist.

33.

Wir kommen jetzt zu den Folgerungen, die aus dem Vorstehenden gezogen werden können.

Wenn man die Störungen irgend eines der kleinen Planeten, oder die eines Cometen, durch mechanische Quadraturen berechnen will, und zu dem Ende sich für irgend einen Zeitpunkt, den ich mit t_0 bezeichnen will, dafür hinreichend genaue osculirende Elemente desselben verschafft hat, so reducire man von diesen Elementen, wenn es nicht schon ohnehin der Fall ist, durch die Ausdrücke der oft angezogenen Abhandlung, die Neigung, die Länge des Perihels, und die des aufsteigenden Knotens auf die mittlere Ecliptik und das Aequinox der Zeit t_0. Hierauf berechne man entweder aus den betreffenden Planetentafeln oder aus den Ephemeriden, die die heliocentrischen Oerter der alten Planeten geben, sowohl für die Zeit t_0, wie für alle übrigen Zeitpunkte, für welche man die Differentiale der Störungen berechnen will, vor Allem die Argumente der Breite

$$f' + \pi' - \theta'$$

und zwar genau so wie die Tafeln sie, mit Weglassung der Nutationen, geben. Man rechne ferner aus den Angaben der Einleitung, die jeder Planetentafel voran gestellt ist, mit Weglassung der periodischen Störungen, den Werth von i' für die Zeit t_0, und notire sich nebenbei den bei der Berechnung der Argumente der Breite schon erhaltenen gleichzeitigen Werth von θ'. Aus diesen Werthen von i' und θ', die für diejenigen zu halten sind, welche oben mit i'_0 und θ'_0 bezeichnet wurden, nebst den, wie oben beschrieben, erhaltenen Werthen der Neigung und Knotenlänge des Planeten, dessen Störungen man berechnen will, rechne man die Werthe der Bögen I, Φ, Ψ, die bis zu dem Zeitpunkt, in welchem man anfängt das Quadrat der störenden Kraft zu berücksichtigen, wenn dieses nöthig werden sollte, unveränderlich sind.

Man pflegt manchmal die Werthe von i' und θ' Behufs der letzt genannten Rechnung aus zwei Planetenörtern, von welchen der eine in der Nähe eines der beiden Knoten und der andere nahe in der Mitte zwischen denselben liegt, zu berechnen, doch erlangt man dadurch nicht unbedingt grössere Genauigkeit, sondern kann sich im Gegentheil

von dem der völligen Strenge nach zu substituirenden Werthe mehr entfernen, wie durch das oben beschriebene Verfahren.

34.

Durch das im vor. Art. beschriebene Verfahren sind also die Werthe von I, Φ, Ψ für einen längern Zeitraum, aber von den Argumenten der Breite $f'+\pi'-\theta'$ nur dasjenige, welches der Zeit t_0 zukommt, in der erforderlichen Form, nemlich auf die zu dieser Zeit statt findenden, mittleren Ecliptik bezogen, erhalten worden, während alle übrigen Werthe von $f'+\pi'+\theta'$ einer Aenderung bedürfen, da sich bis jetzt noch jeder derselben auf die gleichzeitige Ecliptik bezieht. Nichts kann einfacher sein wie die Berechnung dieser Aenderung, die zufolge der Analyse des Art. 31 in nichts Weiterem besteht, als dass man die betreffenden Werthe von η' davon abzieht, und diese kann man sich ein für alle Mal für jeden störenden Planeten in eine kleine Tafel bringen. Denn zufolge des angezogenen Art. ist das Argument der Breite in Bezug auf die gleichzeitige Ecliptik

$$= L'-\theta'_0-\frac{u}{\sin i'_0}t+\eta'$$

und stimmt mit den tabularischen Werthen desselben überein. Hier ist aber

$$\eta' = \frac{1}{\sin i'_0}\{\alpha\cos\theta'_0+\beta\sin\theta'_0\}\,(t-t_0)$$

die einzige Grösse, die von der Veränderlichkeit der Ecliptik abhängt, zieht man daher diese vom tabularischen Argument der Breite ab, so erhält man dasselbe in Bezug auf die Ecliptik der Zeit t_0.

Da ich bei der Berechnung der Störungen der kleinen Planeten durch mechanische Quadraturen für angemessen halte bei jeder Opposition mit der Sonne die Elemente derselben auf eine andere, einem Zeitpunkt in der Nähe dieser Opposition zugehörende mittlere Ecliptik nebst Aequinox zu beziehen, so kann der Werth von η' nie eine erhebliche Grösse erlangen.

Aus den Planetentafeln von Bouvard und Leverrier finde ich

	θ'		i'
Saturn,	$= 111°21'44''$,		$= 2°29'28''2 - 0''1546\,(t-1850)$
Jupiter,	$= 98\ 54\ 20$,		$= 1\ 18\ 40.4 - 0.2261\,(t-1850)$
Mars,	$= 48\ 23\ 53$,		$= 1\ 51\ \ 2.3 - 0.0243\,(t-1850)$

hiemit und mit den oben angegebenen Werthen von α und β, fand ich

für diese drei Planeten die zu den Argumenten der Breite zu addirenden Grössen, oder $-\eta' =$

$$-10''31\,(t-t_0);\ -19''83\,(t-t_0);\ -11''94\,(t-t_0)$$

wo die Zeiteinheit Ein Julianisches Jahr ist.

Wenn man nun die Zeit von 20 zu 20 Tagen fortschreiten lässt, so sind die oben erwähnten Täfelchen die folgenden, die ich für mehr wie ein Oppositionsinterval ausgedehnt habe.

Tage	Saturn	Jupiter	Mars	Tage	Saturn	Jupiter	Mars
0	0''0	0''0	0''0	± 400	∓11''3	∓21''7	∓13''1
± 20	∓ 0.6	∓ 1.1	∓ 0.7	420	11.8	22.8	13.7
40	1.1	2.2	1.3	440	12.4	23.9	14.4
60	1.7	3.3	2.0	460	13.0	25.0	15.0
80	2.3	4.3	2.6	480	13.5	26.1	15.7
100	2.8	5.4	3.3	500	14.1	27.2	16.4
120	3.4	6.5	3.9	520	14.7	28.2	17.0
140	3.9	7.6	4.6	540	15.2	29.3	17.7
160	4.5	8.7	5.2	560	15.8	30.4	18.3
180	5.1	9.8	5.9	580	16.4	31.5	19.0
200	5.6	10.9	6.5	600	16.9	32.6	19.6
220	6.2	11.9	7.2	620	17.5	33.7	20.3
240	6.8	13.0	7.8	640	18.0	34.8	20.9
260	7.3	14.1	8.5	660	18.6	35.8	21.6
280	7.9	15.2	9.2	680	19.2	36.9	22.2
300	8.5	16.3	9.8	700	19.7	38.0	22.9
320	9.0	17.4	10.5	720	20.3	39.1	23.5
340	9.6	18.5	11.1	740	20.9	40.2	24.2
360	10.2	19.5	11.8	760	21.4	41.3	24.9
380	10.7	20.6	12.4	780	22.0	42.4	25.5
400	11.3	21.7	13.1	800	22.6	43.4	26.2

Die oben angesetzten Werthe von i' sind die, welche ausserdem gebraucht worden. Die anzuwendenden Werthe von θ' kann man, wie oben gesagt, aus den Tafeln entnehmen.

Wenn die Ephemeriden die heliocentrischen Oerter der älteren Planeten geben, so kann man mit geringer Mühe die Werthe von $f'+\pi'-\theta'$ daraus erhalten, kürzer wird jedoch diese Berechnung, wenn eine Columne hinzugefügt wird, die für gleichförmig fortschreitende Zeitpunkte die Function $f'+\pi'-\theta'$, in dem Sinne, in welchem sie hier aufgefasst worden ist, giebt, und ausserdem auch i' und θ' für verschiedene Zeitpunkte angegeben werden. Denn wählt man für die Berech-

nung der Differentiale der Störungen dieselben Zeitpunkte, so ist nichts weiter in Bezug darauf zu thun, wie die Zahlen des vorstehenden Täfelchens den Argumenten der Breite hinzuzufügen, will man hingegen die Differentiale der Störungen für andere Zeitpunkte, wie die der Columne berechnen, so kommt eine kleine leicht auszuführende Interpolation hinzu. Auf jeden Fall ist man aber bei der hier beschriebenen Einrichtung dieser Columne in keiner Weise beengt, und ihre Hinzufügung kostet dem Rechner der Ephemeride keine Mühe, da er ohnehin $f' + \pi' - \theta'$ braucht, um die Breite des Planeten aus den Tafeln entnehmen zu können.

35.

Wenn man mit der Ecliptik und dem Aequinox wechselt, welches ich, wie oben angeführt, bei jeder Opposition des gestörten Planeten mit der Sonne auszuführen für dienlich achte, so ist in Bezug auf diesen nichts weiter zu thun wie die Grösse

$$\eta = \frac{1}{\sin i_0}\{\alpha\cos\theta_0 - \beta\sin\theta_0\}(t'-t_0)$$

der Entfernung des Perihels vom Knoten, die Grösse

$$\frac{\xi}{\cos i_0} = -\{\alpha\sin\theta_0 + \beta\cos\theta_0\}(t'-t_0)$$

der Neigung, und die Grösse

$$\lambda = \psi_1 - \operatorname{cotg} i_0\{\alpha\cos\theta_0 - \beta\sin\theta_0\}(t'-t_0)$$

wo

$$\psi_1 = \{50''22295 + 0''0002241 4\,(t_0 - 1800)\}(t'-t_0)$$

ist, und t' die Zeit bezeichnet, auf deren Ecliptik und Aequinox man die Elemente hinführen will, der Knotenlänge hinzuzufügen. Ich habe hier nur die Glieder erster Ordnung dieser Grössen angeführt, weil sie für die oben bezeichneten kurzen Zeiträume ausreichen, hat man jedoch für längere Zeiträume diese Verwandelung unterlassen, und sieht sich deshalb bei der vorzunehmenden Verwandelung genöthigt auf die Glieder zweiter Ordnung dieser Ausdrücke Rücksicht zu nehmen, so findet man diese in der oft angezogenen Abhandlung vollständig abgeleitet.

Man kann hierauf mit den neuen Werthen von i, θ, i', θ' neue Werthe von I, Φ, Ψ direct berechnen, aber kürzer verfährt man, vorausgesetzt, dass man die Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen übergehen kann, wenn man sich der Differentialformeln bedient,

die ich aus meiner früheren Abhandlung mit Rücksicht auf den vorliegenden Zweck hier einschalten will. Durch die im Vorhergehenden erklärten Rechnungen erfährt man die Unterschiede zwischen den dem Zeitraume $t - t_0$ zukommenden Werthen von i, i', θ, θ', und bezeichnet man diese mit δi, $\delta i'$, $\delta\theta$, $\delta\theta'$, so wird nach früher von mir entwickelten Formeln:

$$\delta I = \cos\Phi\delta i - \cos\Psi\delta i' + \sin i' \sin\Psi(\delta\theta - \delta\theta')$$
$$\delta\Phi = -\operatorname{cotg} I \sin\Phi\delta i + \operatorname{cosec} I \sin\Psi\delta i' + \operatorname{cosec} I \cos\Psi \sin i'(\delta\theta - \delta\theta')$$
$$\delta\Psi = -\operatorname{cosec} I \sin\Phi\delta i + \operatorname{cotg} I \sin\Psi\delta i' + \operatorname{cosec} I \cos\Phi \sin i(\delta\theta - \delta\theta')$$

Man kann sich um so mehr dieser Formeln für einen längeren Zeitraum bedienen, da sie von der Präcession, die immer die grössten Aenderungen hervorbringt, unabhängig sind.

36.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, zu dem von mir angegebenen einfachen und wirksamen, aber anfänglich nicht allgemein verstandenen Mittel zur Berücksichtigung des Quadrats der störenden Kräfte, welches in der Verwandelung der Elemente besteht, einige Erläuterungen zu geben, die sich auf den Fall beziehen, wo man zugleich mit dieser Verwandelung mit der Ecliptik und dem Aequinox wechseln will. Die allgemeinen, zur Erlangung der Verbesserung von I, Π, Π' dienenden Ausdrücke sind

$$\delta I = \frac{q_1}{\cos i} - \frac{q_1'}{\cos i'}$$
$$\delta\Pi = \operatorname{cotg} I \frac{p_1}{\cos i} - \operatorname{cosec} I \frac{p_1'}{\cos i'}$$
$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2} I\left\{\frac{p_1}{\cos i} - \frac{p_1'}{\cos i'}\right\} - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} I\left\{\frac{p_1}{\cos i} + \frac{p_1'}{\cos i'}\right\}$$
$$\delta\Pi' = \operatorname{cosec} I \frac{p_1}{\cos i} - \operatorname{cotg} I \frac{p_1'}{\cos i'}$$
$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2} I\left\{\frac{p_1}{\cos i} - \frac{p_1'}{\cos i'}\right\} + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2} I\left\{\frac{p_1}{\cos i} + \frac{p_1'}{\cos i'}\right\}$$

in welchen allgemein

$$p_1 = \frac{h^2}{k^2} z \{\cos(f+\Pi) + e\cos\Pi\} - \frac{hr}{k^2}\frac{dz}{dt}\sin(f+\Pi)$$
$$q_1 = \frac{h^2}{k^2} z \{\sin(f+\Pi) + e\sin\Pi\} + \frac{hr}{k^2}\frac{dz}{dt}\cos(f+\Pi)$$
$$p'_1 = \frac{h'^2}{k^2} z' \{\cos(f'+\Pi') + e'\cos\Pi'\} - \frac{h'r'}{k^2}\frac{dz'}{dt}\sin(f'+\Pi')$$
$$q'_1 = \frac{h'^2}{k^2} z' \{\sin(f'+\Pi') + e'\sin\Pi'\} + \frac{h'r'}{k^2}\frac{dz'}{dt}\cos(f'+\Pi')$$

Hier sind die Bezeichnungen dieselben wie in der Abhandlung der Nr. 799 u. f., nur habe ich der Einfachheit wegen die dort einer Anzahl der vorstehenden Grössen unten angehängte Null hier weggelassen.

Ich werde zuerst beweisen, dass man in diesen Ausdrücken für p'_1 und q'_1 die von $\frac{dz'}{dt}$ abhängigen Glieder immer weglassen darf. Zu dem Ende bemerke ich, dass schliesslich alle vom störenden Planeten abhängigen Glieder sich in den, im Art. 7 der angezogenen Abhandlung mit ξ', η', ζ' bezeichneten, Coordinaten vereinigen und ausserdem in dem Verfahren zur Berechnung der Störungen gar nicht vorkommen, da die im Art. 8 mit ξ'' bezeichnete Grösse in Bezug auf den störenden Planeten dieselbe Zusammensetzung wie ξ' hat, übrigens auch vollständig eliminirt werden kann. Eliminirt man aus den dort gegebenen Ausdrücken für ξ', η', ζ' die Bögen B' und L', so bekommt man

$$\begin{aligned}
\xi' &= r'\cos(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')+r'\cos I\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\\
\eta' &= r'\sin(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')-r'\cos I\cos(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\\
\zeta' &= r'\sin I\sin(f'+\Pi')
\end{aligned}$$

deren Differentiation zuerst

$$\begin{aligned}
\delta\xi' = &-r'\sin I\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\delta I\\
&-r'\{\sin(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')-\cos I\cos(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\}\,\delta\Pi\\
&-r'\{\cos(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')-\cos I\sin(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')\}\delta\Pi'\\
\delta\eta' = &\;r'\sin I\cos(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\delta I\\
&+r'\{\cos(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')+\cos I\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')\}\delta\Pi\\
&-r'\{\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')+\cos I\cos(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')\}\delta\Pi'\\
\delta\zeta' = &\;r'\cos I\sin(f'+\Pi')\delta I+r'\sin I\cos(f'+\Pi')\delta\Pi'
\end{aligned}$$

und nach der Substitution der obigen Ausdrücke für δI, $\delta\Pi$, $\delta\Pi'$,

$$\begin{aligned}
\delta\xi' = &-r'\sin I\sin(f'+\Pi')\left\{\frac{p_1}{\cos i}\cos(f+\Pi)+\frac{q_1}{\cos i}\sin(f+\Pi)\right\}\\
&+r'\sin I\sin(f+\Pi)\left\{\frac{p_1'}{\cos i'}\cos(f'+\Pi')+\frac{q_1'}{\cos i'}\sin(f'+\Pi')\right\}\\
\delta\eta' = &-r'\sin I\sin(f'+\Pi')\left\{\frac{p_1}{\cos i}\sin(f+\Pi')-\frac{q_1}{\cos i}\cos(f+\Pi)\right\}\\
&-r'\sin I\cos(f+\Pi)\left\{\frac{p_1'}{\cos i'}\cos(f'+\Pi')+\frac{q_1'}{\cos i'}\sin(f'+\Pi')\right\}\\
\delta\zeta' = &\;r'\cos(f'+\Pi')\frac{p_1}{\cos i}+r'\cos I\sin(f'+\Pi')\frac{q_1}{\cos i}\\
&-r'\cos I\left\{\frac{p_1'}{\cos i'}\cos(f'+\Pi')+\frac{q_1'}{\cos i'}\sin(f'+\Pi')\right\}
\end{aligned}$$

giebt. Die Elimination von p_1, q_1, p_1', q_1' hieraus führt schliesslich auf die folgenden Ausdrücke:

$$(A)\begin{cases}\delta\xi' = -\zeta'\frac{z}{r\cos i}+\sin I\sin(f+\Pi)\frac{z'}{\cos i'}\\ \delta\eta' = -\zeta'\frac{h^2 e\sin f}{k^2}\cdot\frac{z}{\cos i}+\zeta'\frac{hr}{k^2}\frac{dz}{dt\cos i}-\sin I\cos(f+\Pi)\frac{z'}{\cos i'}\\ \delta\zeta' = \frac{h^2}{k^2}(\xi'+e\xi'')\frac{z}{\cos i}-\eta'\frac{hr}{k^2}\frac{dz}{dt\cos i}-\cos I\frac{z'}{\cos i'}\end{cases}$$

Wie man sieht sind in diesen Ausdrücken die von $\frac{dz'}{dt}$ abhängigen Glieder gänzlich verschwunden, und daher darf man sie auch in p_1' und q_1' weglassen, und in Bezug auf den störenden Planeten

$$p_1' = \frac{h'^2}{k^2}z'\{\cos(f'+\Pi')+e'\cos\Pi'\}$$

$$q_1' = \frac{h'^2}{k^2}z'\{\sin(f'+\Pi')+e'\sin\Pi'\}$$

setzen. W. z. b. w.

Will man nun nicht nur die Elemente, sondern zugleich auch Ecliptik und Aequinox ändern, so berechne man die letzt genannte Aenderung wie sonst auch nach den Ausdrücken des vor. Art., aber in den Ausdrücken dieses Artikels, die sich auf die Aenderung der Elemente beziehen, setze man, wenn die periodischen Breitenstörungen des störenden Planeten übergangen werden sollen,

$$p_1' = 0,\ q_1' = 0$$

da die Säcularänderungen der Lage der Bahn dieses Planeten schon in den Ausdrücken des vor. Art. inbegriffen sind. Will man die periodischen Breitenstörungen des störenden Planeten mit berücksichtigen, so kann man in Betracht der Kleinheit der Excentricitäten dieser Planeten statt $p_1' = 0$ und $q_1' = 0$

$$p_1' = r's'\cos(f'+\Pi'),\ q_1' = r's'\sin(f'+\Pi')$$

setzen, wo s' die periodischen Breitenstörungen bedeuten. Es wird jedoch kaum je der Fall eintreten, in welchem dieses nöthig wäre.

37.

Sollen blos die Elemente geändert, die Ecliptik nebst Aequinox hingegen unverändert gelassen werden, so fällt selbstverständlich die Rechnung nach den Ausdrücken des Art. 35 weg, aber dann müssen in den Ausdrücken des vor. Art. für p_1' und q_1' ihre vollständigen Werthe substituirt werden; diese kann man für jeden Planeten ein für alle Mal angeben. Da

$$p' = \sin i'\sin(\sigma'-\theta_0')$$
$$q' = \sin i'\cos(\sigma'-\theta_0')-\sin i_0'$$

und

$$p_1' = -p'\cos\psi + q'\sin\psi$$
$$q_1' = p'\sin\psi + q'\cos\psi$$

sind, so werden auch

$$\frac{p_1'}{\cos i'} = -\cos\psi\sin i'\delta\theta' + \sin\psi\delta i' + r's'\cos(f'+\Pi')$$
$$\frac{q_1'}{\cos i'} = \sin\psi\sin i'\delta\theta' + \cos\psi\delta i' + r's'\sin(f'+\Pi')$$

wo wieder s' die periodischen Breitenstörungen sind, und $\delta i'$ und $\delta\theta'$ sich auf eine unveränderliche Ecliptik beziehen müssen. Letztere ergeben sich aus den Ausdrücken des Art. 32, nemlich

$$\delta i' = m(t-t_0) + \{\alpha\sin\theta' + \beta'\cos\theta'\}(t-t_0)$$
$$\sin i'\delta\theta' = \sin i'(n-\psi_1)(t-t_0) + \cos i'\{\alpha\cos\theta' - \beta\sin\theta'\}(t-t_0)$$

wo m und n die tabularischen jährlichen Aenderungen der Neigung und der Knoten der Planetenbahn sind. Ich finde aus den Tafeln für

	m	$n-\psi_1$
Saturn,	$= -0''1546$,	$= -19''4346$
Jupiter	$= -0.2261$	$= -15.7768$
Mars	$= -0.0243$	$= -22.2440$

und hiemit ergiebt sich für dieselben drei Planeten der Reihe nach

$$\sin i'\delta\theta' = -0''4286(t-t_0);\quad \delta i' = +0''0660(t-t_0)$$
$$\sin i'\delta\theta' = +0.0929(t-t_0);\quad \delta i' = -0.1004(t-t_0)$$
$$\sin i'\delta\theta' = -0.3328(t-t_0);\quad \delta i' = -0.2946(t-t_0)$$

wo die Zeiteinheit wieder ein Julianisches Jahr ist. Man erkennt hieraus wie gering der Einfluss ist, den diese Grössen auf den Betrag der Störungen ausüben können.

38.

Ich mache noch darauf aufmerksam, dass man, wenn man die Elemente gar nicht verwandeln will, den Theil der Wirkung des Quadrats der störenden Kraft auf die Componenten derselben, welcher von den Breitenstörungen, sowohl des gestörten wie des störenden Planeten herrührt, zu jeder Zeit durch die Ausdrücke (A) des Art. 36 vollständig berücksichtigen kann, zu welchem Ende man aus dem vor. Art.

$$\frac{z'}{\cos i'} = r'\delta i'\sin(f'+\Pi'-\theta') - r'\sin i'\delta\theta'\cos(f'+\Pi'-\theta') + r's'$$

findet, in welchem dieselben Werthe von $\delta i'$ und $\sin i'\delta\theta'$ anzuwenden sind. Den übrigen Theil des Quadrats der störenden Kraft berücksich-

tigt man, wie ich früher erklärt habe, nach Maassgabe der strengen Gleichungen

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}\nu + V + 2\frac{k^2}{r^3}S + \frac{k^2}{r^3}S^2$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^2}z + k^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)\cos i + Vz + h\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)\frac{dz}{dt}$$
$$\frac{d\delta C}{dt} = \frac{S-2\nu-\nu^2}{(1+\nu)^2} = S-2\nu-2S\nu+3\nu^2$$

wo

$$V = \frac{k^2}{r^2}\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) - \frac{h^2_0 e_0 \sin \overline{f}}{r}\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$$
$$S = h\int\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)dt$$

sind. Die Verwandelung der Elemente ist aber jedenfalls viel kürzer und übt vollständige Wirkung aus. Die Verwandelung selbst kann man innerhalb einer Stunde ausführen, wenn man sich mit den Formeln dazu vertraut gemacht hat, und hierauf hat man immer nur kleine Störungsglieder zu berechnen, während man, wenn man die Verwandelung unterlässt, endlich fortwährend grosse Störungsglieder zu berechnen hat.

39.

Ich will noch schliesslich zu meinem hier in Rede stehenden Verfahren zwei Bemerkungen einschalten, deren eine sich auf die Berechnung von I, Φ, Ψ aus i, i', θ, θ' bezieht. In der angezogenen Abhandlung habe ich diese durch die Gaussischen trigonometrischen Relationen bewirkt, man kann sich aber auch der folgenden dazu bedienen. Man rechne zuerst die Bögen q und r, so wie $\log\sin p$ und $\log\cos p$ aus den folgenden Gleichungen,

$$\begin{aligned}
\cos p \sin q &= \sin i' \cos(\theta-\theta') \\
\cos p \cos q &= \cos i' \\
\cos p \sin r &= \cos i' \sin(\theta-\theta') \\
\cos p \cos r &= \cos(\theta-\theta') \\
\sin p &= \sin i' \sin(\theta-\theta')
\end{aligned}$$

worauf man I, Φ, Ψ durch die folgenden bekommt,

$$\begin{aligned}
\sin I \sin \Phi &= \sin p \\
\sin I \cos \Phi &= \cos p \sin(i-q) \\
\sin I \sin(\Psi-r) &= \sin p \cos(i-q) \\
\sin I \cos(\Psi-r) &= \sin(i-q) \\
\cos I &= \cos p \cos(i-q).
\end{aligned}$$

Die Bögen q und r sind immer so zu bestimmen, dass $\cos p$, und Φ und Ψ so, dass immer $\sin I$ positiv wird, wodurch die Quadranten, in welchen diese vier Bögen zu nehmen sind, völlig bestimmt werden, während bei der Anwendung jener Formeln in Bezug auf Φ und Ψ wohl zuweilen ein Zweifel entstehen könnte. Als Beispiel der Anwendung der vorstehenden Ausdrücke soll das der Abhandlung dienen. Gegeben sind also hier

$$i = 7^0\, 8'\, 26''5;\ i' = 1^0\, 18'\, 46''5;\ \theta-\theta' = 4^0\, 14'\, 52''$$

und hiemit erhält man

$$\begin{array}{lcl}
\log\cos(\theta-\theta') & = & 9.99881 \\
\log\sin i' & = & 8.36007 \\
\log\sin(\theta-\theta') & = & 8.86964 \\
\log\cos i' & = & 9.99989 \\
\hline
\log\sin p & = & 7.22971
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
 & & 8.35888 \\
\log\cos q & = & 9.99989 \\
 & & 9.99989 \\
\hline
\log \mathrm{tg}\, q & = & 8.35899 \\
q & = & 1^0\, 18'\, 33''5 \\
i-q & = & 5\ \ 49\ \ 53.0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
 & & 8.86958 \\
\log\cos r & = & 9.99881 \\
 & & 9.99881 \\
\hline
\log \mathrm{tg}\, r & = & 8.87072 \\
r & = & 4^0\, 14'\, 48''
\end{array}$$

$$\log\cos p = 0$$

$$\begin{array}{lcl}
\log\sin(i-q) & = & 9.00690 \\
\log\cos p & = & 0 \\
\log\cos(i-q) & = & 9.99775 \\
\log\sin p & = & 7.22971 \\
\hline
\log\cos I & = & 9.99775
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
 & & 7.22971 \\
\log\cos\Phi & = & 9.99994 \\
 & & 9.00690 \\
\hline
\log \mathrm{tg}\, \Phi & = & 8.22281 \\
\Phi & = & 0^0\, 57'\, 25''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
 & & 7.22746 \\
\log\cos(\Psi'-r) & = & 9.99924 \\
 & & 9.00690 \\
\hline
\log \mathrm{tg}\, (\Psi'-r) & = & 8.22056 \\
\Psi'-r & = & 0^0\, 57'\ \ 7'' \\
\Psi' & = & 5\ \ 11\ \ 55
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\log\sin I & = & 9.00696 \\
I & = & 5^0\, 49'\, 56''
\end{array}$$

mit der Abhandlung übereinstimmend.

40.

Die andere Bemerkung betrifft die beiden indirecten Integrationen, die in meinem Verfahren vorkommen, und von welchen ich hier zeigen werde, dass sie sich in directe verwandeln lassen. Nehmen wir die Differentialgleichung

$$D^2 w = -\mu w + G$$

des Art. 8 der angezogenen Abhandlung vor, in welcher ich zur Abkürzung hier

$$\mu = \frac{\lambda^2 k^2}{r^3}$$

gesetzt habe. Bezeichnet man nun hier, gleichwie in der Abhandlung, durch ein der Function vorgesetztes S das Verfahren der mechanischen Quadratur, wodurch das Integral erhalten wird, so bekommen wir aus der vorstehenden Differentialgleichung zuerst

$$w = -SS\mu w + SSG$$

und substituirt man diesen Werth von w in die rechte Seite der Differentialgleichung, so wird diese

$$D^2 w = G - \mu SSG + \mu SS\mu w$$

deren Integration

$$w = SSG - SS\mu SSG + SS\mu SS\mu w$$

giebt. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man

$$w = SSG - SS\mu SSG + SS\mu SS\mu SSG - SS\mu SS\mu SS\mu SSG \pm \text{etc.}$$

durch welche die indirecte Integration in eine directe verwandelt worden ist. Um diesen Ausdruck anwenden zu können, ist erforderlich, dass die unendliche Reihe, die er bildet, convergire, und man kann immer das Interval zwischen den zu berechnenden Werthen von G so klein annehmen, dass dieses der Fall ist. Wenn die Reihe schwach convergirt, dann ist aber ihre Anwendung zeitraubender wie die indirecte Integration, die daher in diesem Falle vorzuziehen ist. Die Convergenz dieser Reihe nimmt immer ab, so wie die Werthe des Integrals grösser werden, und es ist daher von keinem Vortheil sie durchgehends anzuwenden, aber für die ersten Glieder des Integrals kann sie mit Nutzen angewandt werden. Um diese Art ihrer Anwendung zu zeigen, will ich die zehn ersten Glieder von w, des der angezogenen Abhandlung beigefügten Beispiels darnach berechnen. Man bekommt für die beigesetzten Zeiten

		log μ	SSG	$SS\mu SSG$	$SS\mu SS\mu SSG$	$SS\mu SS\mu SS\mu SSG$
1853	Aug. 21	8.5133	+ 1.73	0.00	0.00	0.00
	Oct. 2	8.5280	1.51	0.00	0.00	0.00
	Nov. 13	8.5456	11.49	+ 0.08	0.00	0.00
	Dec. 25	8.5656	25.11	0.58	0.00	0.00
1854	Febr. 5	8.5874	34.29	1.98	+0.03	0.00
	März 19	8.6105	+ 29.49	4.67	0.14	0.00
	April 30	8.6338	— 0.16	8.48	0.44	+0.01
	Juni 11	8.6564	66.42	12.12	1.11	0.04
	Juli 23	8.6772	181.31	12.53	2.31	0.13
	Sept. 3	8.6950	—355.96	+ 4.05	+4.08	+0.33

und hiemit durch den obigen Ausdruck, für dieselben Zeiten,

$w = +$ 1.7
1.5
11.4
24.5
32.3
+ 25.0
— 8.2
77.5
191.7
—356.3

mit der Abhandlung bis auf höchstens 0,1 übereinstimmend. Es versteht sich von selbst, dass das Integral, welches z_0 giebt, eben so behandelt werden kann.

Zusatz III.

41.

Es sollen hier die Ausdrücke abgeleitet werden, durch welche ich die Coefficienten der Bedingungsgleichungen des Art. 12, und die dort angegebenen, durch Fehler in den angewandten Sonnenörtern bewirkten, Verbesserungen der völlig bekannten Glieder dieser Gleichungen berechnet habe. Bezeichnet man mit

r den Radius Vector eines Planeten oder Cometen,

f die wahre Anomalie desselben,

χ den Winkel zwischen dem Peribel und der positiven X Achse in der idealen Bahnebene,

σ den Bogen in derselben Ebene, von derselben Achse bis zum aufsteigenden Knoten auf dem Aequator (oder der Ecliptik),

i die Neigung derselben Ebene gegen den Aequator (oder die Ecliptik),

θ die grade Aufsteigung (oder Länge) des aufsteigenden Knotens,

dann kann man zufolge der ersten Abhandlung über die absoluten Störungen der kleinen Planeten die rechtwinklichen heliocentrischen Coordinaten des Planeten in Bezug auf den Aequator (oder die Ecliptik) durch diese Grössen ausdrücken. Seien diese Coordinaten x, y, z, so wie die heliocentrische grade Aufsteigung und Abweichung (oder Länge und Breite) des Planeten α und δ, dann wird zuerst

$$x = r\cos\delta\cos\alpha$$
$$y = r\cos\delta\sin\alpha$$
$$z = r\sin\delta$$

aber wenn man ausserdem, wie im Art. 7, die Summe der planetarischen Störungen der Abweichung des Planeten mit s bezeichnet, dann ist mit hier ausreichender Genauigkeit

$$\cos\delta\sin(\alpha-\theta) = \cos i\sin(f+\chi-\sigma) - s\,\mathrm{tg}\,i$$
$$\cos\delta\cos(\alpha-\theta) = \cos(f+\chi-\sigma)$$
$$\sin\delta = \sin i\sin(f+\chi-\sigma) + s$$

die Substitution giebt daher

$$x = r\cos(f+\chi-\sigma)\cos\theta - r\sin(f+\chi-\sigma)\sin\theta\cos i + rs\,\mathrm{tg}\,i\sin\theta$$
$$y = r\cos(f+\chi-\sigma)\sin\theta + r\sin(f+\chi-\sigma)\cos\theta\cos i - rs\,\mathrm{tg}\,i\cos\theta$$
$$z = r\sin(f+\chi-\sigma)\sin i + rs.$$

Die Veränderungen von σ und θ sind zufolge der angezogenen Abhandlung nicht von einander unabhängig, sondern unterliegen der Bedingungsgleichung $d\sigma = \cos i\, d\theta$, da wir nun hier den Zuwachs irgend einer Grösse durch ein derselben vorgesetztes Δ bezeichnen werden, so haben wir nach den weiter unten vorkommenden Differentiationen

$$\Delta\sigma = \cos i\Delta\theta$$

zu setzen.

Die vorstehenden Ausdrücke setzen einen festen Aequator (oder eine feste Ecliptik) nebst zugehörigem Aequinox voraus, aber dem Vorhergehenden zufolge ist, um sie auf den gleichzeitigen Aequator (oder Ecliptik) nebst zugehörigem Aequinox zu beziehen, nichts weiter nöthig, als $i+\frac{\xi}{\cos i}$ statt i, $\chi-\sigma+\eta$ statt $\chi-\sigma$, und $\theta+\lambda$ statt θ zu schreiben, und dieses soll unten geschehen. Es soll ferner zur Abkürzung

$$\chi-\sigma = \pi-\theta = \omega, \quad \text{und } i+\frac{\xi}{\cos i} = (i)$$

gesetzt werden, wo π die grade Aufsteigung (oder Länge) des Perihels bedeutet.

12.

Beziehen wir von nun an alle betreffenden Grössen ausschliesslich auf den gleichzeitigen Aequator und das zugehörige Aequinox, und nennen

d die Entfernung des Planeten oder Cometen von dem Mittelpunkt der Erde,

α' die geocentrische grade Aufsteigung,

δ' die geocentrische Abweichung desselben,

und bezeichnen die jenen parallelen rechtwinklichen Coordinaten der Sonne mit x_1, y_1, z_1, so werden

$$d\cos\delta'\cos\alpha' = x+x_1$$
$$d\cos\delta'\sin\alpha' = y+y_1$$
$$d\sin\delta' = z+z_1.$$

Die Differentiation dieser Gleichungen giebt, wenn die Sonnencoordinaten vorläufig constant angenommen werden,

$$\begin{aligned}
\Delta d\,.\cos\delta'\cos\alpha' - d\Delta\delta'.\sin\delta'\cos\alpha' - d\Delta\alpha'.\cos\delta'\sin\alpha' &= \Delta x\\
\Delta d\,.\cos\delta'\sin\alpha' - d\Delta\delta'.\sin\delta'\sin\alpha' + d\Delta\alpha'.\cos\delta'\cos\alpha' &= \Delta y\\
\Delta d\,.\sin\delta' \qquad + d\Delta\delta'.\cos\delta' \qquad &= \Delta z
\end{aligned}$$

woraus durch die Elimination

$$\begin{aligned}
d\Delta\alpha'.\cos\delta' &= -\Delta x\,.\sin\alpha' + \Delta y\,.\cos\alpha'\\
d\Delta\delta' &= -\Delta x\,.\sin\delta'\cos\alpha' - \Delta y\,.\sin\delta'\sin\alpha' + \Delta z\,.\cos\delta'\\
\Delta d &= \Delta x\,.\cos\delta'\cos\alpha' + \Delta y\cos\delta'\sin\alpha' + \Delta z\,.\sin\delta'
\end{aligned}$$

folgt.

43.

Bei der Differentiation der Ausdrücke des vorvor. Art. der Coordinaten x, y, z in Bezug auf die darin enthaltenen Elemente ist vor Allem zu bemerken, dass die Veränderungen der letzteren so klein angenommen werden, dass sie auf den Betrag der Störungen keinen irgend wie merklichen Einfluss äussern können, und es dürfen daher die Störungen als unveränderlich betrachtet werden. Da ferner s immer klein ist, so darf man bei den Differentiationen in Bezug auf i und θ die beiden Producte $s \operatorname{tg} i \cos\theta$ und $s \operatorname{tg} i \sin\theta$ unverändert lassen; die Berücksichtigung der Veränderungen dieser Glieder würde die Coefficienten der Bedingungsgleichungen nur unbedeutend ändern, übrigens ist die Zuziehung derselben in einem extremen Falle mit gar keinen Schwierigkeiten verbunden, nur muss man in diesem Falle $\left(\frac{s}{\cos i}\right)\sin i\cos\theta$ und $\left(\frac{s}{\cos i}\right)\sin i\sin\theta$ schreiben, und jeden Falls $\left(\frac{s}{\cos i}\right)$ als constant betrachten. Da unter den zu bestimmenden Verbesserungen der Elemente auch die der Masse m' des störenden Körpers mit aufgenommen, und mit $\mu m'$ bezeichnet werden soll, so ist bei den Differentiationen auch darauf Rücksicht zu nehmen. Der Strenge nach müssten die Störungen zweiter Ordnung den Factor 2μ bekommen, allein in Betracht der Kleinheit dieser, so wie in der Voraussetzung, dass auch μ klein ausfallen wird, kann hievon ohne Nachtheil der Genauigkeit abgesehen werden. In Folge dieser Bemerkungen, so wie der schon im Art. 41 aufgestellten Bedingungsgleichung bekommt man leicht

$$
\begin{aligned}
\Delta x = & -r\Delta(f+\chi)\{\sin(f+\omega+\eta)\cos(\theta+\lambda)+\cos(f+\omega+\eta)\sin(\theta+\lambda)\cos(i)\} \\
& +\Delta r\{\cos(f+\omega+\eta)\cos(\theta+\lambda)-\sin(f+\omega+\eta)\cos(\theta+\lambda)\cos(i)\} \\
& +r\Delta i\sin(f+\omega+\eta)\sin(\theta+\lambda)\sin(i) \\
& -r\Delta\theta\cos(f+\omega+\eta)\sin(\theta+\lambda)\sin^2(i) \\
& +\mu r\left(\frac{s}{\cos i}\right)\sin(i)\sin(\theta+\lambda) \\
\Delta y = & -r\Delta(f+\chi)\{\sin(f+\omega+\eta)\sin(\theta+\lambda)-\cos(f+\omega+\eta)\cos(\theta+\lambda)\cos(i)\} \\
& +\Delta r\{\cos(f+\omega+\eta)\sin(\theta+\lambda)+\sin(f+\omega+\eta)\cos(\theta+\lambda)\cos(i)\} \\
& -r\Delta i\sin(f+\omega+\eta)\cos(\theta+\lambda)\sin(i) \\
& +r\Delta\theta\cos(f+\omega+\eta)\cos(\theta+\lambda)\sin^2(i) \\
& -\mu r\left(\frac{s}{\cos i}\right)\sin(i)\cos(\theta+\lambda) \\
\Delta z = & \quad r\Delta(f+\chi)\cos(f+\omega+\eta)\sin(i) \\
& +\Delta r\sin(f+\omega+\eta)\sin(i) \\
& +r\Delta i\sin(f+\omega+\eta)\cos(i) \\
& -r\Delta\theta\{\cos(f+\omega+\eta)\sin(i)\cos(i) \\
& +\mu r\left(\frac{s}{\cos i}\right)\cos(i)
\end{aligned}
$$

wobei zu bemerken ist, dass die von den Störungen der mittleren Anomalie und des Logarithmus des Radius Vectors abhängigen und mit μ multiplicirten Glieder hier noch in Δr und Δf implicite enthalten sind.

Die Substitution der vorstehenden Ausdrücke in die für $\Delta\alpha'$ und $\Delta\delta'$ des vor. Art. giebt nun

$$
\begin{aligned}
\Delta\alpha' = & \quad r\Delta(f+\chi)\{\sin(f+\omega+\eta)\sin(\alpha'-\theta-\lambda)+\cos(f+\omega+\eta)\cos(\alpha'-\theta-\lambda)\cos(i)\} \\
& -\Delta r\{\cos(f+\omega+\eta)\sin(\alpha'-\theta-\lambda)-\sin(f+\omega+\eta)\cos(\alpha'-\theta-\lambda)\cos(i)\} \\
& -r\Delta i\sin(f+\omega+\eta)\cos(\alpha'-\theta-\lambda)\sin(i) \\
& +r\Delta\theta\cos(f+\omega+\eta)\cos(\alpha'-\theta-\lambda)\sin^2(i) \\
& -\mu r\left(\frac{s}{\cos i}\right)\sin(i)\cos(\alpha'-\theta-\lambda) \\
\Delta\delta' = & \quad r\Delta(f+\chi)\{\cos(f+\omega+\eta)\sin(i)\cos\delta' \\
& +[\sin(f+\omega+\eta)\cos(\alpha'-\theta-\lambda)-\cos(f+\omega+\eta)\sin(\alpha'-\theta-\lambda)\cos(i)]\sin\delta'\} \\
& +\Delta r\{\sin(f+\omega+\eta)\sin(i)\cos\delta' \\
& -[\cos(f+\omega+\eta)\cos(\alpha'-\theta-\lambda)+\sin(f+\omega+\eta)\sin(\alpha'-\theta-\lambda)\cos(i)]\sin\delta'\} \\
& +r\Delta i\{\cos(i)\cos\delta'+\sin(i)\sin\delta'\sin(\alpha'-\theta-\lambda)\}\sin(f+\omega+\eta) \\
& -r\Delta\theta\{\cos(i)\cos\delta'+\sin(i)\sin\delta'\sin(\alpha'-\theta-\lambda)\}\cos(f+\omega+\eta)\sin(i) \\
& +\mu r\left(\frac{s}{\cos i}\right)\{\cos(i)\cos\delta'+\sin(i)\sin\delta'\sin(\alpha'-\theta-\lambda)\}
\end{aligned}
$$

Die Entwickelung von Δd werde ich unterlassen, da diese Aenderung zu den hier beabsichtigten Zwecken nicht erforderlich ist.

44.

Die eben erhaltenen Ausdrücke lassen sich durch Einführung von Hülfsbögen sehr vereinfachen. Bestimmt man p, P, u, U, q, Q durch die folgenden Ausdrücke,

$$\begin{aligned}
\cos p \sin P &= \sin(\alpha' - \theta - \lambda) \\
\cos p \cos P &= \cos(i) \cos(\alpha' - \theta - \lambda) \\
\sin p & \quad \sin(i) \cos(\alpha' - \theta - \lambda) \\
\cos u \sin U &= \sin \delta' \sin(\alpha' - \theta - \lambda) \\
\cos u \cos U &= \cos \delta' \\
\sin u &= \sin \delta' \cos(\alpha' - \theta - \lambda) \\
\cos q \sin Q &= \sin u \\
\cos q \cos Q &= \cos u \sin((i) - U) \\
\sin q &= \cos u \cos((i) - U)
\end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, dass man die Bögen p, u, q selbst nicht zu suchen braucht, da nur ihre Sinusse und Cosinusse gebraucht werden, so gehen die im vor. Art. erhaltenen Ausdrücke in die folgenden, wesentlich einfacheren über:

$$\begin{aligned}
d \cos \delta' \Delta \alpha' = & \; \Delta(f+\chi) \, . \, r \cos p \cos(f+\omega+\eta-P) \\
& + \Delta r \cos p \sin(f+\omega+\eta-P) \\
& - \Delta i \, . \, r \sin p \sin(f+\omega+\eta) \\
& + \Delta \theta \, . \, r \sin p \cos(f+\omega+\eta) \sin(i) \\
& - \mu r \left(\frac{s}{\cos i}\right) \sin p \\
d \Delta \delta' = & \; \Delta(f+\chi) \, . \, r \cos q \cos(f+\omega+\eta-Q) \\
& + \Delta r \cos q \sin(f+\omega+\eta-Q) \\
& + \Delta i \, . \, r \sin q \sin(f+\omega+\eta) \\
& - \Delta \theta \, . \, r \sin q \cos(f+\omega+\eta) \sin(i) \\
& + \mu r \left(\frac{s}{\cos i}\right) \sin q
\end{aligned}$$

in welche die Differentiale der elliptischen Elemente einzuführen sind.

45.

Die Theorie der Bewegung giebt mit Rücksicht auf die hier stattfindende Form der Störungen

$$\frac{{}^2}{{}^2}\cos\varphi\,.\,\Delta c + t\frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\,.\,\Delta n + \frac{2+\sin\varphi\cos f}{\cos\varphi}\sin f\,.\,\Delta\varphi + \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\,.\,\mu n\delta z$$

$$\cdot\frac{\Delta a}{a} + a\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin f\,.\,\Delta c + ta\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin f\,.\,\Delta n - a\cos\varphi\cos f\,.\,\Delta\varphi + a\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin f\,.\,\mu n\delta z$$

$$\bar{\cdot}\,(1+\nu)$$

$$\Delta\bar{r}\,(1+\nu) + \mu\bar{r}\nu$$

wo wie immer $n\delta z$ und $\nu\bar{r}$ die Störungen der mittleren Anomalie und des Radius Vectors sind. Statt f muss man in diesen Ausdrücken $\bar{f}$ verstehen, ich durfte aber das Unterscheidungszeichen weglassen, weil in allen vorhergehenden Ausdrücken auch $\bar{f}$ statt f verstanden werden muss.

Die Substitution dieser Ausdrücke in die im vor. Art. erhaltenen bringt in den Coefficienten der Aenderungen der elliptischen Elemente Glieder zum Vorschein die mit ν multiplicirt sind, aber aus demselben Grunde, aus welchem oben die Aenderung der Glieder s tg i cos θ und s tg i sin θ weggelassen wurde, darf man auch diese weglassen, deren Zuziehung übrigens keine Schwierigkeiten darbietet. Es ist noch hiebei zu bemerken, dass bei dem hier erklärten Verfahren die grössten Störungen, nemlich der Werth von $n\delta z$, in den Coefficienten vollständig berücksichtigt wird, und nur die Werthe von v und s, die immer viel kleiner sind, übergangen werden. Führt man nun den vorstehenden Bemerkungen gemäss die Substitution aus, und berücksichtigt dabei die Gleichung

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}$$

so bekommt man nach einigen leichten Reductionen, und wenn man zur Abkürzung

$$h = \frac{r\cos p}{d},\quad k = \frac{r\sin p}{d},\quad m = \frac{2}{3}\cdot\frac{206265''}{n}$$

$$h' = \frac{r\cos q}{d},\quad k' = \frac{r\sin q}{d}$$

$$A_1 = \frac{h}{\cos\varphi}\cdot\frac{a}{r}\cdot\cos(f+\omega+\eta-P) + h\frac{a}{r}\cdot\mathrm{tg}\,\varphi\cos(\omega+\eta-P)$$

$$A_2 = tA_1 - hm\sin(f+\omega+\eta-P)$$

$$A_3 = \frac{h}{\cos\varphi}\sin f\cos(f+\omega+\eta-P) - h\frac{a}{r}\cos\varphi\sin(\omega+\eta-P)$$

$$A_4 = h\cos(f+\omega+\eta-P)$$

$$A_5 = -k\sin(f+\omega+\eta)$$

$$A_6 = k\cos(f+\omega+\eta)\sin(i)$$

$$A_7 = A_1 n\delta z + h\sin(f+\omega+\eta-P)\,\nu - k\left(\frac{s}{\cos i}\right)$$

$$B_1 = \frac{k'}{\cos\varphi}\cdot\frac{a}{r}\cdot\cos(f+\omega+\eta-Q)+k'\frac{a}{r}\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos(\omega+\eta-Q)$$
$$B_2 = tB_1-k'm\sin(f+\omega+\eta-Q)$$
$$B_3 = \frac{k'}{\cos\varphi}\sin f\cos(f+\omega+\eta-Q)-k'\frac{a}{r}\cos\varphi\sin(\omega+\eta-Q)$$
$$B_4 = k'\cos(f+\omega+\eta-Q)$$
$$B_5 = k'\sin(f+\omega+\eta)$$
$$B_6 = -k'\cos(f+\omega+\eta)\sin(i)$$
$$B_7 = B_1 n\delta z+k'\sin(f+\omega+\eta-Q)\,\nu+k'\left(\frac{s}{\cos i}\right)$$

setzt,

$$\cos\delta'\Delta\alpha' = A_1\Delta c+A_2\Delta n+A_3\Delta\varphi+A_4\Delta\chi+A_5\Delta i+A_6\Delta\theta+A_7\mu$$
$$\Delta\delta' = B_1\Delta c+B_2\Delta n+B_3\Delta\varphi+B_4\Delta\chi+B_5\Delta i+B_6\Delta\theta+B_7\mu$$

womit die analytischen Entwickelungen ausgeführt sind.

46.

Wenn die Excentricität des Planeten nicht sehr gross ist, so leiden die beiden eben erhaltenen Ausdrücke in ihrer Anwendung an dem Uebelstande, dass die Coefficienten A_1 und A_4, so wie B_1 und B_4 nahe gleich gross werden und dasselbe Zeichen erhalten. Es wird dadurch mühsam die Werthe von Δc und $\Delta\chi$, durch die Auflösung einer Reihe solcher Gleichungen, abgesondert von einander richtig zu erhalten, Man vermeidet diesen Uebelstand dadurch, dass man statt Δc die Verbesserung der mittleren Länge zur Zeitepoche einführt, und man braucht diese nicht streng zu wählen, sondern es gnügt eine dieser beiläufig gleichkommende Grösse einzuführen, wenn nur die Beziehungen so gewählt werden, dass die Strenge nicht verletzt wird. Nennt man die einzuführende Grösse Δl, und setzt

$$\Delta c = \Delta l-\Delta\chi\cos\varphi$$
$$A_4{}^* = A_4-A_1\cos\varphi$$
$$B_4{}^* = B_4-B_1\cos\varphi$$

dann gehen die Ausdrücke des vor. Art. in die folgenden über

$$\cos\delta'\Delta\alpha' = A_1\Delta l+A_2\Delta n+A_3\Delta\varphi+A_4{}^*\Delta\chi+A_5\Delta i+A_6\Delta\theta+A_7\mu$$
$$\Delta\delta' = B_1\Delta l+B_2\Delta n+B_3\Delta\varphi+B_4{}^*\Delta\chi+B_5\Delta i+B_6\Delta\theta+B_7\mu$$

die zur Anwendung weit geeigneter sind wie jene. Die Coefficienten A_4 und B_4 erhält man durch die vorstehenden Ausdrücke nur mit geringer Genauigkeit, wenn man nicht A_1, A_4, B_1, B_4 mit einer grösseren

Anzahl von Decimalen berechnen will, wie ausserdem nöthig ist, aber man kann auch diese Unbequemlichkeit vermeiden, wenn man die analytischen Ausdrücke jener entwickelt. Diese findet man aus dem Vorhergehenden leicht wie folgt,

$$A_4^* = -h\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}\cos f\cos(f+\omega+\eta-P)-h\operatorname{tg}^2\varphi\cos(f+\omega+\eta-P)$$
$$-h\frac{a}{r}\sin\varphi\cos(\omega+\eta-P)$$
$$B_4^* = -h'\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}\cos f\cos(f+\omega+\eta-Q)-h'\operatorname{tg}^2\varphi\cos(f+\omega+\eta-Q)$$
$$-h'\frac{a}{r}\sin\varphi\cos(\omega+\eta-Q)$$

wozu bemerkt werden kann, dass die beiden dritten Glieder sich aus den beiden zweiten Gliedern der Ausdrücke für A_1 und B_1 durch Multiplication mit $-\cos\varphi$ ergeben.

47.

Hat man nun durch die Auflösung einer Reihe von Gleichungen, wie die oben abgeleiteten, die Werthe der Unbekannten $\varDelta l$, $\varDelta n$, etc. gefunden, so wird vermöge der Gleichung $\varDelta c = \varDelta l - \varDelta\chi\cos\varphi$,

$$\varDelta c = \varDelta l - \varDelta\chi + 2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,\varDelta\chi$$

und vermöge der Gleichungen $\varDelta\sigma = \cos i\,\varDelta\theta$, und $\chi - \sigma = \pi - \theta$,

$$\varDelta\pi = \varDelta\chi + 2\sin^2\tfrac{1}{2}i\,.\,\varDelta\theta$$

aus welchen die Verbesserungen der mittleren Anomalie zur Zeitepoche und der graden Aufsteigung des Perihels hervorgehen. Für i kann man hier das Mittel aus den vorhandenen Werthen der (i) setzen, überhaupt aber ist die Verbesserung von i durch $\frac{\xi}{\cos i}$ in den hier erklärten Rechnungen von weit geringerem Belang, wie die Verbesserungen von ω und θ durch η und λ; in vielen Fällen wird man jene übergehen können, obgleich diese nicht übergangen werden dürfen.

Nach den hier abgeleiteten Ausdrücken sind die Coefficienten der Bedingungsgleichungen des Art. 12 berechnet worden, und es erwiesen sich dabei die von r und s abhängigen Glieder der Coefficienten A_7 und B_7 so klein, dass ich mir erlauben durfte, in jedem der letzteren blos das erste Glied zu berücksichtigen.

48.

Sehen wir jetzt die rechtwinklichen Coordinaten des Planeten oder Cometen als constant, und dahingegen die der Sonne als veränderlich an, dann wird auf ähnliche Weise wie im Art. 42

$$d\cos\delta'\varDelta\alpha = -\varDelta\chi_1 \sin\alpha' + \varDelta y_1 \cos\alpha'$$
$$d\varDelta\delta' = -\varDelta\chi_1 \sin\delta' \cos\alpha' + \varDelta y_1 \sin\delta' \sin\alpha' + \varDelta z_1 \cos\delta'.$$

Bezeichnet man aber mit $\odot$ die wahre tropische Sonnenlänge, mit B die Sonnenbreite, mit R den Radius Vector der Sonne, und mit ε die wahre Schiefe der Ecliptik, so wird

$$x_1 = R\cos\odot$$
$$y_1 = R\sin\odot\cos\varepsilon - BR\sin\varepsilon$$
$$z_1 = R\sin\odot\sin\varepsilon - BR\cos\varepsilon$$

woraus man, wenn in den Coefficienten von $\varDelta R$ und $\varDelta\varepsilon$ die kleinen von B abhängigen Glieder weggelassen werden, die nie merkliche Wirkung äussern können,

$$\varDelta x_1 = -R\varDelta\odot\sin\odot + \varDelta R\cos\odot$$
$$\varDelta y_1 = R\varDelta\odot\cos\odot\cos\varepsilon + \varDelta R\sin\odot\cos\varepsilon - R\varDelta B\sin\varepsilon - R\varDelta\varepsilon\sin\odot\sin\varepsilon$$
$$\varDelta z_1 = R\varDelta\odot\cos\odot\sin\varepsilon + \varDelta R\sin\odot\sin\varepsilon + R\varDelta B\cos\varepsilon + R\varDelta\varepsilon\sin\odot\cos\varepsilon$$

zieht, deren Substitution in die vorstehenden

$$\begin{aligned}d\cos\delta'\varDelta\alpha' = {} & R\varDelta\odot\,\{\sin\odot\sin\alpha' + \cos\odot\cos\varepsilon\cos\alpha'\}\\ & -\varDelta R\,\{\cos\odot\sin\alpha' - \sin\odot\cos\varepsilon\cos\alpha'\}\\ & -R\varDelta B\sin\varepsilon\cos\alpha'\\ & -R\varDelta\varepsilon\sin\odot\sin\varepsilon\cos\alpha'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\varDelta\delta' = {} & R\varDelta\odot\{\cos\odot\sin\varepsilon\cos\delta' + [\sin\odot\cos\alpha' - \cos\odot\sin\alpha'\cos\varepsilon]\sin\delta'\}\\ & +\varDelta R\{\sin\odot\sin\varepsilon\cos\delta' - [\cos\odot\cos\alpha' + \sin\odot\sin\alpha'\cos\varepsilon]\sin\delta'\}\\ & +R\varDelta B\,\{\cos\varepsilon\cos\delta' + \sin\varepsilon\sin\delta'\sin\alpha'\}\\ & +R\varDelta\varepsilon\sin\odot\,\{\cos\varepsilon\cos\delta' + \sin\varepsilon\cos\delta'\sin\alpha'\}\end{aligned}$$

giebt. Setzt man hier

$$\cos p'\sin P' = \sin\alpha'$$
$$\cos p'\cos P' = \cos\alpha'\cos\varepsilon$$
$$\sin p' = \cos\alpha'\sin\varepsilon$$

$$\cos u'\sin U' = \sin\delta'\sin\alpha'$$
$$\cos u'\cos U' = \cos\delta'$$
$$\sin u' = \sin\delta'\cos\alpha'$$

$$\cos q'\sin Q' = \sin u'$$
$$\cos q'\cos Q' = \cos u'\sin(\varepsilon - U')$$
$$\sin q' = \cos u'\cos(\varepsilon - U')$$

so ergiebt sich

$$\cos\delta'\Delta\alpha' = \Delta\odot\frac{R}{d}\cos p'\cos(\odot-P')$$
$$+\Delta(\log.\mathrm{br.}R)\frac{R}{d}\cos p'\sin(\odot-P')\cdot\frac{206265''}{M}$$
$$-\Delta B\frac{R}{d}\sin p'$$
$$-\Delta\varepsilon\frac{R}{d}\sin p'\sin\odot$$

$$\Delta\delta' = \Delta\odot\frac{R}{d}\cos q'\cos(\odot-Q')$$
$$+\Delta(\log.\mathrm{br.}R)\frac{R}{d}\cos q'\sin(\odot-Q')\cdot\frac{206265''}{M}$$
$$+\Delta B\frac{R}{d}\sin q'$$
$$+\Delta\varepsilon\frac{R}{d}\sin q'\sin\odot$$

wo M den Modul der Briggischen Logarithmen bezeichnet, und folglich

$$\log\frac{206265}{M} = 8.6766-10$$

ist, wenn die siebente Decimale des $\log R$ als Einheit angenommen wird.

Nach diesen Ausdrücken, von welchen im vorliegenden Falle blos die mit $\Delta\odot$ multiplicirten Glieder in Betracht kamen, sind diejenigen Verbesserungen der völlig bekannten Glieder der Bedingungsgleichungen des Art. 12 berechnet worden, die von den Fehlern der vorher angewandten Sonnenörter herrühren.

49.

Um die hier entwickelten Ausdrücke durch ein Beispiel zu erläutern, will ich zuerst die Coefficienten A_1, B_1, etc. für die Zeit des im Art. 14 aufgestellten Rechenbeispiels, nemlich für

1862 Sept. 21.5 m. Z. Berlin

berechnen. Die Daten, die aus diesem Beispiel und den vorangehenden Elementen der Egeria zu entnehmen sind, sind die folgenden.

α'	$= 356^0\ 52'69,$	$f+\omega+\eta$	$= 333^0\ 58'57,$	$\log d$	$= 0.29384,$	$\log \xi$	$= 6.5490n$
$\theta+\lambda$	$= 18\ \ 53.28,$	$\omega+\eta$	$= 103\ \ 53.31,$	$\log r$	$= 0.48197,$	subtr. log	$= -24$
$\alpha'-\theta-\lambda$	$= 337^0\ 59'41,$	f	$= 230^0\ \ 5'26,$	$\log a$	$= 0.46103,$	$\log \sin i$	$= 9.78124$
t	$= 12.724,$	n	$= 313364'',$	$\log \sin \varphi$	$= 8.94000,$	$\log \sin (i)$	$= 9.78100$
$\log \sin \delta'$	$= 9.60537n$	$\log \cos \delta'$	$= 9.96150$	$\log \cos \varphi$	$= 9.99835,$	$\log \cos (i)$	$= 9.90147$
						(i)	$= 37^0\ 9'49$

und hiemit bekommt man zuerst

$\log \cos (i)$	$= 9.90147,$	$\log \sin (\alpha'-\theta-\lambda)$	$= 9.57376n$	$\log \sin ((i)-U)$	$= 9.66847$
$\log \cos (\alpha'-\theta-\lambda)$	$= 9.96713,$	$\log \sin \delta'$	$= 9.60537n$	$\log \cos u$	$= 9.96734$
$\log \sin (i)$	$= 9.78100$	$\log \cos (\alpha'-\theta-\lambda)$	$= 9.96713$	$\log \cos ((i)-U)$	$= 9.94684$
$\log \sin (\alpha'-\theta-\lambda)$	$= 9.57376n$		9.17913	$\log \sin u$	$= 9.57250n$
$\log \cos P$	$= 9.95030$	$\log \cos U$	$= 9.99416$	$\log \sin Q$	$= 9.87884$
	9.86860	$\log \cos \delta'$	$= 9.96150$		9.63581
$\log \operatorname{tg} P$	$= 9.70516n$	$\log \operatorname{tg} U$	$= 9.21763$	$\log \operatorname{tg} Q$	$= 9.93669n$
	$333^0 58'57$	U	$= 9^0\ 22'65$		$333^0 58'57$
P	$= -26\ \ 53.58$	(i)	$= 37\ \ 9.49$	Q	$= -40\ \ 50.31$
	$103\ \ 53.31$	$(i)-U$	$= 27^0 46'84$		$103\ \ 53.31$
$f+\omega+\eta-P$	$= 0^0 52'15$	$\log \sin u$	$= 9.57250n$	$f+\omega+\eta-Q$	$= 14^0 48'88$
$\omega+\eta-P$	$= 130\ \ 46.89$	$\log \cos u$	$= 9.96734$	$\omega+\eta-Q$	$= 144\ \ 43.62$
$\log \sin p$	$= 9.74813$	$\log 206265$	$= 5.31443$	$\log \sin q$	$= 9.91417$
$\log r:d$	$= 0.18813$	$\log 2:3$	$= 9.82391$	$\log r:d$	$= 0.18813$
$\log \cos p$	$= 9.91830$	$\log n$	$= 5.49605$	$\log \cos q$	$= 9.75697$
$\log h$	$= 0.10643$	$\log m$	$= 9.64229$	$\log h'$	$= 9.94510$
$\log k$	$= 9.93626$			$\log k'$	$= 0.10230$

womit die Berechnung der Hülfsgrössen ausgeführt ist. Die fernere Rechnung steht nun so:

$\log h$	$= 0.10643,$	$\log ha:r$	$= 0.08549,$	$\log h$	$= 0.106$ [illegible]
$\log a:r$	$= 9.97906$	$\log \operatorname{tg}\varphi$	$= 8.94165$	$\log m$	$= 9.64$ [illegible]
$\log \cos (f+\omega+\eta-P)$	$= 9.99995$	$\log \cos (\omega+\eta-P)$	$= 9.81500n$	$\log \sin (f+\omega+\eta-P)$	$= 8.18$ [illegible]
$C \log \cos \varphi$	$= 0.00165$		$8.84214n$		7.92 [illegible]
	0.08709	$\log \cos \varphi$	$= 9.99835n$	$\log A_1$	$= 0.06168$
	$+1.2221$	*)	8.84049	$\log t$	$= 1.10463$ . . . $-0.$ [illegible]
	-0.0695				1.16631 . . $+14$ [illegible]
A_1	$= +1.1526$			A_2	$= +14$ [illegible]

$\log h \cos (f+\omega+\eta-P)$	$= 0.10638,$	$\log ha:r$	$= 0.08549$		
$\log \sin f$	$= 9.88481n$	$\log \sin (\omega+\eta-P)$	$= 9.87921$		-0.9837
$C \log \cos \varphi$	$= 0.00165$	$\log \cos \varphi$	$= 9.99835n$		-0.9184
	9.99284		$9.96305n$	A_3	$= -1.9021$

$\log h$	$= 0.10643n$	. . . .	$0.10643n$		$+0.07194$
$\log \operatorname{tg} \varphi$	$= 8.94165$	$\log \operatorname{tg}^2 \varphi$	$= 7.88330$		-0.00977
$\log \cos f$	$= 9.80727n$				$+0.06926$ . . Sie [illegible]
$\log \cos (f+\omega+\eta-P)$	$= -5$	. . . .	-5	A_4^*	$= +0.13143$
$C \log \cos \varphi$	$= 0.00165$		$7.98968n$		
	8.85695				

$\log k$	$= 9.93626n$	. . . .	9.93626	log Jup. Stör.	$= 9.4657n$
$\log \sin (f+\omega+\eta)$	$= 9.64221n$	$\log \cos (f+\omega+\eta)$	$= 9.95357$	$\log A_1$	$= 0.0617$
	9.57847	$\log \sin (i)$	$= 9.78100$		$9.5274n$
A_5	$= +0.3789$		9.67083		
		A_6	$= +0.4686$	A_7	$= -0.3368$

	$= 9.94510,$	$\log h'a:r$	$= 9.92416$	$\log h'$	$= 9.9451$
	$= 9.97906$	$\log \operatorname{tg} \varphi$	$= 8.94165]$	$\log m$	$= 9.6422n$
$(f+\omega+\eta-Q)$	$= 9.98532$	$\log \cos(\omega+\eta-Q)$	$= 9.91494n$	$\log \sin(f+\omega+\eta-Q)$	$= 9.4077$
$s\ \varphi$	$= 0.00465$		$8.77772n$		$8.9950n$
	9.91418	$\log \cos \varphi$	$= 9.99835n$	$\log B_1 = 9.87800$	
	$+0.8150$	*)	8.77607	$\log t = 1.10463$	-0.099
	-0.0599			0.98263 . . .	$+9.608$
$B_1 =$	$+0.7551$			$B_2 =$	$+9.509$

$s(f+\omega+\eta-Q)$	$= 9.93042,$	$\log h'a \cos\varphi:r$	$= 9.92251n$		-0.6560
$\sec \varphi$	$= 9.88646n$	$\log \sin(\omega+\eta-Q)$	$= 9.76153$		-0.4831
	$9.81688n$		$9.68404n$	$B_3 =$	-1.1391

	$= 9.94510n$		$9.94510n$		$+0.04797$
$\cos f$	$= 8.74892n$	$\log \operatorname{tg}^2 \varphi$	$= 7.88330$		-0.00651
$(f+\omega+\eta-Q)\sec\varphi$	$= 9.98697$	$\log \cos(f+\omega+\eta-Q)$	$= 9.98532$		$+0.05971$ . . . . S. *)
	8.68099		$7.81372n$	$B_4^* =$	$+0.10117$

	$= 0.10230$		$0.10230n,$	$\log$ Jup. Stör.	$= 9.4657n$
$(f+\omega+\eta)$	$= 9.64221n$	$\log \cos(f+\omega+\eta)$	$= 9.95357$	$\log B_1$	$= 9.8780$
	$9.74451n$	$\log \sin(i)$	$= 9.78100$		$9.3437n$
			$9.83687n$		
$B_5 =$	-0.5553	$B_6 =$	-0.6869	$B_7 =$	-0.2206

Die kleinen Unterschiede zwischen den hier berechneten und den im Art. 12 angesetzten Coefficienten rühren davon her, dass hier die Rechnung mit den definitiven Oertern und Elementen ausgeführt worden sind, während für jene Angaben nur die provisorischen Oerter und Elemente angewandt werden konnten. Die Unterschiede sind übrigens ganz unbedeutend.

50.

Für das Beispiel der Anwendung der Ausdrücke zur Verbesserung der geocentrischen Oerter des Planeten oder Cometen wegen Fehler in den angewandten Sonnenörtern will ich wieder dieselbe Zeit wählen, und die Daten sind daher dieselben wie vorher, nur dass

$$\varepsilon = 23^0\ 27',\ \odot = 178^0\ 41'\ \log R = 0.0014$$

hinzukommen, wogegen einige des vorigen Beispiels wegfallen. Die Berechnung der Hülfsgrössen steht nun wie folgt,

$\log \cos \varepsilon$	$= 9.9626$	$\log \sin \alpha'$	$= 8.7361n$	$\log \sin(\varepsilon-U')$	$= 9.5752$
$\log \cos \alpha'$	$= 9.9994$	$\log \sin \delta'$	$= 9.6054n$	$\log \cos u'$	$= 9.9616$
$\log \sin \varepsilon$	$= 9.5998$	$\log \cos \delta'$	$= 9.9994$	$\log \cos(\varepsilon-U')$	$= 9.9669$
$\log \sin \alpha'$	$= 8.7361n$		8.3415	$\log \sin u'$	$= 9.6048n$
$\log \cos P'$	$= 9.9992$	$\log \cos U'$	$= 9.9999$	$\log \sin Q'$	$= 9.8808n$
	9.9620	$\log \cos \delta'$	$= 9.9645$		9.5368
$\log \operatorname{tg} P'$	$= 8.7741n$	$\log \operatorname{tg} U'$	$= 8.3800$	$\log \operatorname{tg} Q'$	$= 0.0680n$
$\odot_1$	$= 178^0\ 41'$				
P'	$= -3\ 24$	U'	$= 1^0\ 22'$	Q'	$= -49^0\ 28'$
$\odot - P'$	$= 182^0\ 5'$	ε	$= 23\ 27$	$\odot'$	$= 178\ 41$
$\log \sin p'$	$= 9.5992$	$\varepsilon - U'$	$= 22^0\ 5'$	$\odot - Q'$	= [illegible]
$\log \cos p'$	9.9628	$\log \sin u'$	$= 9.6048n$	$\log \sin q'$	
		$\log \cos u'$	$= 9.9616$	$\log \cos q'$	

und ferner ergiebt sich:

log $R:d$	$= 9.7576$	. . . . .	9.7204	. . . . .	9.7576n
log cos p'	$= 9.9628$	. . . . .		log sin p'	$= 9.5992$
log cos $(\odot - P')$	$= -8n,$	log sin $(\odot - P')$	$=$ 8 5605n		9.3568n
	9.7201n	log const.	$=$ 8 6766	log sin $\odot$	$= 8.3613$
			6.9575n		7.7181n
log $R:d$	$= 9.7576$	. . . . .	9.4846,	. . . . .	9.7576
log q'	$= 9.7240$	. . . . .		log sin q'	$= 9.8285$
log cos $(\odot - Q')$	$= 9.8242n$	log sin $(\odot - Q')$	$= 9.8724n$		9.6861
	9.3058n	log const.	$= 8.6766$	log sin $\odot$	$= 8.3613$
			8.0303n		8.0474

Die Ausdrücke für die Verbesserungen werden demnach

$$\cos\delta' \varDelta\alpha' = -(9.7201)\,\varDelta\odot - (6.9575)\,\varDelta(\text{log. br.}\,R)$$
$$-(9.3568)\,\varDelta B - (7.7181)\,\varDelta\varepsilon$$
$$\varDelta\delta' = -(9.3058)\,\varDelta\odot - (8.0303)\,\varDelta(\text{log. br.}\,R)$$
$$+(9.6861)\,\varDelta B + (8.0474)\,\varDelta\varepsilon$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der Coefficienten sind.

Im Art. 12 wurde für diese Zeit mit Uebergehung der übrigen Fehler $\varDelta\odot = +2''4$ gefunden, substituirt man diesen Werth in die vorstehenden Ausdrücke, so erhält man

$$\cos\delta' \varDelta\alpha' = -1''3\,, \quad \varDelta\delta' = -0''5$$

wie a. a. O. angegeben ist.

Zusatz IV.

51.

Schon vor mehr wie 40 Jahren habe ich mir Hülfstafeln für die Berechnung der Parallaxe eines Planeten oder Cometen in grader Aufsteigung und Abweichung berechnet, und da ich der Meinung bin, dass diese nicht ohne Nutzen angewandt werden können, so will ich einen Auszug davon hier mittheilen.

Bezeichnet man mit α und δ die beobachtete grade Aufsteigung und Abweichung eines Planeten oder Cometen, mit τ die Sternzeit dieser Beobachtung, und mit d die gleichzeitige Entfernung dieses Ge-

stirns von der Erde; ferner mit φ die geocentrische Breite, mit ϱ den Erdhalbmesser des Beobachtungsortes, und mit π die Aequatorealhorizontalparallaxe der Sonne, dann ist für das Gestirn die

Parallaxe in grader Aufsteigung $= \frac{\pi\varrho\cos\varphi}{d\cos\delta}\sin(\tau-\alpha)$

Parallaxe in Abweichung $= -\frac{\pi\varrho\cos\varphi}{d}\sin\delta\cos(\tau-\alpha)+\frac{\pi\varrho\sin\varphi}{d}\cos\delta$

wo die Vorzeichen so gestellt sind, dass man die Parallaxen zu den beobachteten Oertern addiren muss, um die auf den Mittelpunkt der Erde reducirten zu erhalten. Setzt man nun

$$T = \pi\varrho\cos\varphi\sin(\tau-\alpha)$$
$$T_1 = -\pi\varrho\cos\varphi\cos(\tau-\alpha)$$
$$T' = \pi\varrho\sin\varphi$$

dann wird die

$$\text{Parallaxe in } \alpha = \frac{T}{d\cos\delta}$$
$$\text{Parallaxe in } \delta = \frac{T_1\sin\delta}{d}+\frac{T'\cos d}{d}$$

Die Grössen T und T_1 kann man für jede Sternwarte mit sehr wenig Mühe in eine Tafel mit dem Argument Stundenwinkel oder $\tau-\alpha$ bringen, und die Tafel für T kann auch für T_1 dienen, wenn für jede der beiden Parallaxen ein besonderes Argument angesetzt wird, auch kann man dieser Tafel für jede Sternwarte den Logarithmus von T' beifügen. Nach diesen Grundsätzen ist die folgende Tafel ausgeführt, und dabei

$$\pi = 8''92$$

gesetzt worden. Ich habe die eine Seite der Tafel vollständig ausgeführt, und auf der anderen blos die Argumente angesetzt, damit man nach Bedürfniss die Columnen für die Sternwarten sich ausfüllen könne.

Beispiel.

Beobachtung der Egeria in Berlin.

1850 Nov. 24. $6^h 17^m 11^s 4$ m. Ortszeit. $\alpha = 25^\circ 19' 51''8$, $\delta = +8^\circ 50' 10''9$. Die Sternzeit fand ich hieraus $= 22^h 40^m 5$, folglich Argument der Tafel $= 20^h 59^m 2$; die Ephemeride der Egeria für dieses Jahr gab $\log d = 0{,}218$. Hiemit steht die Rechnung wie folgt:

Par. in α		Par. in δ				
$T =$	$-3''86$	. . . . $T_1 =$	$-3''84$			
$\log T =$	$0.587n$	$\log T_1 =$	$0.584n$		$\log T' =$	0.848
$\log d \cos\delta =$	0.213	$\log \sin\delta =$	9.486		$\log \cos\delta =$	9.995
	$0.374n$	$\log d =$	0.218	. . . .		0.218
			$9.552n$			0.625
				$-0''36$		
				$+4.22$		
Par. in $\alpha =$	$-2''37$	Par. in $\delta =$		$+3''86$		

Reducirte Beobachtung.

$$\alpha = 25^0\,19'\,49''43\,,\quad \delta = +8^0\,50'\,14''76.$$

Es versteht sich von selbst, dass man aus dieser Tafel auch die Parallaxe der Abweichung im Meridian berechnen kann.

Tafel für die Parallaxen in α, und in δ. Arg. Sternzeit $-\alpha$.

Log. T' =				Wien		Washingt.		Berlin		Altona		Santiago		Gotha		= Log. T'			
Arg. für δ +		Arg. für α +		0,8208		0,7458		0,8479		0,8539		0,6892*n*		0,8385		Arg. für α −		Arg. für δ −	
				T u. T_1		T u. T_1		T u. T_1		T u. T_1		T u. T_1		T u. T_1					
6h 0m	18h 0m	12h 0m	0h 0m	0″,00	26	0″,00	31	0″,00	24	0″,00	23	0″,00	33	0″,00	25	12h 0m	24h 0m	6h 0m	18h 0m
10	17 50	11 50	10	0,26	26	0,31	30	0,24	24	0,23	23	0,33	32	0,25	24	10	23 50	5 50	10
20	40	40	20	0,52	26	0,61	30	0,48	24	0,46	23	0,65	32	0,49	25	20	40	40	20
30	30	30	30	0,78	25	0,91	30	0,72	23	0,69	23	0,97	32	0,74	24	30	30	30	30
40	20	20	40	1,03	26	1,21	30	0,95	23	0,92	23	1,29	32	0,98	24	40	20	20	40
6 50	10	10	0 50	1,29	25	1,51	29	1,18	23	1,15	23	1,61	32	1,22	24	12 50	10	10	18 50
7 0	17 0	11 0	1 0	1,54	25	1,80	29	1,41	23	1,38	22	1,93	31	1,46	24	13 0	23 0	5 0	19 0
10	16 50	10 50	10	1,79	25	2,09	29	1,64	22	1,60	22	2,24	31	1,70	23	10	22 50	4 50	10
20	40	40	20	2,04	24	2,38	28	1,86	22	1,82	22	2,55	30	1,93	23	20	40	40	20
30	30	30	30	2,28	24	2,66	28	2,08	22	2,04	21	2,85	30	2,16	22	30	30	30	30
40	20	20	40	2,52	23	2,94	27	2,30	21	2,25	21	3,15	29	2,38	22	40	20	20	40
7 50	10	10	1 50	2,75	23	3,21	27	2,51	21	2,46	20	3,44	29	2,60	22	13 50	10	10	19 50
8 0	16 0	10 0	2 0	2,98	22	3,48	26	2,72	20	2,66	20	3,73	28	2,82	21	14 0	22 0	4 0	20 0
10	15 50	9 50	10	3,20	22	3,74	25	2,92	20	2,86	19	4,01	27	3,03	20	10	21 50	3 50	10
20	40	40	20	3,42	21	3,99	24	3,12	19	3,05	19	4,28	26	3,23	20	20	40	40	20
30	30	30	30	3,63	20	4,23	24	3,31	19	3,24	18	4,54	25	3,43	19	30	30	30	30
40	20	20	40	3,83	19	4,47	23	3,50	18	3,42	17	4,79	24	3,62	18	40	20	20	40
8 50	10	10	2 50	4,02	19	4,70	22	3,68	17	3,59	17	5,03	24	3,80	18	14 50	10	10	20 50
9 0	15 0	7 0	3 0	4,21	18	4,92	21	3,85	16	3,76	16	5,27	22	3,98	17	15 0	21 0	3 0	21 0
10	14 50	8 50	10	4,39	17	5,13	20	4,01	16	3,92	15	5,49	22	4,15	16	10	20 50	2 50	10
20	40	40	20	4,56	16	5,33	19	4,17	15	4,07	14	5,71	20	4,31	15	20	40	40	20
30	30	30	30	4,72	16	5,52	18	4,32	14	4,21	14	5,91	19	4,46	15	30	30	30	30
40	20	20	40	4,88	15	5,70	16	4,46	13	4,35	13	6,10	18	4,61	14	40	20	20	40
9 50	10	10	3 50	5,03	13	5,86	16	4,59	12	4,48	12	6,28	17	4,75	12	15 50	10	10	21 50
10 0	14 0	8 0	4 0	5,16	13	6,02	14	4,71	11	4,60	11	6,45	16	4,87	12	16 0	20 0	2 0	22 0
10	13 50	7 50	10	5,29	11	6,16	14	4,82	11	4,71	10	6,61	14	4,99	11	10	19 50	1 50	10
20	40	40	20	5,40	11	6,30	12	4,93	9	4,81	9	6,75	13	5,10	10	20	40	40	20
30	30	30	30	5,51	9	6,42	11	5,02	9	4,90	9	6,88	12	5,20	9	30	30	30	30
40	20	20	40	5,60	8	6,53	10	5,11	8	4,99	7	7,00	11	5,29	8	40	20	20	40
10 50	10	10	4 50	5,68	8	6,63	8	4,19	7	5,06	7	7,11	9	5,37	7	16 50	10	10	22 50
11 0	13 0	7 0	5 0	5,76	6	6,71	7	5,26	6	5,13	5	7,20	8	5,44	6	17 0	19 0	1 0	23 0
10	12 50	6 50	10	5,82	5	6,78	6	5,32	4	5,18	5	7,28	6	5,50	5	10	18 50	0 50	10
20	40	40	20	5,87	4	6,84	5	5,36	4	5,23	3	7,34	5	5,55	4	20	40	40	20
30	30	30	30	5,91	3	6,89	3	5,40	2	5,26	3	7,39	3	5,59	2	30	30	30	30
40	20	20	40	5,94	2	6,92	2	5,42	2	5,29	1	7,42	2	5,61	2	40	20	20	40
11 50	10	10	5 50	5,96	0	6,94	1	5,44	0	5,30	1	7,44	1	5,63	0	17 50	10	10	23 50
12 0	12 0	6 0	6 0	5,96		6,95		5,44		5,31		7,45		5,63		18 0	18 0	0 0	24 0

$$\text{Par. in } \alpha = \frac{T}{d \cos \delta}, \qquad \text{Par. in } \delta = \frac{T_1 \sin \delta}{d} + \frac{T' \cos \delta}{d}$$

Wenn das Argument sich auf der linken Seite der Tafel befindet, so sind T und T_1 positiv. Wenn das Argument sich auf der rechten Seite der Tafel befindet, so sind T und T_1 negativ. Dieses soll durch die oben stehenden + und — Zeichen angedeutet werden.

Tafel für die Parallaxen in α, und in δ. Arg. Sternzeit — α.

Log. T =														= Log. T				
Arg. für δ				Arg. für α				[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	T u. T_1	Arg. für α			Arg. für	
—				—										—			—	
6h	0m	18h	0m	12h	0m	0h	0m							12h 0m	24h	0m	6h 0m	18
	10	17	50	11	50		10							10	23	50	5 50	
	20		40		40		20							20		40	40	
	30		30		30		30							30		30	30	
	40		20		20		40							40		20	20	
6	50		10		10	0	50							12 50		10	10	18
7	0	17	0	11	0	1	0							13 0	23	0	5 0	19
	10	16	50	10	50		10							10	22	50	4 50	
	20		40		40		20							20		40	40	
	30		30		30		30							30		30	30	
	40		20		20		40							40		20	20	
7	50		10		10	1	50							13 50		10	10	19
8	0	16	0	10	0	2	0							14 0	22	0	4 0	20
	10	15	50	9	50		10							10	21	50	3 50	
	20		40		40		20							20		40	40	
	30		30		30		30							30		30	30	
	40		20		20		40							40		20	20	
8	50		10		10	2	50							14 50		10	10	20
9	0	15	0	9	0	3	0							15 0	21	0	3 0	21
	10	14	50	8	50		10							10	20	50	2 50	1
	20		40		40		20							20		40	40	2
	30		30		30		30							30		30	30	3
	40		20		20		40							40		20	20	4
9	50		10		10	3	50							15 50		10	10	21 5
10	0	14	0	8	0	4	0							16 0	20	0	2 0	22
	10	13	50	7	50		10							10	19	50	1 50	1
	20		40		40		20							20		40	40	2
	30		30		30		30							30		30	30	3
	40		20		20		40							40		20	20	4
10	50		10		10	4	50							16 50		10	10	22 5
11	0	13	0	7	0	5	0							17 0	19	0	1 0	23
	10	12	50	6	50		10							10	18	50	0 50	1
	20		40		40		20							20		40	40	2
	30		30		30		30							30		30	30	3
	40		20		20		40							40		20	20	4
11	50		10		10	5	50							17 50		10	10	23 5
12	0	12	0	6	0	6	0							18 0	18	0	0 0	24

TAFELN DER EGERIA (13)

Hülfstafel um die Kalendertage in Jahrestage, und Stunden, Minuten und Secunden in Theile des Tages zu verwandeln.

	Gem. Jahr	Schalt-Jahr
Jan. 0	0	—1
Febr. 0	31	30
März 0	59	59
April 0	90	90
Mai 0	120	120
Juni 0	151	151
Juli 0	181	181
Aug. 0	212	212
Sept. 0	243	243
Oct. 0	273	273
Nov. 0	304	304
Dec. 0	334	334

Stunden	Theile des Tages
1	0,04167
2	0,08333
3	0,12500
4	0,16667
5	0,20833
6	0,25000
7	0,29167
8	0,33333
9	0,37500
10	0,41667
11	0,45833
12	0,50000
13	0,54167
14	0,58333
15	0,62500
16	0,66667
17	0,70833
18	0,75000
19	0,79167
20	0,83333
21	0,87500
22	0,91667
23	0,95833
24	1,00000

Minut.	Theile des Tages	Minut.	Theile des Tages	Sec.	Theile des Tages	Sec.	Theile des Tages
1	0,00069	31	0,02153	1	0,00001	31	0,00036
2	0,00139	32	0,02222	2	0,00002	32	0,00037
3	0,00208	33	0,02292	3	0,00003	33	0,00038
4	0,00278	34	0,02361	4	0,00005	34	0,00039
5	0,00347	35	0,02431	5	0,00006	35	0,00041
6	0,00417	36	0,02500	6	0,00007	36	0,00042
7	0,00486	37	0,02569	7	0,00008	37	0,00043
8	0,00556	38	0,02639	8	0,00009	38	0,00044
9	0,00625	39	0,02708	9	0,00010	39	0,00045
10	0,00694	40	0,02778	10	0,00012	40	0,00046
11	0,00764	41	0,02847	11	0,00013	41	0,00047
12	0,00833	42	0,02917	12	0,00014	42	0,00049
13	0,00903	43	0,02986	13	0,00015	43	0,00050
14	0,00972	44	0,03056	14	0,00016	44	0,00051
15	0,01042	45	0,03125	15	0,00017	45	0,00052
16	0,01111	46	0,03194	16	0,00019	46	0,00053
17	0,01181	47	0,03264	17	0,00020	47	0,00054
18	0,01250	48	0,03333	18	0,00021	48	0,00056
19	0,01319	49	0,03403	19	0,00022	49	0,00057
20	0,01389	50	0,03472	20	0,00023	50	0,00058
21	0,01458	51	0,03542	21	0,00024	51	0,00059
22	0,01528	52	0,03611	22	0,00025	52	0,00060
23	0,01597	53	0,03681	23	0,00027	53	0,00061
24	0,01667	54	0,03750	24	0,00028	54	0,00062
25	0,01736	55	0,03819	25	0,00029	55	0,00064
26	0,01806	56	0,03889	26	0,00030	56	0,00065
27	0,01875	57	0,03958	27	0,00031	57	0,00066
28	0,01944	58	0,04028	28	0,00032	58	0,00067
29	0,02014	59	0,04097	29	0,00034	59	0,00068
30	0,02083	60	0,04167	30	0,00035	60	0,00069

Tafel 1. Epochen der Störungsargumente.

Jahr	Arg. 1	A	B	C	D	2	3	4	5	6
1850	234,196	336° 35,1	274° 7,9	39° 56′	148° 19′	254	54	319	69,394	260,211
51	330,847	59 34,3	300 27,8	62 16	178 39	337	73	2	132,349	264,651
52 *B*	27,763	142 47,6	326 52,0	84 40	209 4	20	92	85	195,475	269,103
53	124,415	225 47,0	353 11,9	107 0	239 23	104	111	168	258,429	273,543
54	221,066	308 46,4	19 31,8	129 20	269 43	187	131	251	321,383	277,983
55	317,717	31 45,9	45 51,7	151 41	300 3	270	150	334	384,337	282,423
56 *B*	14,633	114 58,9	72 15,9	174 5	330 27	354	169	18	47,464	286,875
57	111,285	197 58,3	98 35,8	196 25	0 47	37	188	101	110,419	291,315
58	207,936	280 57,8	124 55,7	218 45	31 6	121	208	184	173,374	295,755
59	304,587	3 57,2	151 15,6	241 5	61 26	204	227	267	236,327	300,194
1860 *B*	1,503	87 10,3	177 39,8	263 29	91 51	288	246	350	249,454	304,645
61	98,155	170 9,7	203 59,7	285 49	122 10	371	265	33	362,409	309,085
62	194,806	253 9,2	230 19,6	308 9	152 30	54	284	116	25,364	313,524
63	291,457	336 8,6	256 39,5	330 29	182 50	138	304	199	88,317	317,964
64 *B*	388,373	59 21,7	283 3,7	352 56	213 14	221	323	283	151,444	322,416
65	85,025	142 21,1	309 23,7	15 13	243 34	304	342	366	214,399	326,855
66	181,676	225 20,6	335 43,6	37 34	273 53	388	361	49	277,393	331,294
67	278,367	308 20,0	2 3,5	59 54	304 13	71	381	132	340,308	335,733
68 *B*	375,243	31 33,1	28 27,7	82 18	334 38	155	0	215	3,435	340,185
69	71,894	114 32,6	54 47,6	104 38	4 57	238	19	298	66,390	344,624
1870	168,546	197 32,0	81 7,5	126 58	35 17	321	38	381	129,344	349,063
71	265,197	280 31,5	107 27,5	149 18	65 37	5	58	64	192,299	353,502
72 *B*	362,113	3 44,6	133 51,7	171 42	96 1	88	77	148	255,426	357,953
73	58,764	86 44,0	160 11,6	194 2	126 21	171	96	231	318,380	362,393
74	155,416	169 43,5	186 31,5	216 22	156 40	255	115	314	381,334	366,832
75	252,067	252 43,0	212 51,5	238 43	187 0	338	134	397	44,289	371,270
76 *B*	348,983	335 56,1	239 15,7	261 7	217 25	22	154	80	107,416	375,721
77	45,634	58 55,6	265 35,6	283 27	247 44	105	173	163	170,371	380,160
78	142,286	141 55,1	291 55,6	305 47	278 4	188	192	247	233,326	384,598
79	238,937	224 54,5	318 15,5	328 7	308 23	272	211	330	296,281	389,037
1880 *B*	335,853	308 7,7	344 39,8	350 31	338 48	355	231	13	359,408	393,488
81	32,504	31 7,2	10 59,7	12 52	9 8	39	250	96	22,362	397,927
82	129,156	114 6,6	37 19,6	35 12	39 27	122	269	179	85,317	2,365
83	225,807	197 6,1	63 39,6	57 32	69 47	205	288	262	148,271	6,804
84 *B*	322,723	280 19,3	90 3,8	79 56	100 12	289	308	345	211,398	11,254
85	19,374	3 18,8	116 23,8	102 16	130 31	372	327	29	274,353	15,693
86	116,026	86 18,3	142 43,7	124 37	160 51	55	346	112	337,308	20,132
87	212,677	169 17,8	169 3,7	146 57	191 10	139	365	195	0,263	24,570
88 *B*	209,593	252 30,9	195 27,9	169 21	221 35	222	385	278	63,390	29,021
89	6,244	335 30,4	221 47,9	191 41	251 55	306	4	361	126,345	33,459
1890	102,896	58 29,9	248 7,8	214 1	282 14	389	23	44	189,300	37,897
91	199,547	141 29,4	274 27,8	236 22	312 34	72	42	127	252,254	42,335
92 *B*	296,463	224 42,6	300 52,0	258 46	342 58	156	62	211	315,382	46,785
93	393,114	307 42,1	327 12,0	281 6	13 18	239	81	294	378,337	51,223
94	89,765	30 41,6	353 31,9	303 26	43 38	323	100	377	41,291	55,661
95	186,417	113 41,1	19 51,9	325 46	73 57	6	119	60	104,247	60,099
96 *B*	283,333	196 54,3	46 16,2	348 10	104 22	89	138	143	167,374	64,550
97	379,984	279 53,8	72 36,1	10 31	134 41	173	158	226	230,329	68,988
98	76,635	2 53,3	98 56,1	32 51	165 1	256	177	309	293,284	73,426
99	173,287	85 52,8	125 16,0	55 11	195 21	339	196	392	356,239	77,864
1900	269,938	168 52,3	151 36,0	77 32	225 40	23	215	75	19,193	82,302

Tafel 1. Epochen der Störungsargumente. Schluss.

Anm. Die mit römischen Zahlen bezeichneten, während Eines Umlaufs der Egeria, constanten Argumente rei vorhergehende Jahr hinein, und wechseln, wenn das Arg. 1 von 399,999 in 0 übergeht.

Jahr	7	8	t	t_1^2	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
1850	27,7	59,38	0	0	36,13	28,17	14,08	31,69	19,61	12,13	6,06	17,29	
51	27,7	64,75	0,999	0,0001									
52 *B*	27,8	70,13	2,001	0,0004	31,72	14,68	7,34	16,51	3,75	19,72	27,86	3,91	
53	27,7	75,50	3,001	0,0009									
54	27,7	80,87	4,000	0,0016									
55	27,7	86,24	4,999	0,0025									
56 *B*	27,8	91,62	6,001	0,0036	27,31	1,20	0,60	1,33	23,90	27,31	13,66	8,53	1
57	27,7	96,99	7,001	0,0049									
58	27,7	2,36	8,000	0,0064									
59	27,7	7,73	8,999	0,0081									
1860 *B*	27,8	13,11	10,001	0,0100	22,90	35,72	41,86	22,15	8,04	34,90	35,45	13,16	
61	27,7	18,48	11,001	0,0121									
62	27,7	23,84	12,000	0,0144									
63	27,7	29,21	12,999	0,0169									
64 *B*	27,8	34,60	14,001	0,0196									
65	27,8	39,96	15,001	0,0225	18,49	22,24	35,12	6,97	28,18	6,49	21,25	17,78	
66	27,7	45,33	16,000	0,0256									
67	27,7	50,70	16,999	0,0289									
68 *B*	27,8	56,08	18,001	0,0324									
69	27,8	61,45	19,001	0,0361	14,08	8,76	28,38	27,79	12,32	14,08	7,04	4,40	1
1870	27,7	66,82	20,000	0,0400									
71	27,7	72,19	20,999	0,0441									
72 *B*	27,8	77,57	22,001	0,0484									
73	27,8	82,94	23,001	0,0529	9,67	43,27	21,64	12,61	32,46	21,67	28,84	9,02	
74	27,7	88,31	24,000	0,0576									
75	27,7	93,68	24,999	0,0625									
76 *B*	27,8	99,06	26,001	0,0676									
77	27,8	4,43	27,001	0,0729	5,27	29,79	14,90	33,43	16,61	29,27	14,64	13,64	
78	27,7	9,80	28,000	0,0784									
79	27,7	15,17	28,999	0,0841									
1880 *B*	27,8	20,55	30,001	0,0900									
81	27,8	25,92	31,001	0,0961	0,86	16,31	8,16	18,25	0,75	0,86	0,43	0,27	1
82	27,7	31,29	32,000	0,1024									
83	27,7	36,65	32,999	0,1089									
84 *B*	27,8	42,04	34,001	0,1156									
85	27,8	47,41	35,001	0,1225	44,45	2,83	1,41	3,07	20,89	8,45	22,23	4,89	
86	27,7	52,77	36,000	0,1296									
87	27,7	58,14	36,999	0,1369									
88 *B*	27,8	63,53	38,001	0,1444									
89	27,8	68,89	39,001	0,1521	40,04	37,35	42,67	23,89	5,03	16,04	8,02	9,51	
1890	27,8	74,26	40,000	0,1600									
91	27,7	79,63	40,999	0,1681									
92 *B*	27,8	85,01	42,001	0,1764									
93	27,8	90,38	43,001	0,1849									
94	27,8	95,75	44,000	0,1936	35,63	23,86	35,93	8,71	25,17	23,63	29,82	14,13	
95	27,7	1,12	44,999	0,2025									
96 *B*	27,8	6,50	46,001	0,2116									
97	27,8	11,87	47,001	0,2209									
98	27,8	17,24	48,000	0,2304	31,22	10,38	29,19	29,53	9,32	31,22	15,62	0,75	
99	27,7	22,61	48,999	0,2401									
1900	27,7	27,98	49,999	0,2500									

Tafel 2. Bewegungen der Störungsargumente.

Tage	1	A	B	C	D	2	3	4	5	6	7	8	t
100	26,480	22° 44',24	7° 12',86	6° 7',2	8° 18',5	23	5	23	17,248	1,216	27,4	1,47	0,274
200	52,960	45 28,48	14 25,71	12 14,4	16 37,1	46	11	46	34,496	2,432	4,8	2,94	0,548
300	79,439	68 12,71	21 38,57	18 21,6	24 55,6	68	16	68	51,743	3,648	32,2	4,41	0,821
10	2,648	2 16,42	43,29	36,7	49,9	2	1	2	1,725	0,122	2,7	0,15	0,027
20	5,296	4 32,85	1 26,57	1 13,4	1 39,7	5	1	5	3,450	0,243	5,4	0,29	0,055
30	7,944	6 49,27	2 9,86	1 50,2	2 29,6	7	2	7	5,174	0,365	8,2	0,44	0,082
40	10,592	9 5,70	2 53,14	2 26,9	3 19,4	9	2	9	6,899	0,486	11,0	0,59	0,110
50	13,240	11 22,12	3 36,43	3 3,6	4 9,3	11	3	11	8,624	0.608	13,7	0,74	0,137
60	15,888	13 38,54	4 19,72	3 40,3	4 59,1	14	3	14	10,349	0,730	16,4	0,88	0,164
70	18,536	15 54,97	5 3,00	4 17,0	5 49,0	16	4	16	12,074	0,851	19,2	1,03	0,192
80	21,184	18 11,39	5 46,29	4 53,8	6 38,8	18	4	18	13,798	0,973	21,9	1,18	0,219
90	23,832	20 27,82	6 29,57	5 30,5	7 28,7	21	5	21	15,523	1,094	24,7	1,32	0,246
0,5	0,132	6,82	2,16	1,8	2,5	0	0	0	0,086	0,006	0,1	0,01	0,001
1,0	0,265	13,64	4,33	3,7	5,0	0	0	0	0,172	0,012	0,3	0,01	0,003
1,5	0,397	20,46	6,49	5,5	7,5	0	0	0	0,259	0,018	0,4	0,02	0,004
2,0	0,530	27,29	8,66	7,4	10,0	0	0	0	0,345	0,024	0,5	0,03	0,005
2,5	0,662	34,11	10,82	9,2	12,5	1	0	1	0,431	0,030	0,6	0,04	0,007
3,0	0,795	40,93	12,99	11,1	15,0	1	0	1	0,517	0,036	0,8	0,04	0,008
3,5	0,927	47,75	15,15	12,9	17,4	1	0	1	0,604	0,043	0,9	0,05	0,010
4,0	1,060	54,57	17,32	14,7	19,9	1	0	1	0,690	0,049	1,1	0,06	0,011
4,5	1,192	1 1,39	19,48	16,5	22,4	1	0	1	0,776	0,055	1,3	0,07	0,012
5,0	1,324	1 8,21	21,65	18,4	24,9	1	0	1	0,852	0,061	1,4	0,07	0,014
5,5	1,456	1 15,03	23,81	20,2	27,4	1	0	1	0,949	0,067	1,5	0,08	0,015
6,0	1,589	1 21,85	25,98	22,1	29,9	1	0	1	1,035	0,073	1,6	0,09	0,016
6,5	1,721	1 28,67	28,14	23,9	32,4	1	0	1	1,121	0,079	1,7	0,10	0,018
7,0	1,854	1 35,50	30,31	25,7	34,9	2	0	2	1,207	0,085	1,9	0,10	0,019
7,5	1,986	1 42,32	32,47	27,5	37,4	2	0	2	1,294	0,091	2,0	0,11	0,021
8,0	2,119	1 49,14	34,64	29,4	39,9	2	0	2	1,380	0,097	2,2	0,12	0,022
8,5	2,251	1 55,96	36,80	31,2	42,4	2	0	2	1,466	0,103	2,3	0,13	0,023
9,0	2,384	2 2,78	38,97	33,1	44,9	2	1	2	1,552	0,109	2,5	0,13	0,025
9,5	2,516	2 9,60	41,13	34,9	47,4	2	1	2	1,639	0,116	2,6	0,14	0,026

Tafel 3. Verbesserungen der Störungsargumente. Arg. 1.

	0 +				50 +				
Arg.	Vb. *A*	D.	Vb. *B*	D.	Vb. *A*	D.	Vb. *B*	D.	Arg.
0	0	5,0	0	1,6	3° 34′,8	3,1	1° 8′,1	1,0	50
1	0° 5′,0	4,9	0° 1′,6	1,5	3 37,9	3,1	1 9,1	1,0	49
2	0 9,9	4,9	0 3,1	1,6	3 41,0	3,0	1 10,1	1,0	48
3	0 14,8	4,9	0 4,7	1,5	3 44,0	2,9	1 11,1	0,9	47
4	0 19,7	4,9	0 6,2	1,6	3 46,9	2,8	1 12,0	0,9	46
5	0 24,6	4,9	0 7,8	1,5	3 49,7	2,8	1 12,9	0,9	45
6	0 29,5	4,9	0 9,3	1,6	3 52,5	2,7	1 13,8	0,9	44
7	0 34,4	4,8	0 10,9	1,5	3 55,2	2,6	1 14,7	0,8	43
8	0 39,2	4,9	0 12,4	1,6	3 57,8	2,6	1 15,5	0,8	42
9	0 44,1	4,8	0 14,0	1,5	4 0,4	2,5	1 16,3	0,8	41
10	0 48,9	4,8	0 15,5	1,5	4 2,9	2,4	1 17,1	0,8	40
11	0 53,7	4,8	0 17,0	1,5	4 5,3	2,4	1 17,9	0,7	39
12	0 58,5	4,8	0 18,5	1,6	4 7,7	2,3	1 18,6	0,7	38
13	1 3,3	4,8	0 20,1	1,5	4 10,0	2,2	1 19,3	0,7	37
14	1 8,1	4,8	0 21,6	1,5	4 12,2	2,1	1 20,0	0,7	36
15	1 12,9	4,7	0 23,1	1,5	4 14,3	2,1	1 20,7	0,7	35
16	1 17,6	4,7	0 24,6	1,5	4 16,4	2,0	1 21,4	0,6	34
17	1 22,3	4,7	0 26,1	1,5	4 18,4	2,0	1 22,0	0,6	33
18	1 27,0	4,7	0 27,6	1,5	4 20,4	1,9	1 22,6	0,6	32
19	1 31,7	4,6	0 29,1	1,4	4 22,3	1,8	1 23,2	0,6	31
20	1 36,3	4,6	0 30,5	1,5	4 24,1	1,7	1 23,8	0,6	30
21	1 40,9	4,5	0 32,0	1,4	4 25,8	1,7	1 24,4	0,5	29
22	1 45,4	4,5	0 33,4	1,5	4 27,5	1,6	1 24,9	0,5	28
23	1 49,9	4,5	0 34,9	1,4	4 29,1	1,5	1 25,4	0,5	27
24	1 54,4	4,4	0 36,3	1,4	4 30,6	1,4	1 25,9	0,5	26
25	1 58,8	4,4	0 37,7	1,4	4 32,0	1,4	1 26,4	0,4	25
26	2 3,2	4,4	0 39,1	1,4	4 33,4	1,3	1 26,8	0,4	24
27	2 7,6	4,3	0 40,5	1,4	4 34,7	1,2	1 27,2	0,4	23
28	2 11,9	4,3	0 41,9	1,4	4 35,9	1,2	1 27,6	0,4	22
29	2 16,2	4,2	0 43,3	1,3	4 37,1	1,1	1 28,0	0,3	21
30	2 20,4	4,2	0 44,6	1,3	4 38,2	1,0	1 28,3	0,3	20
31	2 24,6	4,2	0 45,9	1,3	4 39,2	0,9	1 28,6	0,3	19
32	2 28,8	4,1	0 47,2	1,3	4 40,1	0,9	1 28,9	0,3	18
33	2 32,9	4,1	0 48,5	1,3	4 41,0	0,8	1 29,2	0,2	17
34	2 37,0	4,0	0 49,8	1,3	4 41,8	0,7	1 29,4	0,2	16
35	2 41,0	4,0	0 51,1	1,2	4 42,5	0,6	1 29,6	0,2	15
36	2 45,0	3,9	0 52,3	1,3	4 43,1	0,6	1 29,8	0,2	14
37	2 48,9	3,9	0 53,6	1,2	4 43,7	0,5	1 30,0	0,2	13
38	2 52,8	3,8	0 54,8	1,2	4 44,2	0,4	1 30,2	0,1	12
39	2 56,6	3,8	0 56,0	1,2	4 44,6	0,4	1 30,3	0,1	11
40	3 0,4	3,7	0 57,2	1,2	4 45,0	0,3	1 30,4	0,1	10
41	3 4,1	3,6	0 58,4	1,1	4 45,3	0,2	1 30,5	0,1	9
42	3 7,7	3,6	0 59,5	1,2	4 45,5	0,1	1 30,6	0,0	8
43	3 11,3	3,6	1 0,7	1,1	4 45,6	0,1	1 30,6	0,0	7
44	3 14,9	3,5	1 1,8	1,1	4 45,7	0,0	1 30,6	0,0	6
45	3 18,4	3,4	1 2,9	1,1	4 45,7	0,1	1 30,6	0,0	5
46	3 21,8	3,4	1 4,0	1,1	4 45,6	0,2	1 30,6	0,0	4
47	3 25,2	3,2	1 5,1	1,0	4 45,4	0,2	1 30,6	0,1	3
48	3 28,4	3,2	1 6,1	1,0	4 45,2	0,3	1 30,5	0,1	2
49	3 31,6	3,2	1 7,1	1,0	4 44,9	0,3	1 30,4	0,1	1
50	3 34,8		1 8,1		4 44,6		1 30,3		0
Arg.	350 —				300 —				Arg.

Tafel 3. Fortsetz.

Arg.	Vb. *C*	D.	Arg.
0	0	5	400
4	+0° 5′ —	6	396
8	0 11	5	392
12	0 16	5	388
16	0 21	5	384
20	0 26	5	380
24	0 31	5	376
28	0 36	4	372
32	0 40	4	368
36	0 44	4	364
40	0 48	4	360
44	0 52	4	356
48	0 56	3	352
52	0 59	3	348
56	1 2	3	344
60	1 5	3	340
64	1 8	2	336
68	1 10	2	332
72	1 12	2	328
76	1 14	1	324
80	1 15	1	320
84	1 16	0	316
88	1 16	1	312
92	1 17	0	308
96	1 17	0	304
100	1 17	1	300
104	1 16	1	296
108	1 15	1	292
112	1 14	1	288
116	1 13	2	284
120	1 11	2	280
124	1 9	2	276
128	1 7	2	272
132	1 5	3	268
136	1 2	3	264
140	0 59	3	260
144	0 56	3	256
148	0 53	4	252
152	0 49	3	248
156	0 46	4	244
160	0 42	4	240
164	0 38	4	236
168	0 34	4	232
172	0 30	4	228
176	0 26	4	224
180	0 22	4	220
184	0 18	5	216
188	0 13	4	212
192	0 9	4	208
196	+0 5 —	5	204
200	0		200

Verbesserungen der Störungsargumente. Forts. Arg. 1

100 +				150 +				
Vb. *A*	D.	Vb. *B*	D.	Vb. *A*	D.	Vb *B*	D.	Arg.
4° 44,6	4	1° 30,3	1	5° 10,0	32	1° 0,3	10	50
4 44,2	5	1 30,2	2	3 6,8	32	0 59,3	10	49
4 43,7	6	1 30,0	2	3 3,6	32	0 58,3	10	48
4 43,1	6	1 29,8	2	3 0,4	33	0 57,3	10	47
4 42,5		1 29,6		2 57,1		0 56,3		46
	7		2		33		11	
4 41,8	8	1 29,4	3	2 53,8	34	0 55,2	11	45
4 41,0	8	1 29,1	2	2 50,4	34	0 54,1	11	44
4 40,2	9	1 28,9	3	2 47,0	34	0 53,0	11	43
4 39,3	10	1 28,6	3	2 43,6	34	0 51,9	11	42
4 38,3		1 28,3		2 40,2		0 50,8		41
	10		3		35		11	
4 37,3	11	1 28,0	3	2 36,7	35	0 49,7	11	40
4 36,2	11	1 27,7	4	2 33,2	35	0 48,6	11	39
4 35,1	12	1 27,3	4	2 29,7	36	0 47,5	11	38
4 33,9	13	1 26,9	4	2 26,1	36	0 46,4	12	37
4 32,6		1 26,5		2 22,5		0 45,2		36
	13		4		36		11	
4 31,3	14	1 26,1	4	2 18,9	37	0 44,1	12	35
4 29,9	15	1 25,7	5	2 15,2	37	0 42,9	12	34
4 28,4	15	1 25,2	5	2 11,5	37	0 41,7	12	33
4 26,9	16	1 24,7	5	2 7,8	37	0 40,5	11	32
4 25,3		1 24,2		2 4,1		0 39,4		31
	16		5		38		12	
4 23,7	17	1 23,7	5	2 0,3	38	0 38,2	12	30
4 22,0	17	1 23,2	6	1 56,5	38	0 37,0	12	29
4 20,3	18	1 22,6	6	1 52,7	38	0 35,8	12	28
4 18,5	19	1 22,0	6	1 48,9	39	0 34,6	12	27
4 16,6		1 21,4		1 45,0		0 33,4		26
	19		6		39		12	
4 14,7	20	1 20,8	6	1 41,1	39	0 32,2	13	25
4 12,7	21	1 20,2	6	1 37,2	39	0 30,9	12	24
4 10,6	21	1 19,6	7	1 33,3	39	0 29,7	13	23
4 8,5	21	1 18,9	7	1 29,4	39	0 28,4	12	22
4 6,4		1 18,2		1 25,5		0 27,2		21
	22		7		40		13	
4 4,2	23	1 17,5	7	1 21,5	40	0 25,9	12	20
4 1,9	23	1 16,8	8	1 17,5	40	0 24,7	13	19
3 59,6	23	1 16,0	7	1 13,5	40	0 23,4	13	18
3 57,3	24	1 15,3	8	1 9,5	40	0 22,1	13	17
3 54,9		1 14,5		1 5,5		0 20,8		16
	25		8		40		12	
3 52,4	25	1 13,7	8	1 1,5	41	0 19,6	13	15
3 49,9	25	1 12,9	8	0 57,4	40	0 18,3	13	14
3 47,4	26	1 12,1	8	0 53,4	41	0 17,0	13	13
3 44,8	27	1 11,3	8	0 49,3	40	0 15,7	13	12
3 42,1		1 10,5		0 45,3		0 14,4		11
	27		9		41		13	
3 39,4	28	1 9,6	9	0 41,2	41	0 13,1	13	10
3 36,6	28	1 8,7	9	0 37,1	41	0 11,8	13	9
3 33,8	28	1 7,8	9	0 33,0	41	0 10,5	13	8
3 31,0	29	1 6,9	9	0 28,9	41	0 9,2	13	7
3 28,1		1 6,0		0 24,8		0 7,9		6
	29		9		41		13	
3 25,2	30	1 5,1	9	0 20,7	42	0 6,6	13	5
3 22,2	30	1 4,2	9	0 16,5	41	0 5,3	13	4
3 19,2	30	1 3,3	10	0 12,4	41	0 4,0	13	3
3 16,2	31	1 2,3	10	0 8,3	41	0 2,7	13	2
3 13,1	31	1 1,3	10	0 4,2	42	0 1,4	14	1
3 10,0		1 0,3		0		0		0
250 —				200 —				Arg.

Tafel 3. Fortsetz.

Arg.	Vb. *D*	D.	Arg.
0	0	7	400
4	+0° 7′ —	7	396
8	0 14	7	392
12	0 21	7	388
16	0 28		384
		7	
20	0 35	7	380
24	0 42	6	376
28	0 48	6	372
32	0 54	6	368
36	1 0		364
		6	
40	1 6	5	360
44	1 11	5	356
48	1 16	5	352
52	1 21	4	348
56	1 25		344
		4	
60	1 29	3	340
64	1 32	3	336
68	1 35	3	332
72	1 38	2	328
76	1 40		324
		2	
80	1 42	1	320
84	1 43	1	316
88	1 44	0	312
92	1 44	0	308
96	1 44		304
		0	
100	1 44	1	300
104	1 43	1	296
108	1 42	1	292
112	1 41	2	288
116	1 39		284
		3	
120	1 36	2	280
124	1 34	3	276
128	1 31	3	272
132	1 28	4	268
136	1 24		264
		4	
140	1 20	4	260
144	1 16	4	256
148	1 12	5	252
152	1 7	5	248
156	1 2		244
		5	
160	0 57	5	240
164	0 52	5	236
168	0 47	6	232
172	0 41	5	228
176	0 36		224
		6	
180	0 30	6	220
184	0 24	6	216
188	0 18	6	212
192	0 12	6	208
196	+0 6 —	6	204
200	0		200

Tafel 3. Verbesserungen der Störungsargumente. Forts. Arg.

Verb. von Arg. 5									
Arg.	0 +	D.	50 +	D.	100 +	D.	150 +	D.	Arg.
0	0	62	2,716	39	3,598	5	2,402	40	50
1	0,062	62	2,755	39	3,593	6	2,362	41	49
2	0,124	62	2,794	37	3,587	7	2,321	41	48
3	0,186	62	2,831	37	3,580	8	2,280	42	47
4	0,248	62	2,868	36	3,572	9	2,238	42	46
5	0,310	62	2,904	35	3,563	9	2,196	42	45
6	0,372	62	2,939	34	3,554	11	2,154	43	44
7	0,434	61	2,973	34	3,543	11	2,111	43	43
8	0,495	62	3,007	32	3,532	12	2,068	43	42
9	0,557	61	3,039	32	3,520	13	2,025	44	41
10	0,618	61	3,071	31	3,507	14	1,981	44	40
11	0,679	61	3,102	30	3,493	14	1,937	45	39
12	0,740	61	3,132	29	3,479	15	1,892	45	38
13	0,801	60	3,161	28	3,464	16	1,847	46	37
14	0,861	60	3,189	27	3,448	17	1,801	46	36
15	0,921	60	3,216	27	3,431	18	1,755	46	35
16	0,981	60	3,243	25	3,413	19	1,709	47	34
17	1,041	59	3,268	25	3,394	19	1,662	47	33
18	1,100	59	3,293	23	3,375	20	1,615	47	32
19	1,159	58	3,316	23	3,355	21	1,568	48	31
20	1,217	58	3,339	22	3,334	22	1,520	48	30
21	1,275	57	3,361	21	3,312	22	1,472	48	29
22	1,332	57	3,382	20	3,290	23	1,424	49	28
23	1,389	57	3,402	19	3,267	23	1,375	49	27
24	1,446	56	3,421	18	3,244	25	1,326	48	26
25	1,502	56	3,439	18	3,219	25	1,278	49	25
26	1,558	55	3,457	16	3,194	26	1,229	49	24
27	1,613	55	3,473	16	3,168	26	1,180	50	23
28	1,668	54	3,489	14	3,142	27	1,130	50	22
29	1,722	54	3,503	14	3,115	28	1,080	50	21
30	1,776	53	3,517	12	3,087	29	1,030	50	20
31	1,829	53	3,529	12	3,058	29	0,980	51	19
32	1,882	52	3,541	11	3,029	30	0,929	50	18
33	1,934	51	3,552	10	2,999	30	0,879	51	17
34	1,985	51	3,562	9	2,969	31	0,828	51	16
35	2,036	50	3,571	8	2,938	32	0,777	51	15
36	2,086	49	3,579	7	2,906	32	0,726	51	14
37	2,135	49	3,586	7	2,874	33	0,675	52	13
38	2,184	48	3,593	5	2,841	34	0,623	51	12
39	2,232	48	3,598	5	2,807	34	0,572	52	11
40	2,280	47	3,603	3	2,773	35	0,520	51	10
41	2,327	46	3,606	3	2,738	35	0,469	52	9
42	2,373	45	3,609	2	2,703	36	0,417	52	8
43	2,418	45	3,611	1	2,667	36	0,365	52	7
44	2,463	44	3,612	0	2,631	37	0,313	52	6
45	2,507	43	3,612	1	2,594	37	0,261	52	5
46	2,550	43	3,611	2	2,557	38	0,209	52	4
47	2,593	42	3,609	3	2,519	39	0,157	52	3
48	2,635	41	3,606	4	2,480	39	0,105	52	2
49	2,676	40	3,602	4	2,441	39	0,053	53	1
50	2,716		3,598		2,402		0		0
Arg.	350 —		300 —		250 —		200 —		Arg.

Tafel 3. Schluss. Arg.

Arg.	Verb. 6	D.	2 u. 4	Arg.
0	0	18	0	400
4	+0,018—	17	+1—	396
8	0,035	17	1	392
12	0,052	17	1	388
16	0,069	17	1	384
20	0,086	16	2	380
24	0,102	16	2	376
28	0,118	15	2	372
32	0,133	14	2	368
36	0,147	14	3	364
40	0,161	13	3	360
44	0,174	12	4	356
48	0,186	11	4	352
52	0,197	10	4	348
56	0,207	9	4	344
60	0,216	9	4	340
64	0,225	8	4	336
68	0,233	6	5	332
72	0,239	5	5	328
76	0,244	4	5	324
80	0,248	3	5	320
84	0,251	2	5	316
88	0,253	2	5	312
92	0,255	0	5	308
96	0,255	1	5	304
100	0,254	2	5	300
104	0,252	3	5	296
108	0,249	4	5	292
112	0,245	5	5	288
116	0,240	5	5	284
120	0,235	6	5	280
124	0,229	7	5	276
128	0,222	8	4	272
132	0,214	9	4	268
136	0,205	9	4	264
140	0,196	10	4	260
144	0,186	11	3	256
148	0,175	11	3	252
152	0,164	12	3	248
156	0,152	12	3	244
160	0,140	13	3	240
164	0,127	13	2	236
168	0,114	13	2	232
172	0,101	14	2	228
176	0,087	14	2	224
180	0,073	15	2	220
184	0,058	14	1	216
188	0,044	15	1	212
192	0,029	14	1	208
196	+0,015	15	+1—	204
200	0		0	200

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 4. Arg. 4 Form der Ungleichheit: $p \sin (P + A)$

Arg.	P	D.	Jährl. Aend.	log p	D.	Jährl. Aend.
0	1° 28,0		+0,316	4,30106		+1,29
		5,8			27	
2	33,8		0,315	079		1,31
		6,0			22	
4	39,8		0,314	057		1,32
		6,0			17	
6	45,8		0,313	040		1,33
		6,1			11	
8	51,9		0,311	029		1,34
		6,1			5	
10	1 58,0		0,310	024		1,35
		6,2			0	
12	2 4,2		0,309	024		1,36
		6,1			6	
14	10,3		0,308	030		1,37
		6,1			12	
16	16,4		0,306	042		1,37
		6,0			18	
18	22,4		0,305	060		1,38
		5,8			23	
20	28,2		0,303	083		1,38
		5,7			28	
22	33,9		0,301	111		1,38
		5,6			34	
24	39,5		0,299	145		1,38
		4,4			39	
26	44,9		0,297	184		1,38
		5,1			43	
28	50,0		0,296	227		1,38
		4,9			47	
30	54,9		0,294	274		1,38
		4,7			52	
32	2 59,6		0,293	326		1,37
		4,4			56	
34	3 4,0		0,291	382		1,37
		4,1			60	
36	8,1		0,290	442		1,36
		3,8			63	
38	11,9		0,289	505		1,35
		3,4			67	
40	15,3		0,288	572		1,34
		3,1			69	
42	18,4		0,286	641		1,33
		2,7			72	
44	21,1		0,285	713		1,32
		2,3			74	
46	23,4		0,284	787		1,31
		2,0			75	
48	25,4		0,283	862		1,30
		1,6			77	
50	27,0		0,282	4,30939		1,29
		1,2			77	
52	28,2		0,281	4,31016		1,27
		0,9			78	
54	29,1		0,280	094		1,26
		0,5			78	
56	29,6		0,279	172		1,24
		0,1			78	
58	29,7		0,278	250		1,22
		0,3			78	
60	29,4		0,278	328		1,21
		0,6			77	
62	28,8		0,277	405		1,19
		1,0			77	
64	27,8		0,277	482		1,17
		1,4			75	
66	26,4		0,276	557		1,15
		1,7			74	
68	24,7		0,276	631		1,14
		2,0			72	
70	22,7		0,276	703		1,12
		2,4			69	
72	20,3		0,276	772		1,10
		2,7			66	
74	17,6		0,276	838		1,08
		3,0			64	
76	14,6		0,276	902		1,07
		3,3			61	
78	11,3		0,277	4,31963		1,05
		3,6			57	
80	7,7		0,277	4,32020		1,04
		3,8			55	
82	3 3,9		0,277	075		1,02
		4,1			51	
84	2 59,8		0,277	126		1,01
		4,2			48	
86	55,6		0,278	174		0,99
		4,5			44	
88	51,1		0,278	218		0,98
		4,7			40	
90	46,4		0,279	258		0,96
		4,8			35	
92	41,6		0,279	293		0,95
		5,0			31	
94	36,6		0,280	324		0,94
		5,1			27	
96	31,5		0,281	351		0,93
		5,2			23	
98	26,3		0,281	374		0,91
		5,4			18	
100	2 20,9		+0,282	4,32392		+0,90

Arg.	P	D.	Jährl. Aend.	log p	D.	Jährl. Aend.
100	2° 20,9		+0,283	4,32392		+0,90
		5,4			14	
102	15,5		0,283	406		0,89
		5,5			10	
104	10,0		0,284	416		0,88
		5,5			5	
106	2 4,5		0,285	421		0,87
		5,5			1	
108	1 59,0		0,286	422		0,86
		5,5			4	
110	53,5		0,287	418		0,85
		5,4			8	
112	48,1		0,288	410		0,85
		5,4			12	
114	42,7		0,290	398		0,84
		5,4			16	
116	37,3		0,291	382		0,84
		5,3			20	
118	32,0		0,292	362		0,83
		5,2			25	
120	26,8		0,293	337		0,83
		5,1			29	
122	21,7		0,295	308		0,82
		4,9			33	
124	16,8		0,296	275		0,82
		4,8			37	
126	12,0		0,298	238		0,82
		4,7			40	
128	7,3		0,299	198		0,82
		4,4			43	
130	1 2,9		0,301	155		0,82
		4,3			47	
132	0 58,6		0,302	108		0,82
		4,1			50	
134	54,5		0,303	058		0,82
		3,8			53	
136	50,7		0,304	4,32005		0,82
		3,6			56	
138	47,1		0,306	4,31949		0,82
		3,3			59	
140	43,8		0,307	890		0,83
		3,1			61	
142	40,7		0,308	829		0,83
		2,8			63	
144	37,9		0,309	766		0,84
		2,5			65	
146	35,4		0,311	701		0,85
		2,2			67	
148	33,2		0,312	634		0,86
		2,0			69	
150	31,2		0,313	565		0,87
		1,6			70	
152	29,6		0,314	495		0,88
		1,3			71	
154	28,3		0,315	424		0,89
		1,0			72	
156	27,3		0,316	352		0,90
		0,7			73	
158	26,6		0,317	279		0,91
		0,3			73	
160	26,3		0,318	206		0,93
		0,0			73	
162	26,3		0,319	133		0,94
		0,3			73	
164	26,6		0,320	4,31060		0,96
		0,7			72	
166	27,3		0,321	4,30988		0,98
		1,0			72	
168	28,3		0,321	916		0,99
		1,3			71	
170	29,6		0,322	845		1,01
		1,7			69	
172	31,3		0,322	776		1,03
		2,0			68	
174	33,3		0,322	708		1,05
		2,3			66	
176	35,6		0,322	642		1,06
		2,6			65	
178	38,2		0,322	577		1,08
		2,9			62	
180	41,1		0,322	515		1,10
		3,2			60	
182	44,3		0,322	455		1,12
		3,5			58	
184	47,8		0,322	397		1,14
		3,8			54	
186	51,6		0,321	343		1,16
		4,0			51	
188	55,6		0,321	292		1,18
		4,2			48	
190	0 59,8		0,321	244		1,20
		4,5			45	
192	1 4,3		0,320	199		1,22
		4,6			41	
194	8,9		0,319	158		1,24
		4,9			38	
196	13,8		0,318	120		1,26
		5,1			34	
198	18,9		0,317	086		1,28
		5,2			30	
200	1 24,1		+0,316	4,30056		+1,29

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 4. Schluss. Arg. 4 Form der Ungleichheit: $p \sin (P + A)$

Arg.	P	D.	Jährl. Aend.	log p	D.	Jährl. Aend.	Arg.	P	D.	Jährl. Aend.	log p	D.	Jährl. Aend.
200	1° 24,1	5,4	+0,316	4,30056	26	+1,29	300	2° 44,9	5,1	+0,282	4,32270	34	+0,90
202	29,5	5,5	0,315	030	21	1,31	302	39,8	5,3	0,283	304	29	0,89
204	35,0	5,6	0,314	4,30009	17	1,32	304	34,5	5,4	0,284	333	25	0,88
206	40,6	5,6	0,313	4,29992	13	1,33	306	29,1	5,5	0,285	358	20	0,87
208	46,2	5,7	0,311	979	8	1,34	308	23,6	5,6	0,286	378	16	0,86
210	51,9	5,7	0,310	971	3	1,35	310	18,0	5,7	0,287	394	12	0,85
212	1 57,6	5,8	0,308	968	1	1,36	312	12,3	5,7	0,289	406	7	0,84
214	2 3,4	5,7	0,307	969	5	1,37	314	6,6	5,7	0,290	413	3	0,83
216	9,1	5,7	0,305	974	10	1,38	316	2 0,9	5,7	0,291	416	2	0,83
218	14,8	5,7	0,304	984	14	1,39	318	1 55,2	5,7	0,292	414	6	0,82
220	20,5	5,6	0,302	4,29998	18	1,39	320	49,5	5,7	0,294	408	11	0,82
222	26,1	5,5	0,300	4,30016	23	1,39	322	43,8	5,6	0,295	397	16	0,81
224	31,6	5,4	0,298	039	27	1,39	324	38,2	5,5	0,297	381	21	0,81
226	37,0	5,2	0,297	066	32	1,39	326	32,7	5,4	0,298	360	25	0,81
228	42,2	5,1	0,295	098	36	1,38	328	27,3	5,3	0,300	335	30	0,81
230	47,3	4,9	0,293	134	39	1,38	330	22,0	5,1	0,302	305	34	0,81
232	52,2	4,8	0,292	173	43	1,37	332	16,9	5,0	0,303	271	39	0,81
234	2 57,0	4,5	0,290	216	47	1,37	334	11,9	4,8	0,304	232	43	0,81
236	3 1,5	4,3	0,289	263	50	1,36	336	7,1	4,6	0,305	189	47	0,82
238	5,8	4,0	0,287	313	54	1,35	338	1 2,5	4,3	0,307	142	51	0,82
240	9,8	3,7	0,286	367	56	1,34	340	0 58,2	4,0	0,308	091	54	0,83
242	13,5	3,5	0,285	423	59	1,33	342	54,2	3,8	0,309	4,32037	58	0,83
244	17,0	3,2	0,284	482	62	1,32	344	50,4	3,5	0,310	4,31979	61	0,84
246	20,2	2,9	0,283	544	64	1,31	346	46,9	3,2	0,312	918	65	0,85
248	23,1	2,6	0,282	608	66	1,30	348	43,7	2,9	0,313	853	67	0,86
250	25,7	2,3	0,281	674	68	1,29	350	40,8	2,5	0,314	786	70	0,87
252	28,0	2,0	0,280	742	70	1,27	352	38,3	2,2	0,315	716	72	0,88
254	30,0	1,6	0,279	812	71	1,26	354	36,1	1,9	0,316	644	75	0,89
256	31,6	1,3	0,279	883	72	1,24	356	34,2	1,5	0,317	569	76	0,90
258	32,9	0,9	0,278	4,30955	74	1,23	358	32,7	1,1	0,318	493	78	0,91
260	33,8	0,6	0,278	4,31029	74	1,21	360	31,6	0,7	0,319	415	79	0,93
262	34,4	0,3	0,277	103	75	1,20	362	30,9	0,3	0,320	336	79	0,94
264	34,7	0,1	0,277	178	74	1,18	364	30,6	0,1	0,320	257	80	0,96
266	34,6	0,5	0,276	252	74	1,17	366	30,7	0,5	0,321	177	80	0,97
268	34,1	0,8	0,276	326	73	1,15	368	31,2	0,9	0,321	097	79	0,99
270	33,3	1,1	0,276	399	72	1,13	370	32,1	1,3	0,322	4,31018	79	1,01
272	32,2	1,5	0,276	471	72	1,10	372	33,4	1,7	0,322	4,30939	78	1,03
274	30,7	1,8	0,276	543	70	1,10	374	35,1	2,0	0,322	861	76	1,05
276	28,9	2,1	0,276	613	60	1,08	376	37,1	2,5	0,322	785	75	1,07
278	26,8	2,5	0,276	682	67	1,06	378	39,6	2,8	0,322	710	73	1,09
280	24,3	2,8	0,276	749	65	1,04	380	42,4	3,2	0,322	637	71	1,11
282	21,5	3,0	0,276	814	62	1,02	382	45,6	3,6	0,322	566	67	1,13
284	18,5	3,3	0,277	876	60	1,01	384	49,2	3,9	0,322	499	64	1,15
286	15,2	3,6	0,277	936	57	0,99	386	53,1	4,2	0,322	435	59	1,17
288	11,6	3,9	0,278	4,31993	55	0,98	388	0 57,3	4,5	0,321	376	56	1,19
290	7,7	4,1	0,278	4,32048	51	0,96	390	1 1,8	4,8	0,321	320	52	1,21
292	3 3,6	4,4	0,279	099	48	0,95	392	6,6	5,0	0,320	268	48	1,22
294	2 59,2	4,6	0,279	147	45	0,94	394	11,6	5,3	0,319	220	43	1,24
296	54,6	4,8	0,280	192	41	0,93	396	16,9	5,5	0,318	177	38	1,26
298	49,8	4,9	0,281	233	37	0,91	398	22,4	5,6	0,317	139	33	1,28
300	2 44,9		+0,282	4,32270		+0,90	400	1 28,0		+0,316	4,30106		+1,29

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 5. Arg. 4 Form der Ungleichheit: $p \sin (P + B)$

P	D.	Jährl. Aend.	log p	D.	Jährl. Aend.	Arg.	P	D.	Jährl. Aend.	log p	D.	Jährl. Aend.
23° 50,3	3,5	+0,585	3,78888	22	−1,97	100	228° 33,5	3,6	+0,475	3,84201	93	+1,22
23 53,8	3,6	0,585	866	13	1,87	102	37,1	3,4	0,470	294	88	1,20
23 57,4	3,6	0,586	853	3	1,76	104	40,5	3,1	0,465	382	85	1,18
24 1,0	3,7	0,586	850	6	1,65	106	43,6	2,7	0,461	467	80	1,15
4,7	3,8	0,586	856	16	1,53	108	46,3	2,4	0,457	547	76	1,12
8,5	3,9	0,586	872	25	1,41	110	48,7	2,0	0,452	623	71	1,09
12,4	4,0	0,586	897	34	1,29	112	50,7	1,6	0,447	694	67	1,05
16,4	4,2	0,586	931	44	1,17	114	52,3	1,3	0,442	761	63	1,01
20,6	4,3	0,586	3,78975	54	1,05	116	53,6	0,9	0,437	824	59	0,97
24,9	4,4	0,586	3,79029	62	0,94	118	54,5	0,4	0,432	883	54	0,93
29,3	4,6	0,585	091	70	0,82	120	54,9	0,1	0,427	937	51	0,89
33,9	4,7	0,584	161	79	0,70	122	55,0	0,3	0,423	3,84988	47	0,85
38,6	4,9	0,583	240	87	0,59	124	54,7	0,7	0,418	3,85035	43	0,80
43,5	5,2	0,582	327	94	0,48	126	54,0	1,0	0,413	078	40	0,76
48,7	5,3	0,581	421	102	0,38	128	53,0	1,4	0,407	118	37	0,71
54,0	5,4	0,579	523	109	0,27	130	51,6	1,9	0,402	155	33	0,67
24 59,4	5,6	0,577	632	115	0,16	132	49,7	2,3	0,397	188	30	0,63
25 5,0	5,7	0,576	747	120	−0,06	134	47,4	2,6	0,392	218	27	0,59
10,7	6,0	0,574	867	125	+0,03	136	44,8	3,0	0,386	245	24	0,54
16,7	6,2	0,573	3,79992	130	0,13	138	41,8	3,4	0,381	269	22	0,50
22,9	6,2	0,571	3,80122	134	0,22	140	38,4	3,8	0,375	291	19	0,45
29,1	6,4	0,570	256	139	0,32	142	34,6	4,2	0,370	310	15	0,40
35,5	6,6	0,568	395	142	0,41	144	30,4	4,6	0,364	325	13	0,35
42,1	6,7	0,567	537	145	0,48	146	25,8	5,0	0,359	338	11	0,30
48,8	6,8	0,565	682	148	0,54	148	20,8	5,3	0,354	349	10	0,25
25 55,6	7,0	0,563	830	149	0,61	150	15,5	5,7	0,349	359	8	0,20
26 2,6	7,0	0,561	3,80979	151	0,68	152	9,8	6,0	0,344	367	6	0,15
9,6	7,1	0,559	3,81130	152	0,74	154	228 3,8	6,3	0,339	373	5	0,11
16,7	7,1	0,557	282	153	0,80	156	227 57,5	6,6	0,334	378	3	0,06
23,8	7,2	0,554	435	152	0,86	158	50,9	6,9	0,330	381	1	+0,01
31,0	7,2	0,551	587	153	0,92	160	44,0	7,3	0,325	382	1	−0,05
38,2	7,2	0,548	740	153	0,96	162	36,7	7,5	0,320	383	0	0,10
45,4	7,1	0,545	3,81893	151	0,99	164	29,2	7,8	0,315	383	2	0,15
52,5	7,1	0,542	3,82044	149	1,04	166	21,4	8,1	0,311	381	2	0,20
26 59,6	7,0	0,538	193	148	1,08	168	13,3	8,3	0,306	379	2	0,24
27 6,6	6,9	0,534	341	145	1,12	170	227 5,0	8,6	0,302	377	3	0,29
13,5	6,8	0,530	486	144	1,15	172	226 56,4	8,8	0,297	374	4	0,33
20,3	6,8	0,527	630	142	1,18	174	47,6	9,0	0,293	370	4	0,38
27,1	6,7	0,523	772	138	1,20	176	38,6	9,2	0,288	366	4	0,42
33,8	6,5	0,520	3,82910	136	1,22	178	29,4	9,4	0,283	362	4	0,46
40,3	6,3	0,516	3,83046	133	1,24	180	20,0	9,6	0,278	358	4	0,49
46,6	6,2	0,512	179	130	1,26	182	10,4	9,6	0,273	354	4	0,53
52,8	5,9	0,507	309	126	1,27	184	226 0,8	9,8	0,269	350	4	0,56
27 58,7	5,8	0,503	435	122	1,28	186	225 51,0	10,0	0,266	346	5	0,60
28 4,5	5,6	0,499	557	118	1,28	188	41,0	10,0	0,261	341	3	0,64
10,1	5,3	0,495	675	114	1,28	190	31,0	10,2	0,262	338	3	0,68
15,4	5,0	0,491	789	110	1,28	192	20,8	10,3	0,259	335	2	0,71
20,4	4,7	0,487	3,83899	105	1,27	194	10,5	10,3	0,256	333	1	0,74
25,1	4,4	0,483	3,84004	100	1,26	196	225 0,2	10,3	0,254	332	1	0,77
29,5	4,0	0,479	3,84104	97	1,24	198	224 49,9	10,4	0,251	331	1	0,80
28 33,5		+0,475	3,84201		+1,22	200	224 39,5		+0,249	3,85330		−0,83

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 5. Schluss. Arg. 1 Form der Ungleichheit: $p \sin (P + B)$

Arg.	P	D.	Jährl. Aend.	log p	D.	Jährl. Aend.	Arg.	P	D.	Jährl. Aend.	log p	D.	Jährl. Aend.
200	224° 39″,5		+0″,249	3,85330		−0,83	300	220° 8″,3		+0″,390	3,84736		−2,77
		10,4			0				2,4			72	
202	29,1		0,247	330		0,86	302	10,7		0,396	664		2,81
		10,3			1				2,6			77	
204	18,8		0,245	331		0,89	304	13,3		0,402	587		2,85
		10,4			2				2,9			81	
206	224 8,4		0,243	332		0,91	306	16,2		0,408	506		2,89
		10,3			2				3,0			86	
208	223 58,1		0,242	334		0,94	308	19,2		0,414	420		2,93
		10,2			3				3,3			90	
210	47,9		0,241	337		0,97	310	22,5		0,420	330		2,97
		10,1			3				3,6			94	
212	37,8		0,240	340		1,00	312	26,1		0,426	236		3,01
		10,2			3				3,8			99	
214	27,6		0,239	343		1,02	314	29,9		0,432	137		3,05
		10,0			4				4,0			103	
216	17,6		0,239	347		1,05	316	33,9		0,438	3,84034		3,09
		9,8			4				4,2			107	
218	223 7,8		0,239	351		1,08	318	38,1		0,444	3,83927		3,13
		9,7			5				4,3			111	
220	222 58,1		0,239	356		1,12	320	42,4		0,450	816		3,17
		9,6			6				4,6			116	
222	48,5		0,239	362		1,15	322	47,0		0,456	700		3,20
		9,4			6				4,7			121	
224	39,1		0,239	368		1,17	324	51,7		0,462	579		3,23
		9,2			6				4,9			125	
226	29,9		0,240	374		1,20	326	220 56,6		0,468	454		3,27
		9,1			6				5,0			128	
228	20,8		0,241	380		1,23	328	221 1,6		0,474	326		3,31
		8,9			7				5,1			131	
230	11,9		0,242	387		1,26	330	6,7		0,480	195		3,35
		8,7			7				5,3			134	
232	222 3,2		0,244	394		1,30	332	12,0		0,486	3,83061		3,38
		8,5			7				5,4			138	
234	221 54,7		0,245	401		1,33	334	17,4		0,492	3,82923		3,40
		8,2			6				5,4			141	
236	46,5		0,247	407		1,37	336	22,8		0,497	782		3,42
		7,9			6				5,5			144	
238	38,6		0,249	413		1,40	338	28,3		0,502	638		3,44
		7,7			5				5,6			147	
240	30,9		0,552	418		1,44	340	33,9		0,506	491		3,46
		7,5			5				5,5			149	
242	23,4		0,254	423		1,47	342	39,4		0,511	342		3,47
		7,2			4				5,6			150	
244	16,2		0,257	427		1,50	344	45,0		0,516	192		3,47
		6,8			3				5,5			152	
246	9,4		0,260	430		1,53	346	50,5		0,521	3,82040		3,47
		6,6			3				5,5			154	
248	221 2,8		0,264	433		1,57	348	221 56,0		0,524	3,81886		3,46
		6,3			2				5,5			154	
250	220 56,5		0,267	435		1,60	350	222 1,5		0,528	732		3,45
		6,0			0				5,4			155	
252	50,5		0,271	435		1,64	352	6,9		0,532	577		3,44
		5,7			1				5,3			155	
254	44,8		0,274	434		1,68	354	12,2		0,536	422		3,43
		5,3			2				5,4			155	
256	39,5		0,278	432		1,72	356	17,6		0,540	267		3,41
		5,0			4				5,3			154	
258	34,5		0,282	428		1,75	358	22,9		0,544	3,81113		3,38
		4,7			6				5,2			153	
260	29,8		0,287	422		1,79	360	28,1		0,548	3,80960		3,35
		4,3			8				5,1			151	
262	25,5		0,291	414		1,83	362	33,2		0,551	809		3,32
		4,0			10				4,9			149	
264	21,5		0,295	404		1,87	364	38,1		0,554	660		3,29
		3,7			11				4,8			146	
266	17,8		0,300	393		1,91	366	42,9		0,557	514		3,25
		3,4			13				4,7			143	
268	14,4		0,305	380		1,96	368	47,6		0,560	371		3,21
		2,9			16				4,7			140	
270	11,5		0,309	364		2,01	370	52,3		0,563	231		3,16
		2,6			19				4,6			136	
272	8,9		0,314	345		2,06	372	222 56,9		0,565	3,80095		3,10
		2,2			22				4,4			131	
274	6,7		0,319	323		2,11	374	223 1,3		0,568	3,79964		3,05
		1,9			24				4,2			126	
276	4,8		0,325	299		2,16	376	5,5		0,571	838		2,99
		1,6			27				1,1			120	
278	3,2		0,330	272		2,21	378	9,6		0,573	718		2,92
		1,2			30				4,0			114	
280	2,0		0,335	242		2,26	380	13,6		0,575	604		2,85
		0,8			34				3,9			107	
282	1,2		0,340	208		2,31	382	17,5		0,577	497		2,78
		0,5			38				3,9			99	
284	0,7		0,345	170		2,37	384	21,4		0,579	398		2,70
		0,2			41				3,8			92	
286	0,5		0,350	129		2,42	386	25,2		0,580	306		2,62
		0,2			44				3,8			85	
288	0,7		0,355	085		2,48	388	29,0		0,581	221		2,54
		0,5			49				3,6			77	
290	1,2		0,360	3,85036		2,53	390	32,6		0,583	144		2,46
		0,8			52				3,6			68	
292	2,0		0,366	3,84984		2,59	392	36,2		0,584	076		2,37
		1,1			56				3,6			60	
294	3,1		0,372	928		2,64	394	39,8		0,585	3,79016		2,28
		1,4			59				3,5			52	
296	4,5		0,378	869		2,68	396	43,3		0,585	3,78964		2,18
		1,8			64				3,5			43	
298	6,3		0,384	805		2,73	398	46,8		0,585	3,78921		2,08
		2,0			69				3,5			33	
300	220 8,3		+0,390	3,84736		−2,77	400	223 50,3		+0,585	3,78888		−1,97

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 6. Arg. 1 Form: $p \sin (P + 2B)$

0				100				200				300			
P	D.	log p	D.	P	D.	log p	D.	P	D.	log p	D.	P	D	log p	D.
−29° 21′	50	3,0475	39	+ 8° 32′	34	3,1388	8	+25° 46′	0	2,9264	84	−37° 20′	74	2,6778	102
−28 31	50	514	38	9 6	33	380	10	46	2	180	85	−38 34	68	2,6880	103
−27 41	50	552	37	9 39	33	370	11	44	4	095	88	−39 42	62	2,6983	105
−26 51	50	589	36	10 12	33	359	13	40	5	2,9007	89	−40 44	56	2,7088	106
−26 1	51	625	35	10 45	32	346	13	35	7	2,8918	91	−41 40	50	194	105
−25 10	52	660	35	11 17	31	333	14	28	9	827	92	−42 30	46	299	106
−24 18	51	695	34	11 48	31	319	16	19	11	735	95	−43 16	39	405	105
−23 27	51	729	33	12 19	30	303	18	25 8	13	640	96	−43 55	34	510	104
−22 36	51	762	32	12 49	30	285	19	24 55	17	544	99	−44 29	30	614	103
−21 45	52	794	32	13 19	29	266	20	38	20	445	100	−44 59	26	717	101
−20 53	51	826	31	13 48	29	246	21	24 18	22	345	101	−45 25	21	818	100
−20 2	52	857	32	14 17	29	225	22	23 56	25	244	104	−45 46	18	2,7918	99
−19 10	52	889	30	14 46	28	203	24	31	29	140	106	−46 4	14	2,8017	97
−18 18	52	919	30	15 14	27	179	25	23 2	31	2,8034	107	18	10	114	95
−17 26	51	949	28	15 41	27	154	26	22 31	36	2,7927	108	28	6	209	93
−16 35	50	3,0977	27	16 8	26	128	28	21 55	40	819	109	34	3	302	92
−15 45	50	3,1004	27	16 34	26	100	29	21 15	43	710	111	37	0	394	89
−14 55	50	031	26	17 0	26	071	31	20 32	48	599	111	37	2	483	88
−14 5	50	057	25	17 26	25	040	32	19 44	53	488	111	35	5	571	85
−13 15	49	082	25	17 51	25	3,1008	34	18 51	57	377	110	30	8	656	83
−12 26	50	107	24	18 16	24	3,0974	35	17 54	63	267	111	22	10	739	81
−11 36	49	131	23	18 40	24	839	37	16 51	69	156	109	12	11	820	80
−10 47	49	154	22	19 4	23	902	38	15 42	74	2,7047	108	−46 1	15	900	78
− 9 58	48	176	21	19 27	23	864	39	14 28	79	2,6939	107	−45 46	18	2,8978	76
− 9 10	47	197	20	19 50	23	825	41	13 9	85	832	105	28	20	2,9054	74
− 8 23	47	217	20	20 13	22	784	42	11 44	92	727	101	−45 8	22	128	73
− 7 36	47	237	18	20 35	21	742	43	10 12	98	626	97	−44 46	23	201	70
− 6 49	46	255	18	20 56	20	699	45	8 34	104	529	91	−44 23	25	271	68
− 6 3	45	273	16	21 16	20	654	46	6 50	109	438	86	−43 58	27	339	66
− 5 18	45	289	16	21 36	19	608	48	5 1	116	352	79	−43 31	28	405	64
− 4 33	44	305	15	21 55	19	560	49	3 5	122	273	70	−43 3	30	469	62
− 3 49	45	320	14	22 14	19	511	51	+ 1 3	127	203	62	−42 33	32	531	61
− 3 4	43	334	12	22 33	18	460	53	− 1 4	132	141	52	−42 1	33	592	60
− 2 21	43	346	12	22 51	17	407	54	− 3 16	134	089	42	−41 28	34	652	59
− 1 38	42	358	10	23 8	16	353	55	− 5 30	136	047	31	−40 54	36	711	57
− 0 56	42	368	9	24	16	298	57	− 7 46	139	2,6016	20	−40 18	37	768	55
− 0 14	41	377	8	40	15	241	59	−10 5	140	2,5996	7	−39 41	38	823	54
+ 0 27	40	385	7	23 55	14	182	60	−12 25	139	2,5989	3	−39 3	39	877	54
1 7	41	392	6	24 9	13	122	61	−14 44	138	2,5992	15	−38 24	40	931	52
1 48	40	398	5	22	13	3,0061	63	−17 2	134	2,6007	27	−37 44	42	2,9983	50
2 28	38	403	4	35	12	2,9998	64	−19 16	132	034	37	−37 2	43	3,0033	49
3 6	38	407	2	47	11	934	66	−21 28	128	071	48	−36 19	43	082	48
3 44	38	409	1	24 58	10	868	68	−23 36	124	119	60	−35 36	44	130	46
4 22	37	410	1	25 8	9	800	71	−25 40	119	179	67	−34 52	45	176	45
4 59	37	411	0	17	8	729	72	−27 39	113	246	75	−34 7	46	221	44
5 36	36	411	2	25	7	657	74	−29 32	107	321	81	−33 21	47	265	45
6 12	36	409	3	32	5	583	77	−31 19	100	402	87	−32 34	48	310	43
6 48	35	406	5	37	4	506	79	−32 59	94	489	93	−31 46	48	353	42
7 23	35	401	6	41	3	427	81	−34 33	87	582	96	−30 58	48	395	40
7 58	34	395	7	44	2	346	82	−36 0	80	678	100	−30 10	49	435	40
+ 8 32		3,1388		+25 46		2,9264		−37 20		2,6778		−29 21		3,0475	

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 7. Arg. 1 Form: $p \sin (P + C)$

Arg.	0				100				200				300			
	P	D.	log *p*	D.	*P*	D.	log *p*	D.	*P*	D.	log *p*	D.	*P*	D.	log *p*	D.
0	—15° 51′	44	2,7815	47	+ 8° 5′	29	2,9228	21	+43° 53′	53	2,8816	52	+44°3	11,4	1,871	45
2	—15 7	43	862	46	8 34	29	249	20	44 46	54	764	55	32,9	13,2	26	22
4	—14 24	42	908	43	9 3	31	269	20	45 40	54	709	58	19,7	13,8	04	7
6	—13 42	42	951	42	9 34	31	289	19	46 34	54	651	60	+ 5,9	12,4	11	33
8	—13 0	40	2,7993	40	10 5	33	308	18	47 28	54	591	62	— 6,5	10,3	44	48
10	—12 20	40	2,8033	38	10 38	33	326	18	48 22	54	529	64	—16,8	7,6	1,892	57
12	—11 40	38	071	37	11 11	33	344	16	49 16	55	465	68	—24,4	5,3	1,949	56
14	—11 2	38	108	35	11 44	34	360	16	50 11	54	397	70	—29,7	3,7	2,005	53
16	—10 24	38	143	34	12 18	34	376	15	51 5	54	327	73	—33,4	2,9	2,058	49
18	— 9 46	36	177	32	12 52	34	391	14	51 59	55	254	76	—36,3	2,1	2,107	45
20	— 9 10	35	209	32	13 26	35	405	13	52 54	55	178	79	—38,4	1,5	2,152	43
22	— 8 35	34	241	30	14 1	36	418	11	53 49	55	099	83	—39,9	0,9	2,195	40
24	— 8 1	32	271	29	14 37	37	429	10	54 44	54	2,8016	86	—40,8	0,5	2,235	35
26	— 7 29	32	300	29	15 14	38	439	9	55 38	54	2,7930	89	—41,3	0,3	2,270	33
28	— 6 57	31	329	29	15 52	38	448	9	56 32	55	841	94	—41,6	0,1	2,303	30
30	— 6 26	30	358	29	16 30	38	457	8	57 27	55	747	97	—41,7	0,1	33	28
32	— 5 56	30	387	27	17 8	39	465	6	58 22	55	650	101	—41,6	0,1	61	26
34	— 5 26	29	414	27	17 47	40	471	5	59 17	53	549	105	—41,5	0,3	2,387	26
36	— 4 57	27	441	27	18 27	41	476	4	60 10	53	444	110	—41,2	0,4	2,413	24
38	— 4 30	27	468	26	19 8	41	480	2	61 3	52	334	114	—40,8	0,6	37	22
40	— 4 3	26	494	26	19 49	42	482	1	61 55	53	220	119	—40,2	0,6	59	21
42	— 3 37	25	520	25	20 31	42	483	0	62 48	52	2,7101	123	—39,6	0,7	80	19
44	— 3 12	25	545	25	21 13	43	483	2	63 40	52	2,6978	128	—38,9	0,7	2,499	19
46	— 2 47	24	570	25	21 56	43	481	3	64 32	52	2,6850	185	—38,2	0,8	2,518	17
48	— 2 23	24	595	25	22 39	44	478	5	65 24	0,9	2,6715	14	—37,4	0,7	35	17
50	— 1 59	24	620	25	23 23	44	473	6	66,3	0,8	2,657	15	—36,7	0,7	52	15
52	— 1 35	24	645	25	24 7	45	467	7	67,1	0,8	42	15	—36,0	0,8	67	14
54	— 1 11	23	670	26	24 52	45	460	9	67,9	0,8	27	16	—35,2	0,8	81	14
56	— 0 48	22	696	25	25 37	46	451	10	68,7	0,8	2,611	17	—34,4	0,8	2,595	14
58	— 0 26	22	721	24	26 23	45	441	12	69,5	0,7	2,594	18	—33,6	0,9	2,609	13
60	— 0 4	23	745	25	27 8	46	429	13	70,2	0,7	76	19	—32,7	0,9	22	12
62	+ 0 19	22	770	25	27 54	47	416	15	70,9	0,6	57	19	—31,8	0,9	34	12
64	0 41	23	795	26	28 41	48	401	17	71,5	0,6	38	20	—30,9	0,8	46	11
66	1 4	22	821	25	29 29	48	384	18	72,1	0,6	2,518	22	—30,1	0,9	57	10
68	1 26	23	846	25	30 17	49	366	20	72,7	0,5	2,496	23	—29,2	0,9	67	10
70	1 49	23	871	25	31 6	49	346	22	73,2	0,4	73	24	—28,3	0,8	2,677	9
72	2 12	23	896	25	31 55	49	324	24	73,6	0,3	49	26	—27 28′	52	2,6864	90
74	2 35	22	921	24	32 44	50	300	26	73,9	0,2	2,423	27	—26 36	53	2,6954	87
76	2 57	23	945	25	33 34	50	274	28	74,1	0,1	2,396	29	—25 43	52	2,7041	83
78	3 20	23	970	25	34 24	50	246	29	74,2	0,0	67	30	—24 51	52	124	79
80	3 43	24	2,8995	25	35 14	51	217	31	74,2	0,2	37	33	—23 59	52	203	75
82	4 7	25	2,9020	24	36 5	51	186	32	74,0	0,5	2,304	36	—23 7	51	278	71
84	4 32	24	044	25	36 56	51	154	35	73,5	0,8	2,268	39	—22 16	50	349	68
86	4 56	26	069	24	37 47	52	119	37	72,7	1,2	2,229	42	—21 26	51	417	64
88	5 22	26	093	23	38 39	52	082	39	71,5	1,7	2,187	46	—20 35	49	481	62
90	5 48	26	116	23	39 31	51	043	41	69,8	2,4	2,141	49	—19 46	49	543	60
92	6 14	27	139	23	40 22	52	2,9002	43	67,4	3,3	2,092	53	—18 57	47	603	57
94	6 41	28	162	23	41 14	53	2,8959	46	64,1	4,6	2,039	56	—18 10	47	660	54
96	7 9	28	185	22	42 7	53	913	47	59,5	6,5	1,983	58	—17 23	46	714	52
98	7 37	28	207	21	43 0	53	866	50	53,0	8,7	1,925	54	—16 37	46	766	49
100	+ 8 5		2,9228		+43 53		2,8816		+44,3		1,871		—15 51		2,7815	

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 8. Arg. 1 Form : $p \sin (P + D)$

g.	0: P	D.	log p	D.	100: P	D.	log p	D.
0	195° 8′	23	2,7053	17	204° 58′	12	2,8968	53
2	194 45	21	070	18	205 10	10	2,9021	52
4	194 24	20	088	19	20	9	073	51
6	194 4	18	107	19	29	7	124	49
8	193 46	16	126	20	36	7	173	48
10	30	13	146	20	43	5	221	45
12	17	12	166	22	48	5	266	43
14	193 5	9	178	22	53	4	309	41
16	192 56	8	210	22	205 57	3	350	39
18	48	5	232	23	206 0	2	389	37
20	43	4	255	24	2	2	426	35
22	39	1	279	24	4	1	461	33
24	38	1	303	24	5	1	494	31
26	39	3	327	25	6	0	525	28
28	42	5	352	25	6	0	553	26
30	47	7	377	27	6	0	579	23
32	192 54	9	404	27	6	0	602	20
34	193 3	11	431	28	6	1	622	18
36	14	13	459	29	5	1	640	16
38	27	15	488	29	4	1	656	13
40	42	17	517	31	3	1	669	10
42	193 59	19	548	32	2	1	679	7
44	194 18	20	580	33	1	1	686	5
46	194 38	21	613	35	0	0	691	2
48	194 59	22	648	36	0	1	693	0
50	195 21	24	684	38	1	1	693	3
52	195 45	25	722	39	2	1	690	5
54	196 10	26	761	41	3	2	685	8
56	196 36	26	802	43	5	3	677	10
58	197 2	27	845	44	8	3	667	12
60	197 29	27	889	46	11	4	655	15
62	197 56	29	935	48	15	6	640	18
64	198 25	28	2,7983	48	21	7	622	19
66	198 53	28	2,8031	50	28	8	603	22
68	199 21	28	081	51	36	9	581	24
70	199 49	27	132	53	45	10	557	26
72	200 16	27	185	54	206 55	11	531	28
74	200 43	26	239	54	207 6	13	503	31
76	201 9	25	293	55	19	15	472	33
78	201 34	23	348	56	34	16	439	34
80	201 57	23	404	56	207 50	18	405	36
82	202 20	23	460	57	208 8	20	369	38
84	202 43	21	517	57	208 28	21	331	38
86	203 4	20	574	58	208 49	23	293	40
88	203 24	19	632	58	209 12	25	253	41
90	203 43	17	690	57	209 37	26	212	41
92	204 0	17	747	56	210 3	28	171	42
94	17	15	803	56	210 31	31	129	43
96	32	14	859	55	211 2	32	086	43
98	46	12	914	54	211 34	35	043	43
100	204 58		2,8968		212 9		2,9000	

g.	200: P	D.	log p	D.	300: P	D.	log p	D.
0	212° 9′	37	2,9000	43	232° 18′	28	2,8139	26
2	212 46	38	2,8957	43	231 50	31	113	29
4	213 24	40	914	42	231 19	33	084	30
6	214 4	41	872	41	230 46	35	054	31
8	214 45	43	831	40	230 11	36	2,8023	33
10	215 28	45	791	39	229 35	38	2,7990	35
12	216 13	46	752	38	228 57	39	955	36
14	216 59	47	714	37	228 18	41	919	38
16	217 46	48	677	35	227 37	42	881	38
18	218 34	49	642	34	226 55	43	843	39
20	219 23	50	608	32	226 12	45	804	40
22	220 13	50	576	29	225 27	47	764	40
24	221 3	51	547	27	224 40	48	724	41
26	221 54	50	520	25	223 52	49	683	42
28	222 44	50	495	22	223 3	50	641	41
30	223 34	50	473	20	222 13	51	600	42
32	224 24	49	453	18	221 22	52	558	42
34	225 13	49	435	15	220 30	52	516	41
36	226 2	47	420	13	219 38	53	475	40
38	226 49	45	407	12	218 45	54	435	40
40	227 34	45	395	10	217 51	54	395	39
42	228 19	43	385	8	216 57	55	356	37
44	229 2	41	377	6	216 2	54	319	36
46	229 43	39	371	5	215 8	55	283	35
48	230 22	37	366	3	214 13	55	248	33
50	230 59	35	363	3	213 18	56	215	32
52	231 34	32	360	2	212 22	55	183	30
54	232 6	29	358	1	211 27	55	153	28
56	232 35	26	357	1	210 32	54	125	26
58	233 1	24	356	1	209 38	54	099	24
60	233 25	22	355	1	208 44	53	075	22
62	233 47	19	354	2	207 51	52	053	20
64	234 6	16	352	2	206 59	51	033	18
66	22	14	350	2	206 8	50	2,7015	16
68	36	10	348	3	205 18	49	2,6999	13
70	46	8	345	4	204 29	48	986	10
72	54	5	341	5	203 41	47	976	7
74	234 59	3	336	6	202 54	46	969	5
76	235 2	0	330	7	202 8	44	964	3
78	235 2	3	323	8	201 24	42	961	0
80	234 59	6	315	10	200 42	41	961	2
82	53	8	305	11	200 1	39	963	3
84	45	11	294	14	199 22	37	966	5
86	34	13	280	15	198 45	36	971	7
88	21	15	265	17	198 9	34	978	9
90	234 6	17	248	18	197 35	33	987	10
92	233 49	19	230	20	197 2	31	2,6997	12
94	233 30	22	210	22	196 31	30	2,7009	13
96	233 8	24	188	24	196 1	27	022	15
98	232 44	26	164	25	195 34	26	037	16
100	232 18		2,8139		195 8		2,7053	

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 9. Arg. 1 Mit t zu multipliciren.

Arg.	0	D.	50	D.	100	D.	150	D.	200	D.	250	D.
0	−128,10	76	−121,30	103	−38,93	208	+ 65,45	188	+133,78	71	+130,80	85
1	128,86	73	120,27	107	36,85	209	67,33	187	134,49	67	129,95	89
2	129,59	69	119,20	110	34,76	210	69,20	185	135,16	64	129,06	92
3	130,28	65	118,10	113	32,66	210	71,05	184	135,80	61	128,14	94
4	130,93	62	116,97	116	30,56	211	72,89	182	136,41	58	127,20	98
5	131,55	58	115,81	119	28,45	212	74,71	180	136,99	55	126,22	100
6	132,13	54	114,62	122	26,33	213	76,51	178	137,54	52	125,22	103
7	132,67	51	113,40	125	24,20	213	78,29	177	138,06	49	124,19	106
8	133,18	47	112,15	128	22,07	213	80,06	175	138,55	46	123,13	109
9	133,65	43	110,87	130	19,94	214	81,81	173	139,01	43	122,04	112
10	134,08	40	109,57	133	17,80	214	83,54	171	139,44	40	120,92	115
11	134,48	36	108,24	136	15,66	215	85,25	169	139,84	37	119,77	118
12	134,84	32	106,88	139	13,51	215	86,94	167	140,21	34	118,59	120
13	135,16	29	105,49	142	11,36	215	88,61	166	140,55	30	117,39	123
14	135,45	25	104,07	145	9,21	215	90,27	164	140,85	28	116,16	126
15	135,70	21	102,62	147	7,06	215	91,91	161	141,13	24	114,90	129
16	135,91	17	101,15	150	4,91	215	93,52	159	141,37	21	113,62	131
17	136,08	14	99,65	152	2,76	215	95,11	157	141,58	18	112,31	134
18	136,22	10	98,13	155	− 0,61	216	96,68	155	141,76	15	110,97	136
19	136,32	6	96,58	157	+ 1,55	215	98,23	153	141,91	11	109,61	139
20	136,38	2	95,01	160	3,70	215	99,76	150	142,02	9	108,22	142
21	136,40	1	93,41	162	5,85	215	101,26	148	142,11	5	106,80	144
22	136,39	5	91,79	164	8,00	215	102,74	146	142,16	2	105,36	147
23	136,34	9	90,15	167	10,15	215	104,20	143	142,18	1	103,89	149
24	136,25	13	88,48	168	12,30	214	105,63	141	142,17	4	102,40	151
25	136,12	16	86,80	171	14,44	214	107,04	139	142,13	8	100,89	154
26	135,96	20	85,09	173	16,58	213	108,43	136	142,05	10	99,35	156
27	135,76	24	83,36	175	18,71	213	109,79	134	141,95	14	97,79	159
28	135,52	27	81,61	177	20,84	212	111,13	131	141,81	17	96,20	161
29	135,25	31	79,84	178	22,96	212	112,44	128	141,64	20	94,59	163
30	134,94	35	78,06	181	25,08	211	113,72	126	141,44	23	92,96	166
31	134,59	38	76,25	182	27,19	210	114,98	124	141,21	27	91,30	168
32	134,21	42	74,43	184	29,29	209	116,22	121	140,94	30	89,62	170
33	133,79	46	72,59	186	31,38	209	117,43	118	140,64	33	87,92	172
34	133,33	49	70,73	188	33,47	208	118,61	115	140,31	36	86,20	174
35	132,84	53	68,85	189	35,55	207	119,76	113	139,95	39	84,46	176
36	132,31	56	66,96	191	37,62	207	120,89	110	139,56	42	82,70	178
37	131,75	60	65,05	193	39,69	205	121,99	108	139,14	46	80,92	181
38	131,15	63	63,12	194	41,74	204	123,07	105	138,68	48	79,11	182
39	130,52	67	61,18	196	43,78	203	124,12	102	138,20	52	77,29	184
40	129,85	70	59,22	198	45,81	202	125,14	99	137,68	55	75,45	186
41	129,15	74	57,24	199	47,83	201	126,13	96	137,13	58	73,59	188
42	128,41	77	55,25	200	49,84	200	127,09	94	136,55	61	71,71	190
43	127,64	81	53,25	202	51,84	198	128,03	91	135,94	64	69,81	191
44	126,83	84	51,23	202	53,82	198	128,94	88	135,30	67	67,90	193
45	125,99	87	49,21	204	55,80	196	129,82	85	134,63	71	65,97	195
46	125,12	90	47,17	205	57,76	194	130,67	82	133,92	73	64,02	197
47	124,22	94	45,12	205	59,70	193	131,49	79	133,19	77	62,05	199
48	123,28	97	43,07	207	61,63	192	132,28	76	132,42	80	60,06	200
49	122,31	101	41,00	207	63,55	190	133,04	74	131,62	82	58,06	201
50	−121,30		− 38,93		+65,45		+133,78		+130,80		+ 56,05	

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 9. Schluss. Arg. 1.

Mit t zu multipliciren.

300	D.	350	D.
+56,05	203	−52,10	207
54,02	204	54,17	205
51,98	206	56,22	201
49,92	207	58,26	202
47,85	208	60,28	201
45,77	209	62,29	199
43,68	210	64,28	197
41,58	211	66,25	196
39,47	212	68,21	194
37,35	214	70,15	192
35,21	214	72,07	191
33,07	215	73,98	188
30,92	216	75,86	186
28,76	217	77,72	184
26,59	218	79,56	182
24,41	218	81,38	180
22,23	219	83,18	178
20,04	219	84,96	175
17,85	220	86,71	173
15,65	221	88,44	170
13,44	221	90,14	168
11,23	221	91,82	166
9,02	222	93,48	163
6,80	222	95,11	161
4,58	222	96,72	158
2,36	222	98,30	155
+ 0,14	222	99,85	153
− 2,08	223	101,38	150
4,31	223	102,88	147
6,54	222	104,35	145
8,76	222	105,80	142
10,98	222	107,22	139
13,20	222	108,61	136
15,42	221	109,97	132
17,63	221	111,29	130
19,84	221	112,59	126
22,05	220	113,85	123
24,25	219	115,08	120
26,44	219	116,28	117
28,63	218	117,45	114
30,81	218	118,59	110
32,98	216	119,69	107
35,14	215	120,76	104
37,29	215	121,80	100
39,44	214	122,80	97
41,58	213	123,77	93
43,71	212	124,70	90
45,83	210	125,60	87
47,93	209	126,47	83
50,02	208	127,30	80
−52,10		−128,10	

Tafel 10. Arg. 1.

Mit t_1^2 zu multipliciren.

Arg.	0	D.	200	D.
0	+48	20	−64	16
4	+28	20	48	17
8	+ 8	21	31	17
12	−13	20	−14	17
16	33	20	+ 3	17
20	53	19	20	16
24	72	19	36	17
28	91	20	53	16
32	111	19	69	16
36	130	18	85	15
40	148	17	100	16
44	165	16	116	15
48	181	16	131	15
52	197	15	146	14
56	212	14	160	13
60	226	13	173	13
64	239	12	186	12
68	251	11	198	11
72	262	10	209	10
76	272	8	219	10
80	280	8	229	9
84	288	6	238	8
88	294	5	246	7
92	299	4	253	7
96	303	3	260	6
100	306	2	266	4
104	308	0	270	3
108	308	2	273	2
112	306	2	275	1
116	304	4	276	0
120	300	4	276	1
124	296	5	275	3
128	291	6	272	3
132	285	7	269	5
136	278	8	264	6
140	270	10	258	7
144	260	10	251	8
148	250	11	243	9
152	239	12	234	10
156	227	12	224	12
160	215	13	212	12
164	202	13	200	14
168	189	14	186	15
172	175	14	171	15
176	161	15	156	16
180	146	16	140	17
184	130	16	123	19
188	114	17	104	18
192	97	16	86	19
196	81	17	67	19
200	− 64		+ 48	

Tafel 11. Argg. 1, 2, 3.

Arg.	1	D.	2	3
0	88	17	11	24
8	71	17	9	22
16	54	15	7	20
24	39	12	5	17
32	27	10	4	14
40	17	7	3	11
48	10	3	2	9
56	7	2	1	6
64	9	6	1	4
72	15	10	1	2
80	25	12	1	1
88	37	14	2	0
96	51	16	3	0
104	67	16	4	1
112	83	15	5	3
120	98	14	7	5
128	112	12	9	8
136	124	9	11	11
144	133	5	13	14
152	138	2	15	18
160	140	3	17	21
168	137	6	20	24
176	131	10	22	26
184	121	13	25	28
192	108	14	27	30
200	94	17	29	31
208	77	17	31	31
216	60	16	33	31
224	44	15	35	30
232	29	12	36	29
240	17	10	37	27
248	7	6	38	25
256	1	1	39	23
264	0	3	39	21
272	3	7	39	20
280	10	10	39	18
288	20	14	38	17
296	34	17	37	17
304	51	18	36	17
312	69	17	35	17
320	86	16	33	18
328	102	14	31	20
336	116	11	29	21
344	127	7	27	22
352	134	2	25	23
360	136	2	23	24
368	134	7	20	25
376	127	10	18	25
384	117	13	15	25
392	104	16	13	25
400	88		11	24

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 14. Vertical, Arg. I. Horizontal, Arg. 1

Arg.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
0	788	772	749	717	677	629	574	514	451	388	328	269	212	159
1	773	750	720	682	636	583	524	462	398	335	277	220	167	119
2	753	723	687	643	592	535	473	409	345	284	228	175	127	84
3	727	691	649	600	545	485	421	357	294	236	183	134	92	56
4	697	655	608	555	497	434	370	307	246	191	142	99	63	34
5	662	615	564	508	448	383	320	258	201	150	107	70	41	19
6	623	572	518	460	398	334	272	213	160	114	77	47	25	11
7	581	527	471	411	349	287	227	172	124	84	54	31	16	11
8	537	481	423	363	302	242	186	136	93	60	37	21	15	18
9	491	433	375	316	257	201	149	105	68	43	27	19	21	32
10	444	386	329	271	215	163	116	79	50	32	24	24	34	53
11	397	340	284	229	177	130	89	59	38	28	28	36	54	81
12	351	295	242	191	144	102	69	46	33	31	39	55	81	115
13	306	253	203	157	115	80	55	40	35	42	57	81	113	155
14	264	215	169	128	92	65	47	40	44	59	82	113	152	199
15	225	180	139	104	75	56	46	48	60	82	113	151	195	247
16	189	149	114	86	65	53	52	62	82	112	149	193	243	298
17	158	123	95	74	61	57	64	83	111	147	190	239	294	353
18	131	103	82	68	63	67	83	109	145	188	236	289	347	408
19	110	89	75	69	71	84	108	141	184	233	285	342	402	465
20	94	81	74	76	86	107	139	179	227	281	337	396	458	521
21	85	78	79	89	107	136	175	221	274	332	391	451	513	575
22	81	82	91	108	134	170	215	267	324	384	445	506	567	627
23	83	92	108	133	166	209	259	315	376	438	499	560	619	676
24	92	108	131	163	203	251	306	366	429	492	552	611	668	721
25	107	130	160	198	244	297	356	418	482	545	603	660	713	761
26	127	157	193	237	288	345	407	471	535	596	652	705	753	796
27	153	189	231	280	335	395	459	523	586	644	697	746	788	824
28	183	225	272	325	383	446	510	573	634	689	738	781	817	846
29	218	265	316	372	432	497	560	622	679	730	773	810	839	861
30	257	308	362	420	482	546	608	667	720	766	803	833	855	869
31	299	353	409	469	531	593	653	708	756	796	826	849	864	869
32	343	399	457	517	578	638	694	744	787	820	843	859	865	862
33	389	447	505	564	623	679	731	775	812	837	853	861	859	848
34	436	494	551	609	665	717	764	801	830	848	856	856	846	827
35	483	540	596	651	703	750	791	821	842	852	852	844	826	790
36	529	585	638	689	736	778	811	834	847	849	841	825	799	765
37	574	627	677	723	765	800	825	840	845	838	823	799	767	725
38	616	665	711	752	788	815	833	840	836	821	798	767	728	681
39	655	700	741	776	805	824	834	832	820	798	767	729	685	633
40	691	731	766	794	815	827	828	818	798	768	731	687	637	581
41	722	757	785	806	819	823	816	797	769	733	690	641	586	527
42	749	777	798	812	817	813	797	771	735	692	644	591	533	471
43	770	791	805	811	809	796	772	739	696	647	595	538	478	415
44	786	799	806	804	794	773	741	701	653	599	543	484	422	359
45	795	802	801	791	773	744	705	659	606	548	489	429	367	305
46	799	798	789	772	746	710	665	613	556	496	435	374	313	253
47	797	788	772	747	714	671	621	565	504	442	381	320	261	204
48	788	772	749	717	677	629	574	514	451	388	328	269	212	159

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 12. Schluss. Arg. 5

Arg.	200	D.	Jährl. Aend.	250	D.	Jährl. Aend.	300	D.	Jährl. Aend.	350	D.	Jährl. Aend.
0	8804	177	+0,50	4841	64	—0,22	11982	127	—0,20	11079	161	+0,42
1	8627	175	0,50	4905	70	0,24	12109	123	0,18	10918	165	0,42
2	8452	174	0,50	4975	76	0,25	12232	117	0,16	10753	169	0,41
3	8278	171	0,50	5051	82	0,27	12349	112	0,15	10584	172	0,41
4	8107	169	0,50	5133	87	0,28	12461	108	0,13	10412	176	0,40
5	7938	167	0,50	5220	93	0,30	12569	102	0,12	10236	179	0,39
6	7771	164	0,49	5313	99	0,31	12671	96	0,10	10057	182	0,38
7	7607	162	0,49	5412	104	0,33	12767	91	0,08	9875	185	0,38
8	7445	159	0,48	5516	109	0,34	12858	85	0,06	9690	188	0,37
9	7286	155	0,48	5625	113	0,35	12943	80	0,04	9502	191	0,36
10	7131	152	0,47	5738	119	0,36	13023	73	—0,02	9311	193	0,35
11	6979	149	0,46	5857	124	0,38	13096	67	0,00	9118	196	0,34
12	6830	145	0,45	5981	129	0,39	13163	61	+0,02	8922	198	0,33
13	6685	142	0,44	6110	133	0,40	13224	55	0,04	8724	109	0,32
14	6543	138	0,43	6243	137	0,41	13279	49	0,06	8525	201	0,31
15	6405	135	0,42	6380	141	0,42	13328	42	0,08	8324	203	0,30
16	6270	131	0,41	6521	145	0,43	13370	36	0,09	8121	204	0,29
17	6139	126	0,39	6666	149	0,44	13406	29	0,11	7917	205	0,28
18	6013	122	0,38	6815	152	0,44	13435	22	0,13	7712	206	0,26
19	5891	117	0,37	6967	155	0,45	13457	16	0,15	7506	207	0,25
20	5774	112	0,35	7122	158	0,45	13473	9	0,16	7299	207	0,23
21	5662	108	0,34	7280	161	0,46	13482	3	0,18	7092	208	0,22
22	5554	103	0,32	7441	163	0,46	13485	4	0,20	6884	208	0,20
23	5451	98	0,31	7604	165	0,46	13481	10	0,22	6676	209	0,19
24	5353	93	0,29	7769	167	0,46	13471	17	0,23	6467	208	0,17
25	5260	87	0,28	7936	169	0,46	13454	23	0,25	6259	207	0,16
26	5173	83	0,26	8105	170	0,46	13431	30	0,26	6052	207	0,15
27	5090	77	0,24	8275	172	0,46	13401	36	0,28	5845	206	0,14
28	5013	71	0,22	8447	172	0,46	13365	43	0,29	5639	206	0,12
29	4942	66	0,20	8619	173	0,46	13322	50	0,31	5433	204	0,11
30	4876	60	0,18	8792	173	0,45	13272	55	0,32	5229	203	0,09
31	4816	54	0,16	8965	174	0,45	13217	62	0,33	5026	201	0,08
32	4762	49	0,14	9139	173	0,44	13155	67	0,34	4825	200	0,06
33	4713	42	0,12	9312	173	0,43	13088	74	0,36	4625	198	0,05
34	4671	37	0,10	9485	172	0,42	13014	81	0,37	4427	196	0,04
35	4634	30	0,08	9657	171	0,41	12933	86	0,38	4231	194	0,03
36	4604	24	0,06	9828	170	0,40	12847	92	0,39	4037	191	+0,01
37	4580	17	0,04	9998	169	0,39	12755	97	0,40	3846	189	—0,01
38	4563	13	+0,02	10167	166	0,38	12658	104	0,40	3657	186	0,02
39	4550	4	0,00	10333	165	0,37	12554	109	0,41	3471	182	0,04
40	4546	1	—0,02	10498	163	0,36	12445	114	0,41	3289	180	0,05
41	4547	8	0,04	10661	160	0,35	12331	120	0,42	3109	176	0,06
42	4555	13	0,06	10821	157	0,33	12211	125	0,42	2933	173	0,07
43	4568	20	0,08	10978	154	0,32	12086	130	0,43	2760	169	0,09
44	4588	26	0,10	11132	151	0,30	11956	135	0,43	2591	165	0,10
45	4614	33	0,12	11283	147	0,29	11821	139	0,43	2426	161	0,11
46	4647	39	0,14	11430	144	0,27	11682	144	0,43	2265	157	0,12
47	4686	46	0,16	11574	140	0,26	11538	149	0,43	2108	152	0,13
48	4732	51	0,18	11714	136	0,24	11389	153	0,42	1956	147	0,14
49	4783	58	0,20	11850	132	0,22	11236	157	0,42	1809	143	0,15
50	4841		—0,22	11982		—0,20	11079		+0,42	1666		—0,16

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 13. Arg. 6

Arg.	0	D.	Jährl. Aend.	50	D.	Jährl. Aend.	100	D.	Jährl. Aend.	150	D.	Jährl. Aend.
0	6302	254	—15,98	23014	387	—10.96	41260	300	+ 0,51	49699	10	+11,67
1	6556	257	15,97	23401	388	10,78	41560	295	0,76	49709	4	11,84
2	6813	261	15,96	23789	389	10,59	41855	292	1,02	49713	3	12,00
3	7074	266	15,94	24178	389	10,40	42147	287	1,27	49710	10	12,17
4	7340	270	15,92	24567	390	10,21	42434	283	1,52	49700	16	12,33
5	7610	275	15,90	24957	390	10,02	42717	278	1,77	49684	23	12,49
6	7885	279	15,87	25347	390	9,82	42995	273	2,02	49661	30	12,64
7	8164	282	15,84	25737	390	9,62	43268	269	2,27	49631	36	12,79
8	8446	286	15,80	26127	390	9,41	43537	263	2,51	49595	43	12,94
9	8732	290	15,76	26517	389	9,21	43800	259	2,76	49552	50	13,10
10	9022	294	15,71	26906	390	8,99	44059	254	3,00	49502	58	13,24
11	9316	297	15,66	27296	389	8,78	44313	249	3,26	49444	62	13,38
12	9613	301	15,61	27685	388	8,57	44562	244	3,50	49382	70	13,52
13	9914	304	15,55	28073	389	8,36	44806	238	3,74	49312	77	13,65
14	10218	309	15,49	28462	388	8,14	45044	234	3,98	49235	83	13,78
15	10527	312	15,43	28850	387	7,92	45278	228	4,22	49152	89	13,91
16	10839	315	15,36	29237	386	7,70	45506	223	4,46	49063	96	14,03
17	11154	319	15,29	29623	385	7,48	45729	217	4,70	48967	103	14,15
18	11473	322	15,21	30008	384	7,26	45946	212	4,94	48864	108	14,26
19	11795	325	15,13	30392	383	7,04	46158	206	5,19	48756	115	14,37
20	12120	328	15,04	30775	382	6,80	46364	201	5,42	48641	122	14,48
21	12448	332	14,95	31157	381	6,57	46565	195	5,66	48519	128	14,58
22	12780	335	14,86	31538	379	6,34	46760	189	5,89	48391	134	14,68
23	13115	337	14,77	31917	378	6,11	46949	183	6,12	48257	141	14,78
24	13452	341	14,67	32295	376	5,88	47132	177	6,35	48116	148	14,87
25	13793	343	14,57	32671	374	5,65	47309	172	6,58	47968	152	14,96
26	14136	346	14,46	33045	372	5,41	47481	166	6,81	47816	159	15,05
27	14482	349	14,35	33417	371	5,18	47647	159	7,05	47657	165	15,14
28	14831	351	14,24	33788	369	4,93	47806	153	7,27	47492	171	15,22
29	15182	354	14,12	34157	366	4,69	47959	147	7,49	47321	178	15,29
30	15536	356	14,00	34523	364	4,45	48106	141	7,71	47143	183	15,36
31	15892	358	13,88	34887	362	4,21	48247	135	7,93	46960	189	15,43
32	16250	361	13,76	35249	360	3,97	48382	129	8,15	46771	195	15,49
33	16611	363	13,63	35609	357	3,73	48511	122	8,36	46576	200	15,55
34	16974	365	13,50	35966	355	3,48	48633	115	8,57	46376	206	15,61
35	17339	367	13,37	36321	352	3,24	48748	109	8,78	46170	211	15,66
36	17706	369	13,23	36673	349	2,98	48857	103	8,99	45959	217	15,71
37	18075	371	13,09	37022	346	2,74	48960	97	9,21	45742	223	15,76
38	18446	373	12,93	37368	342	2,49	49057	90	9,41	45519	228	15,80
39	18819	375	12,78	37710	340	2,25	49147	83	9,61	45291	233	15,84
40	19194	376	12,63	38050	337	2,00	49230	77	9,81	45058	238	15,87
41	19570	378	12,48	38387	334	1,75	49307	71	10,01	44820	244	15,90
42	19948	379	12,32	38721	330	1,50	49378	63	10,20	44576	249	15,92
43	20327	380	12,16	39051	327	1,25	49441	57	10,39	44327	255	15,94
44	20707	382	12,00	39378	323	0,99	49498	50	10,58	44072	259	15,96
45	21089	383	11,84	39701	320	0,74	49548	44	10,77	43813	264	15,97
46	21472	384	11,67	40021	316	0,49	49592	37	10,95	43549	269	15,98
47	21856	385	11,50	40337	311	— 0,24	49629	30	11,14	43280	273	15,99
48	22241	386	11,32	40648	308	+ 0,01	49659	23	11,32	43007	278	15,99
49	22627	387	11,15	40956	304	0,25	49682	17	11,50	42729	283	15,99
50	23014		—10,96	41260		+ 0,51	49699		+11,67	42446		+15,98

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 15. Vert. Arg. II. Hor. Arg. I

Arg.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
0	334	349	356	356	346	330	310	285	259	234	209	187	169	156
1	344	355	357	352	338	318	295	267	240	214	190	169	152	141
2	352	358	355	345	327	303	277	248	220	194	171	151	136	126
3	357	358	350	335	314	286	258	228	200	174	152	133	120	112
4	359	355	343	323	298	268	238	207	179	154	133	116	105	99
5	358	349	332	309	280	248	217	186	158	134	115	100	92	88
6	353	340	319	292	261	227	195	164	138	115	98	86	80	78
7	345	329	303	273	240	205	173	143	118	97	83	73	70	70
8	335	315	285	253	218	183	151	122	99	81	69	62	61	64
9	322	299	265	231	196	160	130	102	82	67	58	53	55	60
10	307	280	244	208	173	138	109	84	66	54	48	47	51	58
11	289	260	222	185	150	116	90	67	52	43	40	42	49	58
12	270	238	199	162	128	96	72	52	41	35	35	40	49	60
13	249	215	176	139	106	78	56	40	32	29	33	40	52	64
14	227	192	153	117	86	61	42	30	25	26	33	43	57	70
15	204	169	131	96	67	46	30	22	21	25	35	48	64	78
16	181	146	109	77	51	33	21	17	20	27	40	55	72	88
17	157	124	88	60	37	23	15	15	22	32	47	64	83	99
18	134	102	69	44	25	15	12	16	26	39	57	76	95	112
19	112	82	52	30	16	10	12	20	33	49	69	89	109	126
20	91	63	37	19	10	8	14	26	42	61	82	104	124	141
21	72	46	25	11	7	10	19	35	54	75	97	120	140	156
22	54	32	15	6	6	14	27	46	68	91	114	137	157	172
23	39	20	8	3	9	21	37	59	84	108	132	155	174	188
24	26	11	4	4	14	30	50	75	101	126	151	173	191	204
25	16	5	3	8	22	42	65	93	120	146	170	191	208	219
26	8	2	5	15	33	57	83	112	140	166	189	209	224	234
27	3	2	10	25	46	74	102	132	160	186	208	227	240	248
28	1	5	17	37	62	92	122	153	181	206	228	244	255	261
29	2	11	28	51	80	112	143	174	202	226	245	260	268	272
30	7	20	41	68	99	133	165	196	222	245	262	274	280	282
31	15	31	57	87	120	155	187	217	242	263	277	287	290	290
32	25	45	75	107	142	177	209	238	261	279	291	298	299	296
33	38	61	95	129	164	200	230	258	278	293	302	307	305	300
34	53	80	116	152	187	222	251	276	294	306	312	313	309	302
35	71	100	138	175	210	244	270	293	308	317	320	318	311	302
36	90	122	161	198	232	264	288	308	319	325	325	320	311	300
37	111	145	184	221	254	282	304	320	328	331	327	320	308	296
38	133	168	207	243	274	299	318	330	335	334	327	317	303	290
39	156	191	229	264	293	314	330	338	339	335	325	312	296	282
40	179	214	251	283	309	327	339	343	340	333	320	305	288	272
41	203	236	272	300	323	337	345	345	338	328	313	296	277	261
42	226	258	291	316	335	345	348	344	334	321	303	284	265	248
43	248	278	308	330	344	350	348	340	327	311	291	271	251	234
44	269	297	323	341	350	352	346	334	318	299	278	256	236	219
45	288	314	335	349	353	350	341	325	306	285	263	240	220	204
46	306	328	345	354	354	346	333	314	292	269	246	223	203	188
47	321	340	352	357	351	339	323	301	276	252	228	205	186	172
48	334	349	356	356	346	330	310	285	259	234	209	187	169	156

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 15. Fortsetzung. Vert. Arg. II. Hor. Arg. I

Arg.	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270
0	147	142	141	143	148	154	161	168	173	176	176	172	165	153
1	134	130	131	134	140	147	154	160	164	166	165	160	152	[illegible]
2	121	119	121	126	132	140	147	153	156	157	155	148	139	125
3	109	109	112	118	126	134	141	146	148	148	145	137	127	112
4	98	100	105	112	120	128	135	139	141	140	135	126	115	100
5	89	93	99	107	115	124	130	133	134	132	127	116	105	[illegible]
6	81	87	95	104	112	120	125	128	128	125	119	108	96	[illegible]
7	75	83	92	101	109	117	122	124	123	119	112	101	88	74
8	71	80	90	100	108	115	120	121	119	114	106	95	82	[illegible]
9	69	79	90	100	108	114	119	119	116	110	102	91	78	[illegible]
10	68	80	91	101	110	115	118	118	114	108	99	88	76	64
11	70	82	94	104	112	117	119	118	113	106	97	86	75	65
12	73	86	98	108	116	120	121	119	114	106	97	86	76	67
13	78	92	104	113	120	124	124	121	115	107	98	88	79	72
14	85	99	111	120	126	129	128	124	118	110	101	91	83	78
15	94	108	119	127	133	135	133	128	122	113	105	96	89	86
16	104	118	129	136	140	141	138	133	126	118	110	102	97	95
17	115	129	139	145	148	148	145	139	132	124	116	110	106	106
18	128	141	150	155	157	156	152	145	138	131	124	119	117	119
19	142	153	161	165	166	164	159	152	145	139	133	129	129	133
20	156	166	173	176	175	172	167	160	153	147	142	140	141	147
21	170	179	185	187	184	180	175	168	161	156	152	151	154	162
22	185	192	197	197	194	189	183	176	170	165	162	163	168	177
23	199	205	208	207	203	198	191	184	178	174	173	175	182	192
24	213	218	219	217	212	206	199	192	187	184	184	188	195	207
25	226	230	229	226	220	213	206	200	196	194	195	200	208	221
26	239	241	239	234	228	220	213	207	204	203	205	212	221	235
27	251	251	248	242	234	226	219	214	212	212	215	223	233	248
28	262	260	255	248	240	232	225	221	219	220	225	234	245	260
29	271	267	261	253	245	236	230	227	226	228	233	244	255	270
30	279	273	265	256	248	240	235	232	232	235	241	252	264	279
31	285	277	268	259	251	243	238	236	237	241	248	289	272	286
32	289	280	270	260	252	245	240	239	241	246	254	265	278	291
33	291	281	270	260	252	246	241	241	244	250	258	269	282	294
34	292	280	269	259	250	245	242	242	246	252	261	272	284	296
35	290	278	266	256	248	243	241	242	247	254	263	274	285	295
36	287	274	262	252	244	240	239	241	246	254	263	274	284	293
37	282	268	256	247	240	236	236	239	245	253	262	272	281	288
38	275	261	249	240	234	231	232	236	242	250	259	269	277	282
39	266	252	241	233	227	225	227	232	238	247	255	264	271	274
40	256	242	231	224	220	219	222	227	234	242	250	258	263	265
41	245	231	221	215	212	212	215	221	228	236	244	250	254	254
42	232	219	210	205	203	204	208	215	222	229	236	241	243	241
43	218	207	199	195	194	196	201	208	215	221	227	231	231	227
44	204	194	187	184	185	188	193	200	207	213	218	220	219	213
45	190	181	175	173	176	180	185	192	198	204	208	209	206	198
46	175	168	163	163	166	171	177	184	190	195	198	197	192	183
47	161	155	152	153	157	162	169	176	182	186	187	185	178	168
48	147	142	141	143	148	154	161	168	173	176	176	172	165	153

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 15. Schluss. Vert. Arg. II. Hor. Arg. I

Arg.	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
0	138	119	98	77	55	35	19	8	3	6	17	36	62
1	123	103	83	63	43	26	13	6	6	13	28	51	80
2	109	89	70	51	33	19	10	7	11	22	42	68	100
3	96	77	59	41	26	15	10	11	19	34	57	87	122
4	84	66	49	34	21	13	12	18	30	49	76	108	145
5	74	58	42	29	19	15	18	27	43	66	96	130	168
6	66	51	37	27	20	19	26	39	59	85	117	153	191
7	59	46	34	27	24	26	37	53	77	105	140	176	214
8	55	44	34	30	30	36	50	70	96	127	163	200	237
9	53	44	37	35	39	48	66	89	117	150	186	223	259
10	53	46	42	43	50	63	83	109	139	173	209	245	279
11	55	50	49	53	64	80	102	130	162	197	232	266	298
12	60	57	59	66	79	98	122	152	185	220	254	286	314
13	67	66	71	81	96	117	143	175	208	243	275	304	328
14	75	77	84	97	115	138	165	198	231	264	294	319	340
15	85	90	99	114	135	159	188	220	253	284	311	333	349
16	97	104	116	133	155	181	210	242	273	302	326	344	355
17	110	119	134	152	176	203	232	263	291	318	338	352	358
18	125	136	152	172	197	224	253	282	308	331	347	357	358
19	141	153	171	192	218	245	273	300	323	342	354	359	355
20	157	171	190	212	238	264	292	315	335	351	358	358	350
21	173	189	209	231	257	282	308	328	345	357	359	353	341
22	190	207	228	250	275	298	321	339	352	359	356	346	329
23	206	224	246	267	291	313	332	347	356	358	351	336	315
24	222	241	262	283	305	325	341	352	357	354	343	324	298
25	237	257	277	297	317	334	347	351	354	347	332	309	280
26	251	271	290	309	327	341	350	353	349	338	318	292	260
27	264	283	301	319	334	345	350	349	341	326	303	273	238
28	276	294	311	326	339	347	348	342	330	311	284	252	215
29	286	302	318	331	341	345	342	333	317	294	264	230	192
30	294	309	323	333	340	341	334	321	301	275	243	207	169
31	301	314	326	333	336	334	323	307	283	255	220	184	146
32	305	316	326	330	330	324	310	290	264	233	197	160	123
33	307	316	323	325	321	312	294	271	243	210	174	137	101
34	307	314	318	317	310	297	277	251	221	187	151	115	81
35	305	310	311	307	296	280	258	230	198	163	128	94	62
36	300	303	301	294	281	262	238	208	175	140	106	74	46
37	293	294	289	279	264	243	217	185	152	117	85	56	32
38	285	283	276	263	245	222	195	162	129	96	66	41	20
39	275	270	261	246	225	201	172	140	107	76	49	27	11
40	263	256	244	227	205	179	150	118	87	58	34	16	5
41	250	241	226	208	184	157	128	97	69	42	22	8	2
42	235	224	208	188	163	136	107	78	52	29	13	3	2
43	219	207	189	168	142	115	87	60	37	18	6	1	5
44	203	189	170	148	122	96	68	45	25	9	2	2	10
45	187	171	151	129	103	78	52	32	15	3	1	7	19
46	170	153	132	110	85	62	39	21	8	1	4	14	31
47	154	136	114	93	69	47	28	13	4	2	9	24	45
48	138	119	98	77	55	35	19	8	3	6	17	36	62

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 16. Vert. Arg. III. Hor. Arg. I

Arg.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
0	99	81	65	50	38	29	22	18	17	18	23	29	38	49
1	90	73	60	47	37	30	25	23	24	27	34	42	52	65
2	82	67	56	45	38	33	31	31	34	39	48	57	69	82
3	75	63	54	45	41	38	38	41	46	53	63	74	87	101
4	70	60	53	48	46	46	48	53	60	69	80	92	106	120
5	67	59	55	53	53	56	60	67	76	86	98	112	126	140
6	65	60	59	59	62	67	74	83	94	105	118	132	147	161
7	65	63	64	67	73	80	89	100	113	125	139	153	168	182
8	66	67	71	77	85	95	106	118	132	145	160	174	189	203
9	69	73	80	88	99	111	124	137	152	166	181	195	210	223
10	74	81	90	101	114	128	142	157	172	187	202	215	230	242
11	81	90	101	115	130	145	160	177	192	207	222	235	249	260
12	89	101	114	130	146	163	179	196	212	227	241	254	266	276
13	98	113	128	145	162	181	198	215	231	246	259	271	281	290
14	108	125	142	161	179	198	216	233	249	263	275	286	295	302
15	120	138	156	177	196	215	233	250	265	278	290	299	306	312
16	133	152	171	192	212	231	249	265	280	292	302	310	315	319
17	145	165	186	207	227	246	263	278	293	203	312	318	321	323
18	158	179	200	221	241	259	276	290	303	312	319	324	325	325
19	171	193	214	235	254	270	287	300	311	219	324	327	326	324
20	184	206	227	247	265	280	296	307	317	323	326	327	325	321
21	197	219	239	258	274	288	303	312	320	324	325	324	320	315
22	209	230	249	267	282	295	307	314	320	323	322	319	313	306
23	221	240	258	274	288	299	309	314	318	319	316	311	304	295
24	231	249	265	280	292	301	308	312	313	312	307	301	292	281
25	240	257	270	283	293	300	305	307	306	303	296	288	278	265
26	248	263	274	285	292	297	299	299	396	291	282	273	261	246
27	255	267	276	285	289	292	292	289	284	277	267	256	243	229
28	260	270	277	282	284	284	282	277	270	261	250	238	224	210
29	263	271	275	277	277	274	270	263	254	244	232	218	204	190
30	265	270	271	271	268	263	256	247	236	225	212	198	183	169
31	265	267	266	263	257	250	241	230	217	205	191	177	162	148
32	264	263	259	253	245	235	224	212	198	185	170	156	141	127
33	261	257	250	242	231	219	206	193	178	164	149	135	120	107
34	256	249	240	229	216	202	188	173	158	143	128	115	100	86
35	249	240	229	215	200	185	170	153	138	123	108	95	81	70
36	241	229	216	200	184	167	151	131	118	103	89	76	64	54
37	232	217	202	185	168	149	132	115	99	84	71	59	49	40
38	222	205	188	169	151	132	114	97	81	67	55	44	35	28
39	210	192	174	153	134	115	97	80	65	52	40	31	24	18
40	198	178	159	138	118	99	81	65	50	38	28	20	15	11
41	185	165	144	123	103	84	67	52	37	27	18	12	9	7
42	172	151	130	109	89	71	54	40	27	18	11	6	5	5
43	159	137	116	95	76	60	43	30	19	11	6	3	4	6
44	146	124	103	83	65	50	34	23	13	7	4	3	5	9
45	133	111	91	72	56	42	27	18	10	6	5	6	10	15
46	121	100	81	63	48	35	23	16	10	7	8	11	17	24
47	109	90	72	56	42	31	21	16	12	11	14	19	26	35
48	99	81	65	50	38	29	22	18	17	18	23	29	38	49

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 16. Fortsetzung. Vert. Arg. III. Hor. Arg. 1

Arg.	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270
0	62	76	91	108	124	142	159	177	194	210	226	240	252	263
1	78	93	109	126	142	160	177	194	210	225	240	253	263	272
2	96	112	128	145	161	178	195	210	226	239	253	264	273	280
3	115	131	147	164	180	196	212	226	241	252	264	273	281	286
4	135	151	167	183	198	213	228	241	254	264	274	281	287	290
5	155	171	187	202	216	229	243	254	266	274	281	287	291	292
6	176	191	206	220	233	245	257	266	276	282	287	291	292	291
7	197	210	225	238	249	259	269	276	284	288	291	293	292	289
8	217	229	242	254	263	272	279	285	290	292	293	292	289	284
9	236	247	258	268	275	282	288	291	294	294	293	289	284	277
10	254	263	272	281	286	291	294	295	295	293	290	284	277	268
11	270	278	285	292	295	298	298	297	295	291	285	277	268	257
12	285	291	296	301	301	302	300	297	292	286	278	268	258	245
13	297	302	305	307	305	304	300	294	287	279	269	257	246	232
14	307	310	311	311	307	303	297	289	280	270	258	245	233	217
15	315	316	314	312	306	300	292	282	271	259	246	232	217	201
16	320	319	315	311	303	295	285	273	261	247	232	217	202	185
17	322	319	313	307	298	288	276	262	249	233	217	201	186	168
18	322	317	309	301	290	278	265	250	235	218	202	185	169	152
19	319	312	303	293	280	266	252	236	220	202	186	169	152	136
20	314	305	294	283	268	253	238	221	204	186	169	152	136	120
21	306	395	283	270	254	238	223	205	187	170	153	136	120	105
22	295	283	270	255	239	222	206	188	170	153	136	120	105	91
23	282	269	255	239	223	205	189	171	153	136	120	105	91	78
24	268	254	239	222	206	188	171	153	136	120	104	90	78	67
25	252	237	221	204	188	170	153	136	120	105	90	77	67	58
26	234	218	202	185	169	152	135	120	104	91	77	66	57	50
27	215	199	183	166	150	134	118	104	89	78	66	57	49	44
28	195	179	163	147	132	117	102	89	76	66	56	49	43	40
29	175	159	143	128	114	101	87	76	64	56	49	43	39	38
30	154	139	124	110	97	85	73	64	54	48	43	39	38	39
31	133	120	105	92	81	71	61	54	46	42	39	37	38	41
32	113	101	88	76	67	58	51	45	40	38	37	38	41	46
33	94	83	72	62	55	48	42	39	36	36	37	41	46	53
34	76	67	58	49	44	39	36	35	35	37	40	46	53	62
35	60	52	45	38	35	32	32	33	35	39	45	53	62	73
36	45	39	34	29	29	28	30	33	38	44	52	62	72	85
37	33	28	25	23	25	26	30	36	43	51	61	73	84	98
38	23	20	19	19	23	27	33	41	50	60	72	85	98	113
39	15	14	16	18	24	30	38	48	59	71	84	98	113	129
40	10	11	15	19	27	35	45	57	69	83	98	113	128	145
41	8	11	17	23	32	42	54	68	81	97	113	129	144	162
42	8	13	21	29	40	52	65	80	95	112	128	145	161	178
43	11	18	27	37	50	64	78	94	110	128	144	161	178	194
44	16	25	36	47	62	77	92	109	126	144	161	178	194	210
45	24	35	47	60	76	92	107	125	143	160	177	194	210	225
46	35	47	60	75	91	108	124	142	160	177	194	210	225	239
47	48	61	75	91	107	125	141	159	177	194	210	225	239	252
48	62	76	91	108	124	142	159	177	194	210	226	240	252	263

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 16. Schluss. Vert. Arg. III. Hor. Arg. 1

Arg.	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
0	273	279	284	285	284	281	274	264	252	238	221	202	182
1	281	285	288	287	284	279	270	258	244	228	210	190	169
2	286	289	290	287	282	275	264	250	235	218	198	177	156
3	290	291	290	285	278	269	256	241	225	206	186	165	143
4	292	290	287	281	272	261	247	231	213	194	173	152	130
5	292	288	282	274	264	251	236	220	201	181	160	139	118
6	289	283	276	266	254	240	224	207	188	168	147	127	107
7	284	276	268	206	243	228	212	194	175	155	135	116	97
8	277	268	258	245	231	215	198	180	161	142	123	105	88
9	268	258	246	232	218	201	184	166	147	130	112	95	80
10	257	246	233	218	203	186	169	152	134	118	101	87	74
11	245	233	219	203	188	171	154	138	122	107	92	80	69
12	232	218	203	188	172	156	140	125	110	97	84	74	66
13	217	203	187	172	156	141	126	112	99	88	77	70	65
14	202	187	171	156	141	126	113	100	90	80	72	68	65
15	186	171	155	140	126	112	100	89	81	74	69	67	67
16	170	154	139	125	111	99	89	80	74	69	67	68	70
17	153	138	123	110	97	87	79	72	69	66	67	70	76
18	137	122	108	96	85	77	70	66	65	65	68	74	83
19	121	107	94	83	74	68	63	62	63	66	71	80	91
20	106	93	81	72	65	60	58	59	62	68	76	87	101
21	92	80	70	63	58	55	55	58	64	72	82	96	112
22	79	69	60	55	52	51	53	59	67	77	90	106	123
23	67	59	52	49	48	49	54	62	72	84	99	117	135
24	57	51	46	45	46	49	56	66	78	92	109	128	146
25	49	45	42	43	46	51	60	72	86	102	120	140	161
26	44	41	40	43	48	55	66	80	95	112	132	153	174
27	40	39	40	45	52	61	74	89	105	124	144	165	187
28	38	40	43	49	58	69	83	99	117	136	157	178	200
29	38	42	48	56	66	79	94	110	129	149	170	191	212
30	41	47	54	64	76	90	106	123	142	162	183	203	223
31	46	54	62	74	87	102	118	136	155	175	195	214	233
32	53	62	72	85	99	115	132	150	169	188	207	225	242
33	62	72	84	98	112	129	146	164	183	200	218	235	250
34	73	84	97	112	127	144	161	178	196	212	229	243	256
35	85	97	111	127	142	159	176	192	208	223	238	250	261
36	98	112	127	142	158	174	190	205	220	233	246	256	264
37	113	127	143	158	174	189	204	218	231	242	253	260	265
38	128	143	159	174	189	204	217	230	240	250	258	262	265
39	144	159	175	190	204	218	230	241	249	256	261	263	263
40	160	176	191	205	219	231	241	250	256	261	263	262	260
41	177	192	207	220	233	243	251	258	261	264	263	260	254
42	193	208	222	234	245	253	260	264	265	265	262	256	247
43	209	223	236	247	256	262	267	268	267	264	259	250	239
44	224	237	249	258	265	270	272	271	268	262	254	243	229
45	238	250	260	267	272	275	275	272	266	258	248	234	218
46	251	261	270	275	278	279	277	271	263	253	240	224	207
47	263	271	278	281	282	281	276	268	258	246	231	213	195
48	273	279	284	285	284	281	274	264	252	238	221	202	182

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 17. Vert. Arg. IV. Hor. Arg. 1

Arg.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
0	91	94	95	94	91	88	84	79	75	72	69	66	64	61
1	94	95	95	93	89	85	80	75	71	67	64	61	59	57
2	95	95	94	90	86	81	75	70	66	62	59	56	54	52
3	96	94	92	87	82	76	70	65	61	57	54	51	49	47
4	95	92	88	82	76	70	64	59	55	51	48	46	44	42
5	92	88	83	76	70	64	58	53	49	45	43	41	39	37
6	88	83	77	70	63	57	51	46	43	40	38	36	35	33
7	83	77	70	63	56	50	44	40	37	35	33	32	31	30
8	78	71	63	56	49	43	38	34	32	30	29	28	27	27
9	71	64	56	48	41	36	32	29	27	26	25	25	25	25
10	64	56	48	41	34	30	26	24	23	23	22	23	23	23
11	56	48	40	34	28	24	21	20	20	20	20	21	22	22
12	48	40	32	27	22	19	17	17	18	18	19	20	21	22
13	40	32	25	21	17	15	14	15	17	18	19	21	22	23
14	32	25	19	15	13	12	13	14	16	18	20	22	23	25
15	25	19	14	11	10	10	12	14	17	19	22	24	25	28
16	19	14	10	8	8	10	12	15	18	21	24	26	28	31
17	13	9	7	6	8	10	13	17	21	24	27	30	32	35
18	9	6	5	6	9	12	16	21	25	28	31	34	36	39
19	6	5	5	7	11	15	20	25	29	33	36	39	41	43
20	5	5	6	10	14	19	25	30	34	38	41	44	46	48
21	4	6	8	13	18	24	30	35	39	43	46	49	51	53
22	5	8	12	18	24	30	36	41	45	49	52	54	56	58
23	7	12	17	24	30	36	42	47	51	55	57	59	61	63
24	12	17	23	30	37	43	49	54	57	60	62	64	65	67
25	17	23	30	37	44	50	56	60	63	65	67	68	69	70
26	22	29	37	44	51	57	62	66	68	70	71	72	73	73
27	29	36	44	52	59	64	68	71	73	74	75	75	75	75
28	36	44	52	59	66	70	64	76	77	77	78	77	77	77
29	44	52	60	66	72	76	79	80	80	80	80	79	78	78
30	52	60	68	73	78	81	83	83	82	82	81	80	79	78
31	60	68	75	79	83	85	86	85	83	82	81	79	78	77
32	68	75	81	85	87	88	87	86	84	82	80	78	77	75
33	75	81	86	89	90	90	88	86	83	81	78	76	75	72
34	81	86	90	92	92	90	88	85	82	79	76	74	72	69
35	87	91	93	94	92	90	87	83	79	76	73	70	68	65
36	91	94	95	94	91	88	84	79	75	72	69	66	64	61

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 17. Fortsetzung. Vert. Arg. IV. Hor. Arg. 1

Arg.	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270
0	59	57	54	51	48	46	44	42	42	42	43	45	47	48
1	55	52	49	46	44	42	40	39	39	39	41	43	45	47
2	50	47	45	42	40	38	36	36	36	37	39	41	43	45
3	45	42	40	38	36	34	33	33	34	36	38	40	42	43
4	40	38	36	34	32	31	31	31	33	35	37	39	41	41
5	36	34	32	31	29	29	29	30	32	34	36	38	40	40
6	32	30	29	28	27	27	28	29	31	34	36	38	39	39
7	29	27	27	26	26	26	27	29	31	34	36	38	39	39
8	26	25	25	24	25	26	27	29	32	35	37	38	39	38
9	24	24	24	24	25	26	28	30	33	36	38	39	39	39
10	23	23	23	24	25	27	29	32	35	37	39	40	40	38
11	23	23	24	25	27	29	31	34	37	39	41	41	41	38
12	23	24	25	27	29	31	34	37	40	42	43	43	42	40
13	24	26	27	29	32	34	37	40	43	44	45	45	43	41
14	26	28	30	32	35	38	41	44	46	47	47	47	45	43
15	29	31	33	35	39	42	45	47	49	50	49	49	47	44
16	33	35	37	39	43	46	49	51	52	53	52	51	49	47
17	37	39	41	44	47	50	53	55	55	56	55	53	51	49
18	41	43	46	49	52	54	56	58	58	58	57	55	53	52
19	45	48	51	54	56	58	60	61	61	61	59	57	55	53
20	50	53	55	58	60	62	64	64	64	63	61	59	57	55
21	55	58	60	62	64	66	67	67	66	64	62	60	58	57
22	60	62	64	66	68	69	69	69	67	65	63	61	59	58
23	64	66	68	69	71	71	71	70	68	66	64	62	60	60
24	68	70	71	72	73	73	72	71	69	66	64	62	61	61
25	71	73	73	74	74	74	73	71	69	66	64	62	61	62
26	74	75	75	76	75	74	73	71	68	65	63	62	61	62
27	76	76	76	76	75	74	72	70	67	64	62	61	61	62
28	77	77	77	76	75	73	71	68	65	63	61	60	60	62
29	77	77	76	75	73	71	69	66	63	61	59	59	59	61
30	77	76	75	73	71	69	66	63	60	59	57	57	58	60
31	76	74	73	71	68	66	63	60	57	56	55	55	57	59
32	74	72	70	68	65	62	59	56	54	53	53	53	55	57
33	71	69	67	65	61	58	55	53	51	50	51	51	53	55
34	67	65	63	61	57	54	51	49	48	47	48	49	51	53
35	63	61	59	56	53	50	47	45	45	44	45	47	49	51
36	59	57	54	51	48	46	44	42	42	42	43	45	47	49

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 17. Schluss. Vert. Arg. IV. Hor. Arg. 1

280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
50	51	50	48	44	39	32	25	19	13	8	5	4
48	48	46	43	39	34	27	21	15	10	6	4	5
46	45	43	39	35	29	23	17	12	8	5	5	7
43	42	40	35	31	25	20	14	10	7	6	7	10
41	40	37	32	27	22	17	12	9	8	8	11	15
39	37	34	29	25	20	15	11	9	10	11	15	21
38	35	32	27	23	18	14	12	11	13	16	21	27
37	34	30	26	22	17	15	14	14	17	22	28	34
36	33	29	25	21	18	17	17	18	22	28	35	42
36	33	29	25	22	20	20	21	23	28	35	43	50
36	33	29	26	24	22	23	25	29	35	42	51	58
36	33	30	28	26	25	27	31	36	42	50	59	66
37	34	32	30	29	29	32	37	43	50	58	66	73
38	36	34	33	33	34	38	43	50	58	65	74	79
40	38	36	36	37	39	44	50	57	65	72	80	85
42	40	39	40	41	44	50	57	64	72	78	86	90
45	43	43	44	46	50	56	63	70	78	84	90	93
47	46	46	48	51	56	62	69	76	83	89	93	95
50	49	50	52	56	61	68	75	81	87	92	95	96
52	52	54	57	61	66	73	79	85	90	94	96	95
54	55	57	61	65	71	77	83	88	92	95	95	93
57	58	60	65	69	75	80	86	90	93	94	93	90
59	60	63	68	73	78	83	88	91	92	92	89	85
61	63	66	71	75	80	85	89	91	90	89	85	79
62	65	68	73	77	82	86	88	89	87	84	79	73
63	66	70	74	78	83	85	86	86	83	78	72	66
64	67	71	75	79	82	83	83	82	78	72	65	58
64	67	71	75	78	80	80	79	77	72	65	57	50
64	67	71	74	76	78	77	75	71	65	58	49	42
64	67	70	72	74	75	73	69	64	58	50	41	34
63	66	68	70	71	71	68	63	57	50	42	34	27
62	64	66	67	67	66	62	57	50	42	35	26	21
60	62	64	64	63	61	56	50	43	35	28	20	15
57	60	61	60	59	56	50	43	36	28	22	14	10
55	57	57	56	54	50	44	37	30	22	16	10	7
53	54	54	52	49	44	38	31	24	17	11	7	5
50	51	50	48	44	39	32	25	19	13	8	5	4

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 18. Vert. Arg. V. Hor. Arg. 4

Arg.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
0	135	134	134	134	135	133	129	123	114	105	96	88	82	78
1	134	132	131	130	129	127	121	113	103	94	85	77	72	67
2	131	128	127	125	122	119	111	102	92	82	73	66	61	57
3	127	123	121	118	114	109	100	91	80	70	62	55	51	48
4	121	117	113	110	105	99	89	79	68	59	51	45	42	38
5	114	109	105	101	95	89	78	67	57	48	41	36	34	31
6	106	101	96	91	85	78	67	56	46	38	32	29	27	25
7	97	92	87	81	74	67	56	45	36	29	25	23	22	21
8	88	82	77	71	64	56	45	36	28	22	19	18	19	19
9	78	73	67	61	54	47	36	28	21	16	16	16	18	19
10	69	64	58	52	45	38	28	21	16	13	14	16	18	20
11	60	55	50	43	37	30	22	17	13	12	14	18	21	23
12	51	47	42	36	30	24	18	14	12	13	16	21	25	29
13	43	40	36	30	25	20	15	13	13	16	21	26	31	34
14	37	34	31	26	22	17	14	14	16	21	27	33	38	42
15	32	30	27	23	20	17	16	17	21	27	34	41	47	51
16	28	27	25	22	20	18	19	22	28	35	43	50	57	61
17	26	26	25	23	22	22	24	29	36	44	53	61	67	71
18	25	26	26	26	25	27	31	37	46	55	64	72	78	82
19	26	28	29	30	31	33	39	47	57	66	75	83	88	93
20	29	32	33	35	38	41	49	58	68	78	87	94	99	103
21	33	37	39	42	46	51	60	69	80	90	98	105	109	112
22	39	44	47	50	55	61	71	81	92	101	109	115	118	121
23	46	51	55	59	65	71	82	93	103	112	119	124	126	129
24	54	59	64	69	75	82	93	104	114	122	128	131	133	135
25	63	68	73	79	86	93	104	115	124	131	135	137	138	139
26	72	78	83	89	96	104	115	124	132	138	141	142	141	141
27	82	87	93	99	106	113	124	132	139	144	144	144	142	141
28	91	96	102	108	115	122	132	139	144	147	146	144	142	140
29	100	105	110	117	123	130	138	143	147	148	146	142	139	137
30	109	113	118	124	130	136	142	146	148	147	144	139	135	132
31	117	120	124	130	135	140	145	147	147	144	139	134	129	126
32	123	126	129	134	138	143	146	146	144	139	133	127	122	118
33	128	130	133	137	140	143	144	143	139	133	126	119	113	109
34	132	133	135	138	140	142	141	138	132	125	117	110	103	99
35	134	134	135	137	138	138	136	131	124	116	107	99	93	89
36	135	134	134	134	135	133	129	123	114	105	96	88	82	78

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 18. Fortsetzung. Vert. Arg. V. Hor. Arg. 1

Arg.	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270
0	75	70	65	57	47	35	24	15	11	12	16	26	38	51
1	64	59	54	46	36	25	15	8	7	10	17	28	41	54
2	54	49	43	35	26	16	8	4	5	10	20	32	46	58
3	44	40	34	26	18	9	3	2	5	12	24	37	52	63
4	36	32	26	19	11	4	1	2	7	17	30	44	58	68
5	29	25	20	14	7	2	1	4	12	24	38	52	65	73
6	24	20	16	10	5	2	3	9	19	32	47	60	72	79
7	20	17	14	9	5	4	7	16	28	42	57	69	79	85
8	18	16	13	9	8	9	15	25	38	53	67	79	87	90
9	18	17	15	12	13	16	24	35	50	65	79	89	95	95
10	20	19	18	17	20	25	35	47	62	77	90	98	102	100
11	24	24	24	24	28	35	47	60	75	89	100	106	108	104
12	29	30	31	33	38	47	60	74	88	101	110	114	114	107
13	36	38	40	43	50	60	73	88	101	113	119	121	118	110
14	44	47	50	54	62	74	87	101	113	123	127	127	121	112
15	54	57	61	66	75	88	101	114	125	132	134	131	123	113
16	64	67	72	79	88	101	114	126	135	139	139	134	124	112
17	74	78	84	91	101	114	126	136	143	144	142	135	124	111
18	85	90	95	103	113	125	136	145	149	148	144	134	122	109
19	96	101	106	114	124	135	145	152	153	150	143	132	119	106
20	106	111	117	125	134	144	152	156	155	150	140	128	114	102
21	116	120	126	134	142	151	157	158	155	148	136	123	108	97
22	124	128	134	141	149	156	159	158	153	143	130	116	102	92
23	131	135	140	146	153	158	159	156	148	136	122	108	95	87
24	136	140	144	150	155	158	157	151	141	128	113	100	88	81
25	140	143	146	151	155	156	153	144	132	118	103	91	81	75
26	142	144	147	151	152	151	145	135	122	107	93	81	73	70
27	142	143	145	148	147	144	136	125	110	95	81	71	65	65
28	140	141	142	143	140	135	125	113	98	83	70	62	58	60
29	136	136	136	136	132	125	113	100	85	71	60	54	52	56
30	131	130	129	127	122	113	100	86	72	59	50	46	46	53
31	124	122	120	117	110	100	87	72	59	47	41	39	42	50
32	116	113	110	106	98	86	73	59	47	37	33	33	39	48
33	106	103	99	94	85	72	59	46	35	28	26	29	37	47
34	96	93	88	81	72	59	46	34	25	21	21	26	36	48
35	86	82	76	69	59	46	34	24	17	16	18	25	36	49
36	75	70	65	57	47	35	24	15	11	12	16	26	38	51

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 18. Schluss. Vert. Arg. V. Hor. Arg. 4

Arg.	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
0	63	70	72	68	60	49	38	29	23	22	23	26	39
1	65	70	70	65	56	44	34	26	22	23	26	30	34
2	67	71	69	62	52	41	31	25	23	25	30	35	40
3	70	72	68	60	49	38	30	26	26	29	35	42	47
4	73	73	68	58	47	37	30	28	30	35	42	50	56
5	76	74	68	57	46	37	32	32	36	42	51	59	65
6	80	76	68	57	46	38	35	37	43	50	60	68	74
7	84	77	68	57	47	41	40	43	51	60	69	77	84
8	87	79	69	58	49	45	46	51	60	70	79	87	93
9	90	81	70	60	52	50	53	60	70	80	89	97	102
10	93	83	72	62	56	56	60	69	80	90	99	106	110
11	95	85	74	65	61	62	68	78	90	100	108	114	118
12	97	86	76	69	66	69	77	88	99	109	116	121	124
13	99	87	78	72	72	76	86	97	108	118	123	127	130
14	100	88	80	76	78	84	95	106	117	125	129	132	133
15	100	89	82	80	84	92	103	114	124	131	134	135	135
16	100	90	84	84	90	99	110	121	130	135	137	136	135
17	99	90	86	88	95	105	117	127	134	137	138	136	133
18	97	90	88	82	100	111	122	131	137	138	137	134	130
19	95	90	90	95	104	116	126	134	138	137	134	130	126
20	93	89	91	98	108	119	129	135	137	135	130	125	120
21	90	88	92	100	111	122	130	134	134	131	125	118	113
22	87	87	92	102	113	123	130	132	130	125	118	110	104
23	84	86	92	103	114	123	128	128	124	118	109	101	95
24	80	84	92	103	114	122	125	123	117	110	100	92	86
25	76	83	92	103	113	119	120	117	109	100	91	83	76
26	73	81	91	102	111	115	114	109	100	90	81	73	67
27	70	79	90	100	108	110	107	100	90	80	71	63	58
28	67	77	88	98	104	104	100	91	80	70	61	54	50
29	65	75	86	95	99	98	92	82	70	60	52	46	43
30	63	74	84	91	94	91	83	72	61	51	44	99	36
31	61	73	82	88	88	84	74	63	52	42	37	33	31
32	60	72	80	84	82	76	65	54	43	35	31	28	27
33	60	71	78	80	76	68	57	46	36	29	26	25	25
34	60	70	76	76	70	61	50	39	30	25	23	24	25
35	61	70	74	72	65	55	43	33	26	23	22	24	27
36	63	70	72	68	60	49	38	29	23	22	23	26	30

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 19. Vert. Arg. VI. Hor. Arg. 1

Arg.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
0	121	122	124	125	127	128	129	128	126	123	118	113	108	103
1	120	121	122	123	124	124	124	122	119	115	109	103	98	93
2	118	118	118	119	119	118	117	115	110	105	99	93	88	83
3	114	114	113	113	113	111	109	106	100	95	88	82	77	72
4	109	108	107	106	105	103	100	96	90	84	77	71	66	61
5	102	101	100	98	96	94	90	85	79	73	65	60	55	51
6	95	94	92	90	87	84	79	74	67	61	54	49	44	41
7	87	85	83	81	77	74	68	62	56	49	43	39	35	32
8	79	76	74	71	67	63	57	51	45	38	33	29	26	24
9	70	67	64	61	57	53	47	41	35	28	24	21	19	18
10	61	58	55	52	47	43	37	31	25	20	16	14	13	13
11	53	49	46	43	38	34	28	22	17	13	10	9	9	10
12	45	41	38	35	30	26	20	15	11	8	6	6	7	8
13	38	34	31	28	23	19	14	10	7	5	4	5	7	9
14	31	28	25	22	18	14	10	7	4	3	4	5	8	11
15	26	23	21	18	14	11	8	5	4	4	6	8	12	15
16	22	20	18	15	12	10	7	5	5	6	9	12	17	21
17	20	18	16	14	12	10	8	8	9	11	15	19	24	28
18	19	18	16	15	13	12	11	12	14	17	22	27	32	37
19	20	19	18	17	16	16	16	18	21	25	31	37	42	47
20	22	22	22	21	21	22	23	25	30	35	41	47	52	57
21	26	26	27	27	27	29	31	34	40	45	52	58	63	68
22	31	32	33	34	35	37	40	44	50	56	63	69	74	79
23	38	39	40	42	44	46	50	55	61	67	75	80	85	89
24	45	46	48	50	53	56	61	66	73	79	86	91	96	99
25	53	55	57	59	63	66	72	78	84	91	97	101	105	108
26	61	64	66	69	73	77	83	89	95	102	107	111	114	116
27	70	73	76	79	83	87	93	99	105	112	116	119	121	122
28	79	82	85	88	93	97	103	109	115	120	124	126	127	127
29	87	91	94	97	102	106	112	118	123	127	130	131	131	130
30	95	99	102	105	110	114	120	125	129	132	134	134	133	132
31	102	106	109	112	117	121	126	130	133	135	136	135	133	131
32	109	112	115	118	122	126	130	133	136	137	136	135	132	129
33	114	117	119	122	126	129	132	135	136	136	134	132	129	125
34	118	120	122	125	128	130	133	135	135	134	131	128	123	119
35	120	122	124	126	128	130	132	132	131	129	125	121	116	112
36	121	122	124	125	127	128	129	128	126	123	118	113	108	103

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 19. Fortsetzung. Vert. Arg. VI. Hor. Arg. 1

Arg.	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270.
0	98	95	91	88	86	82	77	72	67	62	58	56	55	56
1	89	85	82	79	76	73	67	63	58	54	51	50	50	52
2	79	75	72	69	66	63	58	54	50	47	44	44	46	49
3	68	65	62	59	57	54	49	46	42	40	39	39	42	47
4	58	55	53	50	48	45	41	38	35	34	34	35	39	45
5	48	46	44	42	40	37	34	31	29	29	30	32	37	44
6	39	37	36	34	32	29	27	25	25	25	27	31	37	43
7	30	29	28	27	25	23	22	21	22	23	26	31	37	44
8	23	23	22	22	20	19	18	19	20	22	26	32	38	45
9	17	18	18	18	17	16	16	18	20	23	27	34	41	47
10	13	14	15	15	15	15	16	18	21	25	30	37	44	50
11	11	12	14	14	15	16	17	20	23	28	34	41	48	53
12	10	12	14	15	16	18	20	23	27	33	39	46	52	57.
13	11	14	16	18	19	22	24	28	32	38	45	52	57	61
14	14	17	20	22	24	27	30	35	39	45	52	58	63	66
15	19	22	25	28	30	33	37	42	47	53	59	64	69	70
16	25	29	32	35	37	41	45	50	55	61	67	71	74	75
17	33	36	40	43	45	49	54	59	64	70	75	78	80	80
18	42	45	49	52	54	58	63	68	73	78	82	84	85	84
19	51	55	58	61	64	67	73	77	82	86	89	90	90	88
20	61	65	68	71	74	77	82	86	90	93	96	96	94	91.
21	72	75	78	81	83	86	91	94	98	100	101	101	98	93
22	82	85	87	90	92	95	99	102	105	106	106	105	101	95
23	92	94	96	98	100	103	106	109	111	111	110	108	103	96
24	101	103	104	106	108	111	113	115	115	115	113	109	103	97
25	110	111	112	113	115	117	118	119	118	117	114	109	103	96
26	117	117	118	118	120	121	122	121	120	118	114	108	102	96
27	123	122	122	122	123	124	124	122	120	117	113	106	99	93
28	127	126	125	125	125	125	124	122	119	115	110	103	96	90
29	129	128	126	126	125	124	123	120	117	112	106	99	92	87
30	130	128	126	125	124	122	120	117	113	107	101	94	88	83
31	129	126	124	122	121	118	116	112	108	102	95	88	83	79
32	126	123	120	118	116	113	110	105	101	95	88	82	77	74
33	121	118	115	112	110	107	103	98	93	87	81	76	71	70
34	115	111	108	105	103	99	95	90	85	79	73	69	66	65.
35	107	104	100	97	95	91	86	81	76	70	65	62	60	60
36	98	95	91	88	86	82	77	72	67	62	58	56	55	56

Störungen der mittleren Anomalie.

Tafel 19. Schluss. Vert. Arg. VI. Hor. Arg. 1

Arg.	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
0	60	65	72	79	86	91	94	95	94	92	89	85	82
1	57	63	70	78	84	88	90	90	88	85	81	77	73
2	55	62	69	76	81	84	85	84	81	77	72	68	64
3	53	60	67	74	78	80	80	77	74	69	64	59	56
4	52	59	66	71	74	75	74	70	66	61	56	51	48
5	51	58	64	69	71	71	68	63	58	53	48	44	41
6	51	58	63	67	68	66	62	57	51	46	41	37	34
7	51	58	62	64	64	61	57	51	45	40	35	31	29
8	52	58	61	62	61	57	52	45	39	34	30	26	24
9	54	58	60	60	58	53	47	41	35	29	26	23	21
10	56	59	60	69	55	50	43	37	31	26	23	21	19
11	58	60	60	58	53	47	40	34	28	24	22	21	19
12	61	62	61	57	52	45	38	32	27	24	22	22	21
13	64	64	61	57	51	44	37	31	27	25	24	24	24
14	67	66	62	57	50	43	37	32	29	27	27	28	29
15	71	68	63	57	50	44	38	33	31	31	31	33	34
16	74	70	65	58	51	45	39	36	35	36	37	39	41
17	77	73	66	59	52	47	42	40	40	42	44	47	49
18	80	75	68	61	54	49	46	45	46	48	51	55	58
19	83	77	70	62	56	52	50	50	52	55	59	63	67
20	85	78	71	64	59	56	55	56	59	63	68	72	76
21	87	80	73	66	62	60	60	63	66	71	76	81	84
22	88	81	74	69	66	65	66	70	74	79	84	89	92
23	89	82	76	71	69	69	72	77	82	87	92	96	99
24	89	82	77	73	72	74	78	83	89	94	99	103	106
25	89	82	78	76	76	79	83	89	95	100	105	109	111
26	88	82	79	78	79	83	88	95	101	106	110	114	116
27	86	82	80	80	82	87	93	99	105	111	114	117	119
28	84	81	80	81	85	90	97	103	109	114	117	119	121
29	82	80	80	82	87	93	100	106	112	116	118	119	121
30	79	78	79	83	88	95	102	108	113	116	118	118	119
31	76	76	79	83	89	96	103	109	113	115	116	116	116
32	73	74	78	83	90	97	103	108	111	113	113	112	111
33	69	72	77	83	90	96	102	107	109	109	109	107	106
34	66	70	75	82	89	95	101	104	105	104	103	101	99
35	63	67	74	21	88	93	98	100	100	98	96	93	91
36	60	65	72	79	86	91	94	95	94	92	89	85	82

Störungen des Log. des Radius Vectors.

Tafel 20. Arg. 1 Form: $p \sin (P+A)$

Arg.	P	D.	Jährl. Aend.	log p	D.	Jährl. Aend.	Arg.	P	D.	Jährl. Aend.	log p	D.	Jährl. Aend.
0	275° 12′	41	+0,25	2,9489	16	+0,11	200	269° 4′	18	+0,29	2,8298	9	+0,05
4	274 31	42	0,25	505	11	0,11	204	269 22	19	0,29	289	9	0,04
8	273 49	41	0,25	516	8	0,10	208	269 41	19	0,30	280	9	0,04
12	273 8	42	0,25	524	3	0,10	212	270 0	19	0,30	271	8	0,04
16	272 26	42	0,25	527	1	0,09	216	19	19	0,31	263	8	0,04
20	271 44	43	0,26	526	6	0,09	220	38	20	0,31	255	7	0,05
24	271 1	41	0,26	520	9	0,09	224	270 58	21	0,32	248	6	0,05
28	270 20	40	0,26	511	13	0,09	228	271 19	21	0,32	242	6	0,05
32	269 40	39	0,26	498	16	0,09	232	271 40	22	0,33	236	5	0,05
36	269 1	38	0,27	482	20	0,08	236	272 2	24	0,33	231	5	0,05
40	268 23	36	0,27	462	23	0,08	240	272 26	25	0,34	226	4	0,06
44	267 47	34	0,27	439	27	0,08	244	272 51	25	0,34	222	2	0,06
48	267 13	31	0,27	412	31	0,08	248	273 16	26	0,35	220	1	0,06
52	266 42	30	0,28	381	32	0,08	252	273 42	26	0,35	219	1	0,07
56	266 12	28	0,28	349	34	0,08	256	274 8	27	0,36	220	3	0,08
60	265 44	25	0,28	315	37	0,09	260	274 35	28	0,36	223	5	0,08
64	265 19	23	0,28	278	39	0,09	264	275 3	29	0,37	228	8	0,09
68	264 56	20	0,29	239	40	0,09	268	275 32	29	0,37	236	10	0,10
72	264 36	17	0,29	199	41	0,09	272	276 1	29	0,38	246	13	0,11
76	264 19	15	0,30	158	43	0,09	276	276 30	30	0,38	259	17	0,11
80	264 4	13	0,30	115	43	0,09	280	277 0	30	0,38	276	19	0,12
84	263 51	10	0,30	072	44	0,09	284	277 30	29	0,38	295	23	0,12
88	41	7	0,30	2,9028	44	0,09	288	277 59	29	0,37	318	26	0,13
92	34	5	0,30	2,8984	43	0,09	292	278 28	27	0,37	344	29	0,14
96	29	3	0,30	941	43	0,09	296	278 55	25	0,36	373	33	0,15
100	26	0	0,30	898	42	0,10	300	279 20	24	0,36	406	35	0,16
104	26	2	0,29	856	41	0,10	304	279 44	23	0,35	441	38	0,17
108	28	5	0,29	815	40	0,10	308	280 7	21	0,35	479	41	0,17
112	33	6	0,29	775	38	0,10	312	280 28	18	0,34	520	44	0,18
116	39	8	0,29	737	36	0,10	316	280 46	15	0,33	564	46	0,18
120	47	9	0,28	701	35	0,10	320	281 1	12	0,32	610	48	0,19
124	263 56	11	0,28	666	34	0,09	324	13	10	0,31	658	49	0,19
128	264 7	12	0,28	632	32	0,09	328	23	6	0,30	707	52	0,20
132	19	14	0,28	600	29	0,09	332	29	3	0,30	759	54	0,20
136	33	15	0,28	571	28	0,09	336	32	1	0,29	813	54	0,21
140	264 48	16	0,28	543	26	0,09	340	31	4	0,29	867	54	0,21
144	265 4	16	0,28	517	24	0,09	344	27	8	0,28	921	53	0,21
148	20	16	0,28	493	23	0,08	348	19	11	0,28	2,8974	53	0,21
152	36	16	0,28	470	21	0,08	352	281 8	15	0,28	2,9027	52	0,20
156	265 52	17	0,28	449	19	0,08	356	280 53	19	0,28	079	51	0,20
160	266 9	17	0,28	430	18	0,08	360	280 34	21	0,28	130	49	0,19
164	266 26	18	0,29	412	17	0,08	364	280 13	24	0,28	179	46	0,18
168	266 44	17	0,29	395	16	0,08	368	279 49	27	0,27	225	44	0,17
172	267 1	18	0,29	379	14	0,07	372	279 22	29	0,27	269	42	0,16
176	19	17	0,29	365	13	0,07	376	278 53	32	0,26	311	40	0,15
180	36	18	0,29	352	12	0,07	380	278 21	35	0,26	351	35	0,14
184	267 54	17	0,29	340	11	0,07	384	277 46	36	0,25	386	31	0,13
188	268 11	18	0,29	329	11	0,06	388	277 10	38	0,25	417	27	0,13
192	268 29	17	0,29	318	10	0,06	392	276 32	39	0,25	444	24	0,12
196	268 46	18	0,29	308	10	0,05	396	275 53	41	0,25	468	21	0,11
200	269 4		+0,29	2,8298		+0,05	400	275 12		+0,25	2,9489		+0,11

Tafel 21. Ar
Form: $p \sin (P+$

Arg.	P	D.	log p
0	133°,3	1,1	2,164
8	132,2	1,1	65
16	131,1	1,1	65
24	130,0	1,0	65
32	129,0	0,9	63
40	128,1	0,8	60
48	127,3	0,7	55
56	126,6	0,7	49
64	125,9	0,6	42
72	125,3	0,4	34
80	124,9	0,4	26
88	124,5	0,2	16
96	124,3	0,2	2,106
104	124,1	0,0	2,096
112	124,1	0,1	76
120	124,2	0,2	77
128	124,4	0,3	69
136	124,7	0,4	62
144	125,1	0,6	56
152	125,7	0,7	50
160	126,4	0,8	46
168	127,2	1,0	43
176	128,2	1,0	41
184	129,2	1,1	40
192	130,3	1,1	40
200	131,4	1,2	40
208	132,6	1,2	41
216	133,8	1,2	43
224	135,0	1,1	45
232	136,1	1,0	48
240	137,1	0,9	51
248	138,0	0,8	54
256	138,8	0,7	59
264	139,5	0,5	62
272	140,0	0,4	67
280	140,4	0,3	73
288	140,7	0,2	79
296	140,9	0,0	86
304	140,9	0,1	2,093
312	140,8	0,2	2,101
320	140,6	0,3	09
328	140,3	0,4	17
336	139,9	0,4	25
344	139,5	0,6	32
352	138,9	0,7	39
360	138,2	0,8	45
368	137,4	0,9	50
376	136,5	1,0	55
384	135,5	1,1	59
392	134,4	1,1	62
400	133,3		2,164

Störungen des Log. des Radius Vectors.

Tafel 22. Arg. 1.

Mit t zu multipliciren.

Arg.	0	D.	200	D.
0	+1,96	35	−1,64	28
4	1,61	35	1,36	29
8	1,26	35	1,07	30
12	0,91	36	0,77	31
16	0,55	36	0,46	30
20	+0,19	36	−0,16	31
24	−0,17	36	+0,15	31
28	0,53	35	0,46	31
32	0,88	34	0,77	31
36	1,22	34	1,08	30
40	1,56	33	1,38	30
44	1,89	32	1,68	29
48	2,21	31	1,97	29
52	2,52	30	2,26	28
56	2,82	28	2,54	27
60	3,10	27	2,81	27
64	3,37	24	3,08	26
68	3,61	23	3,34	25
72	3,84	21	3,59	23
76	4,05	19	3,82	22
80	4,24	17	4,04	21
84	4,41	16	4,25	19
88	4,57	13	4,44	18
92	4,70	12	4,62	17
96	4,82	9	4,79	15
100	4,91	8	4,94	13
104	4,99	6	5,07	11
108	5,05	4	5,18	9
112	5,09	2	5,27	7
116	5,11	1	5,34	5
120	5,10	2	5,39	3
124	5,08	5	5,42	0
128	5,03	7	5,42	1
132	4,96	8	5,41	4
136	4,88	10	5,37	6
140	4,78	11	5,31	9
144	4,67	13	5,22	10
148	4,54	14	5,12	13
152	4,40	16	4,99	15
156	4,24	18	4,84	17
160	4,06	19	4,67	20
164	3,87	21	4,47	21
168	3,66	21	4,26	23
172	3,45	23	4,03	25
176	3,22	24	3,78	27
180	2,98	26	3,51	28
184	2,72	26	3,23	30
188	2,46	27	2,93	31
192	2,19	27	2,62	32
196	1,92	28	2,30	34
200	−1,64		+1,96	

Tafel 23. Arg. 1.

Mit t_1^2 zu multipliciren.

Arg.	
0	+12
8	12
16	12
24	12
32	12
40	11
48	10
56	9
64	8
72	7
80	6
88	5
96	3
104	+ 1
112	− 1
120	2
128	3
136	4
144	5
152	6
160	7
168	8
176	8
184	9
192	9
200	10
208	10
216	10
224	10
232	10
240	9
248	9
256	8
264	7
272	6
280	5
288	4
296	3
304	− 1
312	+ 1
320	2
328	3
336	4
344	6
352	7
360	8
368	9
376	10
384	11
392	12
400	+12

Tafel 24. Argg. 1, 4

Arg.	1	4
0	13	9
8	13	8
16	12	8
24	11	8
32	10	7
40	9	7
48	8	6
56	7	6
64	5	5
72	4	5
80	3	4
88	3	4
96	2	3
104	2	3
112	2	2
120	3	2
128	3	1
136	4	1
144	4	1
152	5	1
160	5	1
168	5	1
176	5	1
184	5	1
192	5	1
200	5	1
208	5	2
216	4	2
224	3	2
232	2	3
240	2	3
248	1	4
256	1	4
264	0	5
272	0	5
280	0	6
288	0	6
296	1	7
304	1	7
312	2	8
320	3	8
328	4	9
336	6	9
344	7	9
352	8	9
360	10	9
368	12	9
376	13	9
384	13	9
392	13	9
400	13	9

Störungen des Log. des Radius Vectors.

Tafel 25. Arg. 5

Arg.	0	D.	100	D.	200	D.	300	D.
0	529		55		644		187	
		14		11		6		15
2	515		66		638		202	
		16		12		8		16
4	499		78		630		218	
		16		12		8		17
6	483		90		622		235	
		17		12		9		17
8	466		102		613		252	
		17		14		11		18
10	449		116		602		270	
		17		14		12		18
12	432		130		590		288	
		18		15		13		19
14	414		145		577		307	
		18		16		13		19
16	396		161		564		326	
		18		16		14		19
18	378		177		550		345	
		18		17		15		19
20	360		194		535		364	
		18		18		16		20
22	342		212		519		384	
		19		17		16		19
24	323		229		503		403	
		19		18		17		19
26	304		247		486		422	
		18		18		18		19
28	286		265		468		441	
		19		18		19		18
30	267		283		449		459	
		18		19		19		18
32	249		302		430		477	
		18		18		19		17
34	231		320		411		494	
		17		19		19		17
36	214		339		392		511	
		18		19		19		16
38	196		358		373		527	
		17		18		20		15
40	179		376		353		542	
		16		18		19		14
42	163		394		334		556	
		16		18		19		14
44	147		412		315		570	
		15		18		19		12
46	132		430		296		582	
		15		18		19		12
48	117		448		277		594	
		14		17		18		11
50	103		465		259		605	
		13		17		17		10
52	90		482		242		615	
		12		16		17		9
54	78		498		225		624	
		12		16		16		7
56	66		514		209		631	
		10		15		16		7
58	56		529		193		638	
		10		14		15		5
60	46		543		178		643	
		9		14		13		4
62	37		557		165		647	
		8		13		11		3
64	29		570		154		650	
		7		12		11		2
66	22		582		143		652	
		6		12		9		1
68	16		594		134		653	
		5		11		8		0
70	11		605		126		653	
		4		10		6		2
72	7		615		120		651	
		3		9		5		2
74	4		624		115		649	
		2		8		4		3
76	2		632		111		646	
		1		6		2		4
78	1		638		109		642	
		1		6		0		6
80	0		644		109		636	
		1		5		1		7
82	1		649		110		629	
		2		4		3		8
84	3		653		113		621	
		3		3		5		8
86	6		656		118		613	
		5		1		6		10
88	11		657		124		603	
		4		1		7		11
90	15		658		131		592	
		6		1		9		11
92	21		657		140		581	
		7		1		10		12
94	28		656		150		569	
		8		3		11		12
96	36		653		161		557	
		9		4		12		14
98	45		649		173		543	
		10		5		14		14
100	55		644		187		529	

Störungen des Log. des Radius Vectors.

Tafel 26. Vert. Arg. I. Hor. Arg. 1

Arg.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
0	27	29	31	33	34	35	36	36	37	37	37	36	36	34
4	33	35	36	37	37	37	37	36	35	35	33	32	30	28
8	36	37	36	36	35	34	33	31	30	28	26	24	22	20
12	35	34	33	31	29	27	26	24	22	20	18	16	13	11
16	29	27	25	23	21	19	18	15	13	12	10	8	6	5
20	21	19	17	14	12	11	9	8	7	5	4	4	3	3
24	13	11	9	7	6	5	4	4	3	3	3	4	4	6
28	7	5	4	3	3	3	3	4	5	5	7	8	10	12
32	4	3	4	4	5	6	7	9	10	12	14	16	18	20
36	5	6	7	9	11	13	14	16	18	20	22	24	27	29
40	11	13	15	17	18	21	22	25	27	28	30	32	34	35
44	19	21	23	26	28	29	31	32	33	35	36	36	37	37
48	27	29	31	33	34	35	36	36	37	37	37	36	36	34

Tafel 26. Fortsetzung.

Arg.	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270
0	33	31	28	25	22	20	17	16	14	14	13	14	14	14
4	26	23	20	17	15	13	11	11	11	11	12	13	13	14
8	17	15	12	10	9	8	8	8	9	11	12	14	15	16
12	9	8	6	5	5	6	7	9	11	13	15	16	17	18
16	4	4	4	5	6	8	10	13	15	17	19	20	21	21
20	4	5	6	8	11	13	15	18	20	21	23	24	24	24
24	7	9	12	15	18	20	23	24	26	26	27	26	26	26
28	14	17	20	23	25	27	29	29	29	29	28	27	27	26
32	23	25	28	30	31	32	32	32	31	29	28	26	25	24
36	31	32	34	35	35	34	33	31	29	27	25	24	23	22
40	36	36	36	35	34	32	30	27	25	23	21	20	19	19
44	36	35	34	32	29	27	25	22	20	19	17	16	16	16
48	33	31	28	25	22	20	17	16	14	14	13	14	14	14

Tafel 26. Schluss.

Arg.	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
0	14	14	14	13	13	12	11	11	11	12	14	16	18
4	15	15	15	14	14	14	14	15	17	19	21	24	26
8	16	17	17	17	17	18	19	21	23	26	28	31	33
12	19	19	20	20	21	23	24	26	29	31	33	35	36
16	22	22	23	23	25	26	28	30	32	33	35	35	35
20	24	24	25	26	27	28	30	31	32	32	32	31	30
24	26	26	26	27	27	28	29	29	29	28	26	24	22
28	25	25	25	26	26	26	26	25	23	21	19	16	14
32	24	23	23	23	23	22	21	19	17	14	12	9	7
36	21	21	20	20	19	17	16	14	11	9	7	5	4
40	18	18	17	17	15	14	12	10	8	7	5	5	5
44	16	16	15	14	13	12	10	9	8	8	8	9	10
48	14	14	14	13	13	12	11	11	11	12	14	16	18

Störungen des Log. des Radius Vectors.

Tafel 27. Vert. Arg. II. Hor. Arg. 1

Arg.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
0	6	8	9	11	12	14	15	15	16	16	16	15	15	14
4	10	12	13	15	16	16	17	17	17	16	15	14	13	12
8	14	15	16	17	18	18	17	17	16	15	13	12	11	10
12	17	18	18	18	17	17	16	14	13	12	11	10	9	8
16	18	18	17	16	15	14	13	11	10	9	8	7	7	7
20	17	16	15	13	12	10	9	8	7	6	5	5	5	6
24	14	12	11	9	8	6	5	5	4	4	4	5	5	6
28	10	8	7	5	4	4	3	3	3	4	5	6	7	8
32	6	3	4	3	2	2	3	3	4	5	7	8	9	10
36	3	2	2	2	3	3	4	6	7	8	9	10	11	12
40	2	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	13	13
44	3	4	5	7	8	10	11	12	13	14	15	15	15	14
48	6	8	9	11	12	14	15	15	16	16	16	15	15	14

Tafel 27. Fortsetzung.

Arg.	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270
0	13	12	11	11	10	10	10	10	11	11	12	13	13	14
4	12	11	10	10	10	10	10	10	11	12	12	13	13	14
8	10	9	9	9	9	9	10	10	11	12	12	12	12	12
12	8	8	8	8	9	9	10	10	11	11	11	11	11	10
16	7	7	7	8	9	9	10	10	11	11	10	10	9	[illegible]
20	6	7	8	8	9	10	10	10	10	10	9	8	8	7
24	7	8	9	9	10	10	10	10	9	9	8	7	7	6
28	8	9	10	10	10	10	10	10	9	8	8	7	7	6
32	10	11	11	11	11	11	10	10	9	8	8	8	8	8
36	12	12	12	12	11	11	10	10	9	9	9	9	9	10
40	13	13	13	12	11	11	10	10	9	9	10	10	11	12
44	14	13	12	12	11	10	10	10	10	10	11	12	12	13
48	13	12	11	11	10	10	10	10	11	11	12	13	13	14

Tafel 27. Schluss.

Arg.	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
0	15	15	15	15	14	13	12	11	10	8	7	5	[illegible]
4	14	14	13	12	11	10	9	7	6	5	3	3	[illegible]
8	12	11	10	9	8	7	6	4	3	3	2	2	[illegible]
12	10	9	8	6	5	4	3	3	2	2	3	4	[illegible]
16	7	6	5	4	4	3	3	3	4	4	6	7	[illegible]
20	6	5	4	4	4	4	5	5	7	8	9	11	[illegible]
24	5	5	5	5	6	7	8	9	10	12	13	15	[illegible]
28	6	6	7	8	9	10	11	13	14	15	17	17	[illegible]
32	8	9	10	11	12	13	14	16	17	17	18	18	[illegible]
36	10	11	12	14	15	16	17	17	18	18	17	16	[illegible]
40	13	14	15	16	16	17	17	17	16	16	14	13	[illegible]
44	14	15	16	16	16	16	15	15	13	12	11	9	[illegible]
48	15	15	15	15	14	13	12	11	10	8	7	5	[illegible]

Störungen des Log. des Radius Vectors.

Tafel 28. Vert. Arg. VII. Hor. Arg. I

Arg.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
0	18	12	8	5	4	5	7	11	17	24	31	40	48	55
1	14	9	6	4	5	7	11	16	23	31	38	47	55	62
2	11	7	6	5	7	11	16	22	30	38	46	55	62	69
3	9	7	7	8	11	16	22	29	38	46	55	63	69	75
4	9	8	9	12	16	22	29	37	46	54	64	70	76	81
5	10	10	13	17	23	30	37	45	54	63	71	77	82	86
6	12	14	18	23	30	38	46	54	63	71	78	83	88	90
7	16	19	25	31	38	46	55	63	71	78	84	89	92	93
8	21	26	32	39	47	55	64	72	79	85	90	94	95	95
9	27	33	40	47	56	64	72	80	86	91	95	97	97	96
10	34	41	48	56	64	73	80	87	92	96	99	99	98	95
11	41	49	57	65	73	81	87	93	97	100	101	100	97	93
12	49	57	65	73	81	88	94	98	101	102	102	99	95	90
13	57	65	73	81	89	94	99	102	103	103	101	97	92	86
14	65	73	81	88	95	99	103	104	104	102	99	94	88	81
15	73	81	88	94	100	103	105	105	104	100	96	90	82	75
16	80	87	94	99	103	105	106	105	102	97	91	84	76	69
17	87	93	99	103	105	106	105	103	98	92	85	78	69	62
18	92	98	102	105	106	105	103	99	93	86	79	70	62	55
19	96	101	104	106	105	103	99	94	87	79	72	63	55	48
20	99	103	104	105	103	99	94	88	80	72	64	55	48	41
21	101	103	103	102	99	94	88	81	72	64	55	47	41	35
22	102	102	101	98	94	88	81	73	64	56	46	40	34	29
23	100	100	97	93	87	80	73	65	56	47	39	33	28	24
24	98	96	92	87	80	72	64	56	47	39	32	27	22	20
25	94	91	85	79	72	64	55	47	39	32	26	21	18	17
26	89	84	78	71	63	55	46	38	31	25	20	16	15	15
27	83	77	70	63	54	46	38	30	24	19	15	13	13	14
28	76	69	62	54	46	37	30	23	18	14	11	11	12	15
29	69	61	53	45	37	29	23	17	13	10	9	10	13	17
30	61	53	45	37	29	22	16	12	9	8	8	11	15	20
31	53	45	37	29	21	16	11	8	7	7	9	13	18	24
32	45	37	29	22	15	11	7	6	6	8	11	16	22	29
33	37	29	22	16	10	7	5	5	6	10	14	20	28	35
34	30	23	16	11	7	5	4	5	8	13	19	26	34	41
35	23	17	11	7	5	4	5	7	12	18	24	32	41	48
36	18	12	8	5	4	5	7	11	17	24	31	40	48	55

Störungen des Log. des Radius Vectors.

Tafel 28. Fortsetzung. Vert. Arg. VII. Hor. Arg. I

Arg.	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270
0	62	68	73	75	77	76	75	73	70	66	62	58	55	52
1	69	74	77	78	79	78	76	73	69	65	61	58	54	52
2	75	79	81	81	81	79	76	72	68	64	60	57	54	52
3	80	83	84	83	82	79	75	71	67	63	59	56	53	52
4	85	86	86	85	82	78	74	70	65	61	57	55	53	53
5	89	88	87	85	81	77	72	68	63	59	56	54	53	53
6	91	90	88	84	80	75	70	65	61	57	54	53	53	53
7	93	91	87	82	78	73	67	62	59	55	53	52	52	53
8	93	90	85	80	75	70	64	59	56	53	52	51	52	54
9	93	88	82	77	71	66	61	56	53	51	50	50	52	54
10	91	85	79	73	67	62	57	53	51	49	49	50	52	55
11	88	81	75	69	63	58	53	50	48	47	48	49	52	55
12	84	77	70	64	58	54	50	47	46	46	47	49	52	56
13	79	72	65	59	53	50	46	44	44	45	46	49	52	56
14	73	66	59	53	49	46	43	42	42	44	46	49	53	57
15	67	60	53	48	44	42	40	40	41	43	46	49	53	57
16	61	54	48	43	40	39	38	39	40	43	47	50	54	57
17	54	48	42	39	36	36	36	38	40	43	47	51	54	56
18	48	42	37	35	33	34	35	37	40	44	48	52	55	58
19	41	36	33	32	31	32	34	37	41	45	49	52	56	58
20	35	31	29	29	29	31	34	38	42	46	50	53	56	59
21	30	27	26	27	28	31	35	39	43	47	51	54	57	58
22	25	24	24	25	28	32	36	40	45	49	53	55	57	57
23	21	22	23	25	29	33	38	42	47	51	54	56	57	57
24	19	20	22	26	30	35	40	45	49	53	56	57	57	57
25	17	19	23	28	32	37	43	48	51	55	57	58	58	57
26	17	20	25	30	35	40	46	51	54	57	58	59	58	56
27	17	22	28	33	39	44	49	54	57	59	60	60	58	56
28	19	25	31	37	43	48	53	57	59	61	61	60	58	55
29	22	29	35	41	47	52	57	60	62	63	62	61	58	55
30	26	33	40	46	52	56	60	63	64	64	63	61	58	54
31	31	38	45	51	57	60	64	66	66	65	64	61	58	54
32	37	44	51	57	61	64	67	68	68	66	64	61	57	53
33	43	50	57	62	66	68	70	70	69	67	64	61	57	53
34	49	56	62	67	70	71	72	71	70	67	63	60	56	53
35	56	62	68	71	74	74	74	72	70	67	63	59	56	52
36	62	68	73	75	77	76	75	73	70	66	62	58	55	52

Störungen des Log. des Radius Vectors.

Tafel 28. Schluss. Vert. Arg. VII. Hor. Arg. 1

280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
51	50	51	54	57	62	68	75	82	88	94	98	101
51	51	53	57	61	66	72	79	85	90	96	99	100
52	53	55	59	64	69	76	82	88	92	96	98	98
53	54	57	62	67	72	78	85	90	93	95	96	95
54	56	59	64	69	75	80	86	90	92	93	93	90
55	58	61	66	71	77	81	86	89	91	90	89	85
56	59	63	68	73	78	82	85	87	88	86	83	78
57	60	64	69	74	78	82	84	84	84	81	77	70
57	61	66	70	74	78	81	82	81	79	75	69	62
58	62	67	71	74	77	79	79	77	73	68	62	54
59	63	67	71	74	76	76	75	72	67	61	54	46
60	64	67	70	73	74	73	71	67	61	54	46	38
60	64	67	69	71	71	69	66	61	54	47	39	31
60	64	66	68	69	68	65	61	55	47	40	32	25
60	63	65	66	66	64	60	55	49	41	34	26	19
60	63	64	64	63	60	56	49	43	35	28	21	14
60	62	63	62	59	56	51	44	37	30	23	17	11
60	61	61	59	56	52	46	39	32	26	19	14	9
59	60	59	56	53	48	42	35	28	22	16	12	9
59	59	57	53	49	44	38	31	25	20	14	11	10
58	57	55	51	46	41	34	28	22	18	14	12	12
57	56	53	48	43	38	32	25	20	17	15	14	15
56	54	51	46	41	35	30	24	20	18	17	17	20
55	52	49	44	39	33	29	24	21	19	90	21	25
54	51	47	42	37	32	28	25	23	22	24	27	32
53	50	46	41	36	32	28	26	26	26	29	33	40
53	49	44	40	36	32	29	28	29	31	35	41	48
52	48	43	39	36	33	31	31	33	37	42	48	56
51	47	43	39	36	34	34	35	38	43	49	56	64
50	46	43	40	37	36	37	39	43	49	56	64	72
50	46	43	41	39	39	41	44	49	56	63	71	79
50	46	44	42	41	42	45	49	55	63	70	78	85
50	47	45	44	44	46	50	55	61	69	76	84	91
50	47	46	46	47	50	54	61	67	75	82	89	96
50	48	47	48	51	54	59	66	73	80	87	93	99
50	49	49	51	54	58	64	71	78	84	91	96	101
51	50	51	54	57	62	68	75	82	88	94	98	101

Störungen des Log. des Radius Vectors.

Tafel 28. Fortsetzung. Vert. Arg. VII. Hor. Arg. 1

Arg.	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270
0	62	68	73	75	77	76	75	73	70	66	62	58	55	52
1	69	74	77	78	79	78	76	73	69	65	61	58	54	52
2	75	79	81	81	81	79	76	72	68	64	60	57	54	52
3	80	83	84	83	62	79	75	71	67	63	59	56	53	52
4	85	86	86	85	82	78	74	70	65	61	57	55	53	53
5	89	88	87	85	81	77	72	68	63	59	56	54	53	53
6	91	90	88	84	80	75	70	65	61	57	54	53	53	53
7	93	91	87	82	78	73	67	62	59	55	53	52	52	53
8	93	90	85	80	75	70	64	59	56	53	52	51	52	54
9	93	88	82	77	71	66	61	56	53	51	50	50	52	54
10	91	85	79	73	67	62	57	53	51	49	49	50	52	55
11	88	81	75	69	63	58	53	50	48	47	48	49	52	55
12	84	77	70	64	58	54	50	47	46	46	47	49	52	56
13	79	72	65	59	53	50	46	44	44	45	46	49	52	56
14	73	66	59	53	49	46	43	42	42	44	46	49	53	57
15	67	60	53	48	44	42	40	40	41	43	46	49	53	57
16	61	54	48	43	40	39	38	39	40	43	47	50	54	57
17	54	48	42	39	36	36	36	38	40	43	47	51	54	58
18	48	42	37	35	33	34	35	37	40	44	48	52	55	58
19	41	36	33	32	31	32	34	37	41	45	49	52	56	58
20	35	31	29	29	29	31	34	38	42	46	50	53	56	59
21	30	27	26	27	28	31	35	39	43	47	51	54	57	58
22	25	24	24	25	28	32	36	40	45	49	53	55	57	57
23	21	22	23	25	29	33	38	42	47	51	54	56	57	57
24	19	20	22	26	30	35	40	45	49	53	56	57	57	57
25	17	19	23	28	32	37	43	48	51	55	57	58	58	57
26	17	20	25	30	35	40	46	51	54	57	58	59	58	56
27	17	22	28	33	39	44	49	54	57	59	60	60	58	56
28	19	25	31	37	43	48	53	57	59	61	61	60	58	55
29	22	29	35	41	47	52	57	60	62	63	62	61	58	55
30	26	33	40	46	52	56	60	63	64	64	63	61	58	54
31	31	38	45	51	57	60	64	66	66	65	64	61	58	54
32	37	44	51	57	61	64	67	68	68	66	64	61	57	53
33	43	50	57	62	66	68	70	70	69	67	64	61	57	53
34	49	56	62	67	70	71	72	71	70	67	63	60	56	53
35	56	62	68	71	74	74	74	72	70	67	63	59	56	52
36	62	68	73	75	77	76	75	73	70	66	62	58	55	52

Störungen des Log. des Radius Vectors.

Tafel 29. Schluss. Vert. Arg. VIII. Hor. Arg. 1

Arg.	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
0	29	25	20	16	12	9	6	4	4	4	5	6	8
1	24	20	16	12	9	6	5	5	5	7	9	11	13
2	20	15	12	9	7	6	6	7	9	11	14	16	19
3	15	11	9	7	6	7	8	11	13	16	19	22	25
4	11	8	7	7	8	10	12	15	19	22	25	28	31
5	8	7	7	8	11	14	17	21	24	28	31	33	35
6	6	7	9	11	15	18	22	26	30	32	35	36	37
7	6	8	11	15	19	23	27	31	34	36	37	37	37
8	8	11	15	20	24	28	31	34	36	37	37	37	36
9	11	15	20	24	28	31	34	36	36	36	35	34	32
10	16	20	24	28	31	34	35	35	35	33	31	29	27
11	20	25	28	31	33	34	34	33	31	29	26	24	21
12	25	29	31	33	34	33	32	29	27	24	21	18	15
13	29	32	33	33	32	30	28	25	21	18	15	12	9
14	32	33	33	32	29	26	23	19	16	12	9	7	5
15	34	33	31	29	25	22	18	14	10	8	5	4	3
16	34	32	29	25	21	15	13	9	6	4	3	3	3
17	32	29	25	20	16	12	9	6	4	3	3	3	4
18	29	25	20	16	12	9	6	4	4	4	5	6	8

Tafel 30. Vert. Arg. IX. Hor. Arg. 1

Arg.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
0	20	21	23	25	27	29	31	33	35	36	36	36	36	34
1	25	26	28	29	30	31	31	32	33	33	33	33	31	30
2	29	30	30	30	30	29	29	28	28	27	26	25	24	23
3	31	31	30	29	28	26	24	22	21	19	18	17	16	15
4	30	29	27	26	23	21	18	15	13	11	10	9	8	8
5	26	25	23	20	18	15	13	10	8	6	5	4	4	5
6	20	19	17	15	13	11	9	7	5	4	4	4	4	6
7	15	14	12	11	10	9	9	8	7	7	7	7	9	10
8	11	10	10	10	10	11	11	12	12	13	14	15	16	17
9	9	9	10	11	12	14	16	18	19	21	22	22	24	25
10	10	11	13	14	17	19	22	25	27	29	30	31	32	32
11	14	15	17	20	22	25	27	30	32	34	35	36	36	35
12	20	21	23	25	27	29	31	33	35	36	36	36	36	34

[illegible] des Log. des Radius Vectors.

Vert. Arg. IX. Hor. Arg. [illegible]

[illegible]	190	200	210	220	230	240	250	260	270
[illegible]	19	17	15	14	14	14	14	15	15
[illegible]	14	12	11	10	11	11	12	14	16
[illegible]	11	10	9	9	10	11	13	15	17
[illegible]	10	10	10	11	12	13	15	17	19
[illegible]	12	12	14	15	16	17	19	20	22
[illegible]	16	17	19	20	21	21	23	23	24
[illegible]	21	23	25	26	26	26	26	25	25
[illegible]	26	28	29	30	29	29	28	26	24
[illegible]	29	30	31	31	30	29	27	25	23
30	30	30	30	29	28	27	25	23	21
29	28	28	26	25	24	23	21	20	18
26	24	23	21	20	19	19	17	17	16
22	19	17	15	14	14	14	14	15	15

[illegible]	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
[illegible]	20	22	24	25	27	28	29	30	30	29
[illegible]	22	24	25	26	26	27	27	27	26	25
[illegible]	24	24	25	25	24	24	23	22	21	19
[illegible]	24	24	23	22	21	20	18	16	15	14
24	23	22	21	19	18	16	14	12	11	10
[illegible]	22	20	19	17	15	13	11	10	9	9
21	20	18	16	15	13	12	11	10	10	11
19	18	16	15	14	14	13	13	13	14	15
[illegible]	16	16	15	15	16	16	17	18	19	21
16	16	16	17	18	19	20	22	24	25	26
16	17	18	19	21	22	24	26	28	29	30
[illegible]	18	20	21	23	25	27	29	30	31	31
19	20	22	24	25	27	28	29	30	30	29

Störungen der dritten Coordinate.

Tafel 31. Arg. 1 Form der Ungleichheit: $p \sin(P + A)$

P	D.	Jährl. Aend.	log *p*	D.	Jährl. Aend.	Arg.	*P*	D.	Jährl. Aend.	log *p*	D.	Jährl. Aend.
243° 49′		−1,24	2,5457		−1,71	100	260° 36′		−0,52	2,6246		−0,74
	18			31				9			33	
244 7		1,19	426		1,76	102	27		0,55	279		0,76
	20			30				11			31	
244 27		1,14	396		1,81	104	16		0,57	310		0,78
	21			29				12			31	
244 48		1,09	367		1,85	106	260 4		0,59	341		0,80
	23			27				14			30	
245 11		1,03	340		1,88	108	259 50		0,61	371		0,82
	25			26				14			28	
245 36		0,97	314		1,91	110	36		0,63	399		0,85
	26			24				14			27	
246 2		0,91	290		1,93	112	22		0,65	426		0,88
	28			22				14			26	
246 30		0,85	268		1,95	114	259 8		0,67	452		0,91
	29			21				15			25	
246 59		0,79	247		1,96	116	258 53		0,69	477		0,94
	30			18				16			23	
247 29		0,73	229		1,96	118	37		0,71	500		0,97
	32			16				16			22	
248 1		0,66	213		1,95	120	21		0,72	522		1,01
	33			13				17			20	
248 34		0,60	200		1,94	122	258 4		0,73	542		1,04
	35			11				17			20	
249 9		0,53	189		1,93	124	257 47		0,73	562		1,08
	36			8				18			19	
249 45		0,46	181		1,91	126	29		0,74	581		1,11
	35			5				18			17	
250 20		0,40	176		1,88	128	257 11		0,75	598		1,15
	36			2				18			16	
250 56		0,34	174		1,85	130	256 53		0,76	614		1,19
	36			2				19			15	
251 32		0,29	176		1,81	132	34		0,77	629		1,24
	36			4				19			13	
252 8		0,24	180		1,76	134	256 15		0,77	642		1,28
	36			7				20			12	
252 44		0,19	187		1,71	136	255 55		0,78	654		1,33
	36			10				20			11	
253 20		0,15	197		1,66	138	35		0,78	665		1,37
	35			14				20			10	
253 55		0,11	211		1,61	140	255 15		0,78	675		1,41
	35			16				20			9	
254 30		0,07	227		1,55	142	254 55		0,78	684		1,45
	34			18				20			7	
255 4		0,04	245		1,49	144	35		0,78	691		1,50
	33			21				19			7	
255 37		−0,02	266		1,43	146	254 16		0,77	698		1,54
	32			23				20			5	
056 9		0,00	289		1,36	148	253 56		0,77	703		1,57
	31			26				20			4	
256 40		+0,01	315		1,30	150	36		0,76	707		1,61
	29			29				20			3	
257 9		0,02	344		1,24	152	253 16		0,75	710		1,65
	28			30				20			3	
257 37		0,02	374		1,18	154	252 56		0,74	713		1,69
	26			33				19			1	
258 3		0,02	407		1,12	156	37		0,73	714		1,72
	24			33				20			0	
258 27		0,02	440		1,06	158	252 17		0,71	714		1,76
	23			35				19			1	
258 50		+0,01	475		1,01	160	251 58		0,69	713		1,79
	21			37				19			2	
259 11		−0,01	512		0,96	162	39		0,67	711		1,83
	20			38				18			3	
259 31		0,03	550		0,91	164	21		0,65	708		1,86
	18			39				18			4	
259 49		0,05	589		0,87	166	251 3		0,62	704		1,89
	16			39				18			5	
260 5		0,07	628		0,84	168	250 45		0,59	699		1,92
	14			40				18			6	
19		0,10	668		0,80	170	27		0,57	693		1,95
	12			40				17			7	
31		0,12	708		0,77	172	250 10		0,54	686		1,97
	11			41				17			7	
42		0,15	749		0,75	174	249 53		0,51	679		2,00
	8			41				17			8	
50		0,17	790		0,73	176	36		0,48	671		2,03
	7			41				16			9	
260 57		0,20	831		0,71	178	20		0,45	662		2,05
	5			41				16			9	
261 2		0,23	872		0,70	180	249 4		0,42	653		2,07
	4			40				15			10	
6		0,26	912		0,69	182	248 49		0,39	643		2,09
	2			39				15			11	
8		0,29	951		0,68	184	34		0,35	632		2,11
	1			39				14			11	
9		0,32	2,5990		0,68	186	20		0,31	621		2,12
	1			39				14			12	
8		0,35	2,6029		0,68	188	248 6		0,27	609		2,13
	2			38				13			12	
6		0,38	067		0,69	190	247 53		0,24	597		2,14
	4			38				13			13	
261 2		0,41	105		0,70	192	40		0,20	584		2,15
	4			36				12			13	
260 58		0,43	141		0,71	194	28		0,16	571		2,15
	6			36				11			14	
52		0,46	177		0,72	196	17		0,11	557		2,15
	7			35				11			14	
45		0,49	212		0,73	198	247 6		0,07	543		2,15
	9			34				10			15	
260 36		−0,52	2,6246		−0,74	200	246 56		−0,02	2,6528		−2,14

Störungen der dritten Coordinate.

Tafel 31. Schluss. Arg. I Form: $p \sin (P+A)$

Arg.	P	D.	Jährl. Aend.	log p	D.	Jährl. Aend.
200	246° 56'		—0,02	2,6528		—2,14
		9			15	
202	47		+0,02	513		2,13
		9			15	
204	38		0,07	498		2,12
		8			15	
206	30		0,12	483		2,11
		8			14	
208	22		0,17	469		2,09
		7			16	
210	15		0,23	453		2,07
		7			15	
212	8		0,28	438		2,04
		6			15	
214	246 2		0,33	423		2,01
		5			15	
216	245 57		0,37	408		1,98
		4			15	
218	53		0,42	393		1,95
		4			15	
220	49		0,46	378		1,91
		2			15	
222	47		0,51	363		1,87
		2			15	
224	45		0,55	348		1,82
		2			14	
226	43		0,59	334		1,77
		1			14	
228	42		0,63	320		1,72
		1			14	
230	41		0,67	306		1,66
		0			13	
232	41		0,70	293		1,60
		1			13	
234	42		0,73	280		1,54
		1			12	
236	43		0,76	268		1,47
		2			11	
238	45		0,80	257		1,41
		2			11	
240	47		0,84	246		1,34
		2			10	
242	49		0,86	236		1,27
		3			10	
244	52		0,88	226		1,20
		3			9	
246	55		0,90	217		1,13
		4			8	
248	245 59		0,91	209		1,05
		4			8	
250	246 3		0,92	201		0,98
		5			7	
252	8		0,93	194		0,90
		4			6	
254	12		0,94	188		0,82
		4			6	
256	16		0,94	182		0,74
		5			5	
258	21		0,94	177		0,66
		5			4	
260	26		0,94	173		0,59
		5			3	
262	31		0,93	170		0,51
		4			3	
264	35		0,92	167		0,44
		5			2	
266	40		0,91	165		0,36
		4			1	
268	44		0,89	164		0,28
		4			0	
270	48		0,87	164		0,21
		4			0	
272	52		0,84	164		0,13
		4			1	
274	246 56		0,81	165		—0,06
		4			1	
276	247 0		0,78	166		+0,01
		3			2	
278	3		0,75	168		0,08
		3			2	
280	6		0,71	170		0,14
		3			3	
282	9		0,67	173		0,20
		2			3	
284	11		0,63	176		0,25
		1			4	
286	12		0,58	180		0,30
		1			4	
288	13		0,53	184		0,35
		1			4	
290	14		0,48	188		0,40
		1			4	
292	15		0,43	192		0,44
		1			4	
294	14		0,38	196		0,48
		1			5	
296	13		0,33	201		0,52
		1			4	
298	12		0,27	205		0,55
		1			5	
300	247 11		+0,21	2,6210		+0,58

Arg.	P	D.	Jährl. Aend.	log p	D.	Jährl. Aend.
300	247° 11'		+0,21	2,6210		[illegible]
		2			4	
302	9		0,15	214		[illegible]
		3			4	
304	6		0,09	218		[illegible]
		3			4	
306	247 3		+0,03	222		[illegible]
		4			4	
308	246 59		—0,04	226		[illegible]
		5			3	
310	54		0,10	229		[illegible]
		6			3	
312	48		0,16	232		[illegible]
		5			3	
314	43		0,22	235		[illegible]
		6			2	
316	37		0,28	237		[illegible]
		7			1	
318	30		0,34	238		[illegible]
		8			1	
320	22		0,40	239		[illegible]
		8			0	
322	14		0,46	239		[illegible]
		8			1	
324	246 6		0,52	238		[illegible]
		9			2	
326	245 57		0,59	236		[illegible]
		9			2	
328	48		0,65	234		[illegible]
		9			4	
330	39		0,71	230		[illegible]
		10			4	
332	29		0,77	226		[illegible]
		10			6	
334	19		0,82	220		[illegible]
		10			6	
336	245 9		0,87	214		[illegible]
		10			7	
338	244 59		0,92	207		[illegible]
		11			9	
340	48		0,97	198		[illegible]
		10			10	
342	38		1,02	188		[illegible]
		11			11	
344	27		1,07	177		[illegible]
		11			12	
346	16		1,12	165		[illegible]
		10			13	
348	244 6		1,16	152		[illegible]
		10			14	
350	243 56		1,20	138		[illegible]
		10			15	
352	46		1,23	123		[illegible]
		10			17	
354	36		1,27	106		—0,07
		10			18	
356	26		1,30	088		0,13
		9			19	
358	17		1,34	069		0,20
		9			21	
360	8		1,37	048		0,27
		8			21	
362	243 0		1,40	027		0,34
		8			23	
364	242 52		1,43	2,6004		0,41
		6			23	
366	46		1,45	2,5961		0,49
		6			25	
368	40		1,47	956		0,56
		5			26	
370	35		1,49	930		0,64
		5			28	
372	30		1,50	902		0,71
		3			29	
374	27		1,51	873		0,79
		3			30	
376	24		1,51	843		0,86
		1			31	
378	23		1,51	812		0,94
		0			31	
380	23		1,51	781		1,01
		2			32	
382	25		1,50	749		1,08
		3			32	
384	28		1,49	717		1,15
		5			32	
386	33		1,47	685		1,23
		6			33	
388	39		1,44	652		1,30
		8			33	
390	47		1,42	619		1,38
		8			33	
392	242 55		1,39	586		1,45
		11			33	
394	243 6		1,36	553		1,52
		13			32	
396	19		1,33	521		1,58
		14			32	
398	33		1,29	489		1,65
		16			32	
400	243 49		—1,24	2,5457		—1,71

Störungen der dritten Coordinate.

Tafel 31. Arg. 1 Form der Ungleichheit: $p \sin(P + A)$

Arg.	P	D.	Jährl. Aend.	log p	D.	Jährl. Aend.	Arg	P	D.	Jährl. Aend.	log p	D.	Jährl. Aend.
0	243° 49′	18	−1,24	2,5457	31	−1,71	100	260° 36′	9	−0,52	2,6246	33	−0,74
2	244 7	20	1,19	426	30	1,76	102	27	11	0,55	279	31	0,76
4	244 27	21	1,14	396	29	1,81	104	16	12	0,57	310	31	0,78
6	244 48	23	1,09	367	27	1,85	106	260 4	14	0,59	341	30	0,80
8	245 11	25	1,03	340	26	1,88	108	259 50	14	0,61	371	28	0,82
10	245 36	26	0,97	314	24	1,91	110	36	14	0,63	399	27	0,85
12	246 2	28	0,91	290	22	1,93	112	22	14	0,65	426	26	0,88
14	246 30	29	0,85	268	21	1,95	114	259 8	15	0,67	452	25	0,91
16	246 59	30	0,79	247	18	1,96	116	258 53	16	0,69	477	23	0,94
18	247 29	32	0,73	229	16	1,96	118	37	16	0,71	500	22	0,97
20	248 1	33	0,66	213	13	1,95	120	21	17	0,72	522	20	1,01
22	248 34	35	0,60	200	11	1,94	122	258 4	17	0,73	542	20	1,04
24	249 9	36	0,53	189	8	1,93	124	257 47	18	0,73	562	19	1,08
26	249 45	35	0,46	181	5	1,91	126	29	18	0,74	581	17	1,11
28	250 20	36	0,40	176	2	1,88	128	257 11	18	0,75	598	16	1,15
30	250 56	36	0,34	174	2	1,85	130	256 53	19	0,76	614	15	1,19
32	251 32	36	0,29	176	4	1,81	132	34	19	0,77	629	13	1,24
34	252 8	36	0,24	180	7	1,76	134	256 15	20	0,77	642	12	1,28
36	252 44	36	0,19	187	10	1,71	136	255 55	20	0,78	654	11	1,33
38	253 20	35	0,15	197	14	1,66	138	35	20	0,78	665	10	1,37
40	253 55	35	0,11	211	16	1,61	140	255 15	20	0,78	675	9	1,41
42	254 30	34	0,07	227	18	1,55	142	254 55	20	0,78	684	7	1,45
44	255 4	33	0,04	245	21	1,49	144	35	19	0,78	691	7	1,50
46	255 37	32	−0,02	266	23	1,43	146	254 16	20	0,77	698	5	1,54
48	056 9	31	0,00	289	26	1,36	148	253 56	20	0,77	703	4	1,57
50	256 40	29	+0,01	315	29	1,30	150	36	20	0,76	707	3	1,61
52	257 9	28	0,02	344	30	1,24	152	253 16	20	0,75	710	3	1,65
54	257 37	26	0,02	374	33	1,18	154	252 56	19	0,74	713	1	1,69
56	258 3	24	0,02	407	33	1,12	156	37	20	0,73	714	0	1,72
58	258 27	23	0,02	440	35	1,06	158	252 17	19	0,71	714	1	1,76
60	258 50	21	+0,01	475	37	1,01	160	251 58	19	0,69	713	2	1,79
62	259 11	20	−0,01	512	38	0,96	162	39	18	0,67	711	3	1,83
64	259 31	18	0,03	550	39	0,91	164	21	18	0,65	708	4	1,86
66	259 49	16	0,05	589	39	0,87	166	251 3	18	0,62	704	5	1,89
68	260 5	14	0,07	628	40	0,84	168	250 45	18	0,59	699	6	1,92
70	19	12	0,10	668	40	0,80	170	27	17	0,57	693	7	1,95
72	31	11	0,12	708	41	0,77	172	250 10	17	0,54	686	7	1,97
74	42	8	0,15	749	41	0,75	174	249 53	17	0,51	679	8	2,00
76	50	7	0,17	790	41	0,73	176	36	16	0,48	671	9	2,03
78	260 57	5	0,20	831	41	0,71	178	20	16	0,45	662	9	2,05
80	261 2	4	0,23	872	40	0,70	180	249 4	15	0,42	653	10	2,07
82	6	2	0,26	912	39	0,69	182	248 49	15	0,39	643	11	2,09
84	8	1	0,29	951	39	0,68	184	34	14	0,35	632	11	2,11
86	9	1	0,32	2,5990	39	0,68	186	20	14	0,31	621	12	2,12
88	8	2	0,35	2,6029	38	0,68	188	248 6	13	0,27	609	12	2,13
90	6	4	0,38	067	38	0,69	190	247 53	13	0,24	597	13	2,14
92	261 2	4	0,41	105	36	0,70	192	40	12	0,20	584	13	2,15
94	260 58	6	0,43	141	36	0,71	194	28	11	0,16	571	14	2,15
96	52	7	0,46	177	35	0,72	196	17	11	0,11	557	14	2,15
98	45	9	0,49	212	34	0,73	198	247 6	10	0,07	543	15	2,15
100	260 36		−0,52	2,6246		−0,74	200	246 56		−0,02	6528		−2,14

Störungen der dritten Coordinate.

Tafel 33. Arg. 1. Form: $p \sin (P + 2B)$

Arg.	P	D.	log p	D.	Arg.	P	D.	log p	D.
0	192,4	1,8	1,462	1	200	251,0	1,8	1,251	20
4	194,2	1,9	61	2	204	249,2	2,0	1,231	20
8	196,1	2,0	59	2	208	247,2	2,4	1,211	20
12	198,1	2,1	57	3	212	244,8	2,7	1,191	20
16	200,2	2,2	54	2	216	242,1	3,0	71	20
20	202,4	2,2	52	3	220	239,1	3,4	51	19
24	204,6	2,4	49	3	224	235,7	3,8	32	17
28	207,0	2,4	46	3	228	231,9	4,1	15	15
32	209,4	2,5	43	3	232	227,8	4,3	1,100	12
36	211,9	2,5	40	2	236	323,5	4,6	1,088	9
40	214,4	2,6	38	1	240	218,9	4,7	79	5
44	217,0	2,6	37	1	244	214,2	4,8	74	1
48	219,6	2,6	36	1	248	209,4	4,8	73	3
52	222,2	2,6	35	0	252	204,6	4,6	76	7
56	224,8	2,6	35	0	256	200,0	4,3	83	11
60	227,4	2,5	35	0	260	195,7	4,0	1,094	13
64	229,9	2,4	35	1	264	191,7	3,6	1,107	16
68	232,3	2,4	36	1	268	188,1	3,1	23	17
72	234,7	2,3	37	2	272	185,0	2,7	40	19
76	237,0	2,1	39	2	276	182,3	2,3	59	19
80	239,1	2,0	41	2	280	180,0	2,0	78	19
84	241,1	1,9	43	3	284	178,0	1,6	1,197	18
88	243,0	1,8	46	2	288	176,4	1,3	1,215	19
92	244,8	1,7	48	1	292	175,1	1,1	34	18
96	246,5	1,6	49	1	296	174,0	0,8	52	18
100	248,1	1,4	50	1	300	173,2	0,6	70	17
104	249,5	1,3	51	1	304	172,6	0,4	1,287	16
108	250,8	1,2	52	0	308	172,2	0,2	1,303	15
112	252,0	1,1	52	0	312	172,0	0,0	18	14
116	253,1	1,0	52	1	316	172,0	0,1	32	14
120	254,1	0,9	51	2	320	172,1	0,2	46	13
124	255,0	0,8	49	2	324	172,3	0,4	59	13
128	255,8	0,7	47	3	328	172,7	0,4	72	12
132	256,5	0,5	44	4	332	173,1	0,5	84	10
136	257,0	0,5	40	5	336	173,6	0,6	1,394	9
140	257,5	0,4	35	6	340	174,2	0,7	1,403	9
144	257,9	0,3	29	7	344	174,9	0,8	12	8
148	258,2	0,2	22	7	348	175,7	0,9	20	8
152	258,4	0,1	15	8	352	176,6	0,9	28	7
156	258,5	0,0	1,407	9	356	177,5	1,0	35	7
160	258,5	0,1	1,398	11	360	178,5	1,1	42	5
164	258,4	0,3	87	11	364	179,6	1,1	47	4
168	258,1	0,3	76	12	368	180,7	1,2	51	4
172	257,8	0,5	64	13	372	181,9	1,3	55	3
176	257,3	0,6	51	14	376	183,2	1,3	58	2
180	256,7	0,8	37	16	380	184,5	1,4	60	2
184	255,9	0,9	21	17	384	185,9	1,5	62	1
188	255,0	1,1	1,304	17	388	187,4	1,6	63	0
192	253,9	1,3	1,287	18	392	189,0	1,7	63	0
196	252,6	1,6	1,269	18	396	190,7	1,7	63	1
200	251,0		1,251		400	192,4		1,462	

Tafel 34. Ar[illegible]

Form: $p \sin (P + C)$

Arg.	P	D.	log p
0	151,8	5,7	1,183
8	157,5	5,9	76
16	163,4	6,0	[illegible]
24	169,4	6,2	[illegible]
32	175,6	6,4	57
40	182,0	6,7	53
48	188,7	7,0	51
56	195,7	7,1	52
64	202,8	7,0	56
72	209,8	7,0	63
80	216,8	6,9	73
88	223,7	6,7	85
96	230,4	6,6	1,198
104	237,0	6,4	1,213
112	243,4	6,1	28
120	249,5	6,0	42
128	255,5	5,9	55
136	261,4	5,7	66
144	267,1	5,6	75
152	272,7	5,5	83
160	278,2	5,6	88
168	283,8	5,7	[illegible]
176	289,5	5,7	[illegible]
184	295,2	5,8	87
192	301,0	6,0	81
200	307,0	6,3	73
208	313,3	6,6	62
216	319,9	7,1	48
224	327,0	7,5	31
232	234,5	8,0	1,212
240	342,5	8,6	1,192
248	351,1	9,4	72
256	0,5	10,0	52
264	10,5	10,4	35
272	20,9	11,0	20
280	31,9	11,3	10
288	43,2	11,0	06
296	54,2	10,6	08
304	64,8	10,1	15
312	74,9	9,6	26
320	84,5	8,9	39
328	93,4	8,1	53
336	101,5	7,5	66
344	109,0	6,9	77
352	115,9	6,6	86
360	122,5	6,2	91
368	128,7	6,0	94
376	134,7	5,8	95
384	140,5	5,7	93
392	146,2	5,6	89
400	151,8		1,183

Störungen der dritten Coordinate.

Tafel 35. Arg. 1 Form: $p \sin (P+D)$

0				100				200				300			
P	D.	log *p*	D.	*P*	D.	log *p*	D.	*P*	D.	log *p*	D.	*P*	D.	log *p*	D.
131°,4	2,1	1,648	8	164° 40′	47	1,8822	23	144°,0	3,1	1,162	22	148° 25′	80	1,7661	80
133,5	2,3	40	6	163 53	48	799	27	147,1	3,5	40	19	147 5	78	741	76
135,8	2,4	34	5	163 5	50	772	31	150,6	3,8	21	15	145 47	78	817	72
138,2	2,4	29	4	162 15	50	741	36	154,4	4,0	1,106	10	144 29	77	889	68
140,6		25		161 25		705		158,4		1,096		143 12		1,7957	
	2,5		2		51		42		4,0		5		75		65
143,1	2,5	23	1	160 34	51	663	45	162,4	4,0	91	0	141 57	75	1,8022	62
145,6	2,6	22	1	159 43	52	618	49	166,4	3,9	91	5	140 42	72	084	58
148,2	2,5	23	2	158 51	53	569	53	170,3	3,7	1,096	9	139 30	71	142	53
150,7	2,5	25	4	157 58	53	516	58	174,0	3,4	1,105	14	138 19	69	195	49
153,2		29		157 5		458		177,4		19		137 10		244	
	2,4		6		54		63		3,0		17		68		46
155,6	2,3	35	6	156 11	54	395	68	180,4	2,4	36	19	136 2	67	290	41
157,9	2,2	41	8	155 17	55	327	71	182,8	2,0	55	20	134 55	65	331	36
160,1	2,0	49	9	154 22	54	256	76	184,8	1,5	75	22	133 50	64	367	31
162,1	2,0	58	10	153 28	55	180	81	186,3	1,1	1,197	22	132 46	62	398	28
164,1		68		152 33		099		187,4		1,219		131 44		426	
	1,7		10		56		85		0,8		23		60		22
165,8	1,5	78	11	151 37	56	1,8014	90	188,2	0,4	42	22	130 44	60	448	18
167,3	1,3	1,689	11	150 41	56	1,7924	95	188,6	0,1	64	22	129 44	58	466	14
168,6	1,3	1,700	12	149 45	56	829	99	188,7	0,2	1,286	21	128 46	56	480	9
169 54′	62	1,7116	114	148 49	56	730	103	188,5	0,3	1,307	21	127 50	54	489	6
170 56		230		147 53		627		188,2		28		126 56		495	
	56		112		56		108		0,4		20		52		0
171 52	49	342	112	146 57	56	519	114	187,8	0,6	48	20	126 4	51	495	5
172 41	41	454	110	146 1	55	405	118	187,2	0,8	68	20	125 13	49	490	10
173 22	34	564	108	145 6	57	287	123	186,4	0,9	1,388	19	124 24	47	480	14
173 56	27	672	105	144 9	57	164	127	185,5	1,0	1,407	19	123 37	45	466	19
174 23		777		143 12		1,7037		184,5		26		122 52		447	
	21		102		0,9		14		1,1		18		42		25
174 44	15	879	98	142,3	0,9	1,690	14	183,4	1,1	44	17	122 10	41	422	29
174 59	9	1,7977	93	141,4	0,8	76	15	182,3	1,2	61	17	121 29	36	393	34
175 8	4	1,8070	89	140,6	0,8	61	14	181,1	1,2	78	17	120 53	33	359	39
12	0	159	83	139,8	0,8	47	15	179,9	1,4	1,495	17	120 20	29	320	44
12		242		139,0		32		178,5		1,512		119 51		276	
	5		77		0,8		16		1,4		16		25		48
175 7	8	319	72	138,2	0,8	1,616	17	177,1	1,4	28	15	119 26	21	228	52
174 59	13	391	67	137,4	0,7	1,599	17	175,7	1,4	43	15	119 5	17	176	57
46	15	458	60	136,7	0,7	82	19	174,3	1,4	58	15	118 48	14	119	61
31	18	518	56	136,0	0,6	63	19	172,9	1,5	73	14	34	8	1,8058	66
174 13		574		135,4		44		171,4		1,587		26		1,7992	
	21		50		0,6		19		1,4		14		3		70
173 52	24	624	45	134,8	0,6	25	20	170,0	1,5	1,601	13	23	1	922	75
28	26	669	41	134,2	0,5	1,505	21	168,5	1,4	14	13	24	6	847	79
173 2	29	710	37	133,7	0,4	1,484	22	167,1	1,5	27	13	30	11	768	84
172 33	31	747	32	133,3	0,3	62	22	165,6	1,4	40	13	41	17	684	90
172 2		779		133,0		40		164,2		53		118 58		594	
	32		27		0,1		23		1,5		12		25		95
171 30	34	806	22	132,9	0,0	1,417	24	162,7	1,5	65	12	119 23	33	499	100
170 56	36	828	18	132,9	0,1	1,393	24	161,2	1,5	77	11	119 56	40	399	106
170 20	37	846	12	133,0	0,4	69	26	159,7	1,5	88	11	120 36	48	293	112
169 43	39	858	8	133,4	0,6	43	26	158,2	1,4	1,699	10	121 24	0,9	1,7181	11
169 4		866		134,0		1,317		156,8		1,709		122,3		1,707	
	41		4		0,9		26		1,4		11		1,1		11
168 23	43	870	0	134,9	1,1	1,291	27	155 22′	87	1,7202	100	123,4	1,3	1,696	11
167 40	43	870	5	136,0	1,4	64	26	153 55	85	302	96	124,7	1,4	85	10
166 57	45	865	9	137,4	1,8	38	27	152 30	83	398	92	126,1	1,6	75	9
166 12	46	856	15	139,2	2,2	1,211	25	151 7	82	490	87	127,7	1,8	66	9
165 26	46	841	19	141,4	2,6	1,186	24	149 45	80	577	84	129,5	1,9	57	9
164 40		1,8822		144,0		1,162		148 25		1,7661		131,4		1,648	

Störungen der dritten Coordinate.

Taf. 39. Arg. 5.

Arg.	0	D.	Jährl. Aend.	100	D.	Jährl. Aend.	200	D.	Jährl. Aend.	300	D.	Jährl. Aend.
0	56,3		+0,016	18,8		+0,086	103,3		−0,016	81,7		−0,086
		2,2			1,8			0,2			1,1	
2	54,1		+0,008	20,6		0,087	103,1		−0,008	82,8		0,087
		2,3			1,8			0,3			1,2	
4	51,8		−0,001	22,4		0,088	102,8		+0,001	84,0		0,088
		2,3			1,9			0,4			1,2	
6	49,5		0,009	24,3		0,088	102,4		0,009	85,2		0,088
		2,3			2,0			0,5			1,3	
8	47,2		0,017	26,3		0,088	101,9		0,017	86,5		0,088
		2,3			2,0			0,6			1,3	
10	44,9		0,025	28,3		0,086	101,3		0,025	87,8		0,086
		2,2			2,1			0,7			1,2	
12	42,7		0,033	30,4		0,084	100,6		0,033	89,0		0,084
		2,2			2,1			0,8			1,2	
14	40,5		0,040	32,5		0,080	99,8		0,040	90,2		0,080
		2,2			2,2			0,8			1,2	
16	38,3		0,047	34,7		0,076	99,0		0,047	91,4		0,076
		2,2			2,2			1,0			1,1	
18	36,1		0,054	36,9		0,071	98,0		0,054	92,5		0,071
		2,1			2,3			1,0			1,1	
20	34,0		0,060	39,2		0,065	97,0		0,060	93,6		0,065
		2,1			2,3			1,1			1,0	
22	31,9		0,066	41,5		0,059	95,9		0,066	94,6		0,059
		2,0			2,4			1,1			0,9	
24	29,9		0,071	43,9		0,052	94,8		0,071	95,5		0,052
		2,0			2,3			1,2			0,8	
26	27,9		0,075	46,2		0,045	93,6		0,075	96,3		0,045
		2,0			2,4			1,2			0,7	
28	25,9		0,079	48,6		0,037	92,4		0,079	97,0		0,037
		1,9			2,3			1,2			0,6	
30	24,0		0,082	50,9		0,029	91,2		0,082	97,6		0,029
		1,8			2,4			1,3			0,6	
32	22,2		0,085	53,3		0,021	89,9		0,085	98,2		0,021
		1,8			2,3			1,3			0,4	
34	20,4		0,087	55,6		0,013	88,6		0,087	98,6		0,013
		1,7			2,4			1,3			0,4	
36	18,7		0,088	58,0		+0,005	87,3		0,088	99,0		−0,005
		1,6			2,3			1,3			0,2	
38	17,1		0,088	60,4		−0,004	86,0		0,088	99,2		+0,004
		1,5			2,3			1,4			0,1	
40	15,6		0,087	62,7		0,012	84,6		0,087	99,3		0,012
		1,4			2,4			1,3			0,0	
42	14,2		0,085	65,1		0,020	83,3		0,085	99,3		0,020
		1,4			2,3			1,2			0,1	
44	12,8		0,083	67,4		0,028	82,1		0,083	99,2		0,028
		1,2			2,3			1,2			0,2	
46	11,6		0,080	69,7		0,036	80,9		0,080	99,0		0,036
		1,2			2,2			1,2			0,4	
48	10,4		0,076	71,9		0,043	79,7		0,076	98,6		0,043
		1,1			2,2			1,1			0,5	
50	9,3		0,072	74,1		0,050	78,6		0,072	98,1		0,050
		1,0			2,1			1,1			0,6	
52	8,3		0,067	76,2		0,056	77,5		0,067	97,5		0,056
		0,9			2,1			1,0			0,7	
54	7,4		0,062	78,3		0,062	76,5		0,062	96,8		0,062
		0,7			2,0			0,9			0,8	
56	6,7		0,056	80,3		0,068	75,6		0,056	96,0		0,068
		0,7			1,9			0,8			0,9	
58	6,0		0,049	82,2		0,073	74,8		0,049	95,1		0,073
		0,5			1,9			0,7			1,1	
60	5,5		0,042	84,1		0,077	74,1		0,042	94,0		0,077
		0,5			1,8			0,6			1,1	
62	5,0		0,035	85,9		0,080	73,5		0,035	92,9		0,080
		0,3			1,8			0,5			1,3	
64	4,7		0,027	87,7		0,083	73,0		0,027	91,6		0,083
		0,2			1,7			0,4			1,4	
66	4,5		0,019	89,4		0,085	72,6		0,019	90,2		0,085
		0,0			1,6			0,3			1,5	
68	4,5		0,011	91,0		0,087	72,3		0,011	88,7		0,087
		0,0			1,5			0,2			1,6	
70	4,5		−0,003	92,5		0,087	72,1		+0,003	87,1		0,087
		0,2			1,4			0,1			1,6	
72	4,7		+0,005	93,9		0,087	72,0		−0,005	85,5		0,087
		0,3			1,3			0,0			1,8	
74	5,0		0,013	95,2		0,086	72,0		0,013	83,7		0,086
		0,4			1,3			0,2			1,8	
76	5,4		0,021	96,5		0,085	72,2		0,021	81,9		0,085
		0,5			1,1			0,3			1,9	
78	5,9		0,029	97,6		0,082	72,5		0,029	80,0		0,082
		0,6			1,1			0,4			1,9	
80	6,5		0,037	98,7		0,079	72,9		0,037	78,1		0,079
		0,7			1,0			0,5			2,0	
82	7,2		0,044	99,7		0,075	73,4		0,044	76,1		0,075
		0,9			0,9			0,6			2,0	
84	8,1		0,051	100,6		0,071	74,0		0,051	74,1		0,071
		1,0			0,8			0,7			2,1	
86	9,1		0,058	101,4		0,066	74,7		0,058	72,0		0,066
		1,1			0,6			0,8			2,2	
88	10,2		0,064	102,0		0,060	75,5		0,064	69,8		0,060
		1,2			0,5			0,9			2,2	
90	11,4		0,069	102,5		0,054	76,4		0,069	67,6		0,054
		1,3			0,4			0,9			2,2	
92	12,7		0,074	102,9		0,047	77,3		0,074	65,4		0,047
		1,4			0,3			1,0			2,2	
94	14,1		0,078	103,2		0,040	78,3		0,078	63,2		0,040
		1,5			0,1			1,1			2,3	
96	15,6		0,082	103,3		0,032	79,4		0,082	60,9		0,032
		1,6			0,0			1,1			2,3	
98	17,2		0,084	103,3		0,024	80,5		0,084	58,6		0,024
		1,6			0,0			1,2			2,3	
100	18,8		+0,086	103,3		−0,016	81,7		−0,086	56,3		+0,016

Störungen der dritten Coordinate.

Tafel 40. Vert. Arg. I. Hor. Arg. 4

Arg.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
0	3,0	4,4	6,0	8,0	10,2	12,6	15,1	17,6	20,2	22,7	25,1	27,1	28,7	29,9
1	3,9	5,5	7,3	9,5	11,7	14,2	16,7	19,2	21,6	24,0	26,2	28,0	29,4	30,3
2	5,0	6,8	8,7	11,0	13,3	15,8	18,3	20,7	23,0	25,2	27,2	28,7	29,8	30,4
3	6,2	8,2	10,3	12,6	14,9	17,4	19,8	22,1	24,2	26,2	28,0	29,2	30,0	30,3
4	7,6	9,7	11,9	14,2	16,6	19,0	21,3	23,4	25,3	27,1	28,5	29,4	29,9	29,9
5	9,1	11,4	13,6	15,8	18,2	20,5	22,7	24,5	26,2	27,8	28,8	29,4	29,6	29,3
6	10,8	13,1	15,3	17,5	19,8	22,0	23,9	25,5	27,0	28,2	28,9	29,2	29,0	28,4
7	12,5	14,8	17,1	19,2	21,3	23,3	25,0	26,3	27,6	28,4	28,8	28,8	28,2	27,3
8	14,3	16,6	18,8	20,8	22,8	24,5	25,9	27,0	27,9	28,4	28,5	28,1	27,2	26,0
9	16,1	18,4	20,4	22,3	24,1	25,5	26,6	27,4	28,0	28,2	27,9	27,2	26,0	24,6
10	17,9	20,1	22,0	23,7	25,2	26,4	27,2	27,7	27,9	27,7	27,1	26,0	24,6	23,0
11	19,7	21,7	23,5	24,9	26,2	27,1	27,6	27,7	27,6	27,0	26,1	24,7	23,1	21,2
12	21,4	23,2	24,8	26,0	27,0	27,6	27,8	27,6	27,1	26,2	25,0	23,3	21,4	19,3
13	23,0	24,6	25,9	26,9	27,6	27,9	27,8	27,2	26,4	25,2	23,7	21,7	19,6	17,4
14	24,4	25,8	26,9	27,6	28,0	27,9	27,5	26,7	25,5	24,0	22,2	20,0	17,8	15,5
15	25,7	26,8	27,7	28,1	28,2	27,8	27,1	25,9	24,4	22,7	20,6	18,3	15,9	13,6
16	26,8	27,7	28,3	28,4	28,1	27,4	26,4	25,0	23,2	21,2	18,9	16,5	14,0	11,7
17	27,7	28,4	28,7	28,5	27,9	26,8	25,5	23,9	21,9	19,6	17,2	14,7	12,2	9,9
18	28,4	28,8	28,8	28,3	27,4	26,1	24,5	22,6	20,4	18,0	15,4	12,9	10,4	8,1
19	28,9	29,0	28,7	27,9	26,7	25,2	23,3	21,3	18,8	16,3	13,7	11,1	8,6	6,4
20	29,2	29,0	28,3	27,3	25,9	24,1	22,0	19,8	17,2	14,6	12,0	9,4	7,0	4,9
21	29,3	28,7	27,7	26,5	24,8	22,8	20,6	18,2	15,5	12,9	10,3	7,8	5,6	3,6
22	29,1	28,2	27,0	25,5	23,6	21,4	19,1	16,6	13,9	11,3	8,7	6,3	4,3	2,5
23	28,7	27,5	26,1	24,3	22,3	19,9	17,5	15,0	12,3	9,7	7,2	5,0	3,2	1,7
24	28,0	26,6	25,0	23,0	20,8	18,4	15,9	13,4	10,8	8,3	5,9	3,9	2,3	1,1
25	27,1	25,5	23,7	21,5	19,3	16,8	14,3	11,8	9,4	7,0	4,8	3,0	1,6	0,7
26	26,0	24,2	22,3	20,0	17,7	15,2	12,7	10,3	8,0	5,8	3,8	2,3	1,2	0,6
27	24,8	22,8	20,7	18,4	16,1	13,6	11,2	8,9	6,8	4,8	3,0	1,8	1,0	0,7
28	23,4	21,3	19,1	16,8	14,4	12,0	9,7	7,6	5,7	3,9	2,5	1,6	1,1	1,1
29	21,9	19,6	17,4	15,2	12,8	10,5	8,3	6,5	4,8	3,2	2,2	1,6	1,4	1,7
30	20,2	17,9	15,7	13,5	11,2	9,0	7,1	5,5	4,0	2,8	2,1	1,8	2,0	2,6
31	18,5	16,2	13,9	11,8	9,7	7,7	6,0	4,7	3,4	2,6	2,2	2,2	2,8	3,7
32	16,7	14,4	12,2	10,2	8,2	6,5	5,1	4,0	3,1	2,6	2,5	2,9	3,8	5,0
33	14,9	12,6	10,6	8,7	6,9	5,5	4,4	3,6	3,0	2,8	3,1	3,8	5,0	6,4
34	13,1	10,9	9,0	7,3	5,8	4,6	3,8	3,3	3,1	3,3	3,9	5,0	6,4	8,0
35	11,3	9,3	7,5	6,1	4,8	3,9	3,4	3,3	3,4	4,0	4,9	6,3	7,9	9,8
36	9,6	7,8	6,2	5,0	4,0	3,4	3,2	3,4	3,9	4,8	6,0	7,7	9,6	11,7
37	8,0	6,4	5,1	4,1	3,4	3,1	3,2	3,8	4,6	5,8	7,3	9,3	11,4	13,6
38	6,6	5,2	4,1	3,4	3,0	3,1	3,5	4,3	5,5	7,0	8,8	11,0	13,2	15,5
39	5,3	4,2	3,3	2,9	2,8	3,2	3,9	5,1	6,6	8,3	10,4	12,7	15,1	17,4
40	4,2	3,3	2,7	2,6	2,9	3,6	4,6	6,0	7,8	9,8	12,1	14,5	17,0	19,3
41	3,3	2,6	2,3	2,5	3,1	4,2	5,5	7,1	9,1	11,4	13,8	16,3	18,8	21,1
42	2,6	2,2	2,2	2,7	3,6	4,9	6,5	8,4	10,6	13,0	15,6	18,1	20,6	22,9
43	2,1	2,0	2,3	3,1	4,3	5,8	7,7	9,7	12,2	14,7	17,3	19,9	22,4	24,6
44	1,8	2,0	2,7	3,7	5,1	6,9	9,0	11,2	13,8	16,4	19,0	21,6	24,0	26,1
45	1,7	2,3	3,3	4,5	6,2	8,2	10,4	12,8	15,5	18,1	20,7	23,2	25,4	27,4
46	1,9	2,8	4,0	5,5	7,4	9,6	11,9	14,4	17,1	19,7	22,3	24,7	26,7	28,5
47	2,3	3,5	4,9	6,7	8,7	11,1	13,5	16,0	18,7	21,3	23,8	26,0	27,8	29,3
48	3,0	4,4	6,0	8,0	10,2	12,6	15,1	17,6	20,2	22,7	25,1	27,1	28,7	29,9

Störungen der dritten Coordinate.

Tafel 40. Fortsetzung. Vert. Arg. I. Hor. Arg. 4

Arg.	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260
0	30,6	30,9	30,7	30,0	29,1	28,0	26,7	25,4	24,2	23,1	22,1	21,3	20,7
1	30,7	30,7	30,2	29,3	28,2	27,0	25,6	24,3	23,1	22,0	21,0	20,2	19,6
2	30,5	30,2	29,5	28,4	27,2	25,8	24,4	23,0	21,8	20,8	19,8	19,1	18,5
3	30,1	29,5	28,6	27,3	25,9	24,5	23,0	21,6	20,4	19,5	18,6	17,9	17,3
4	29,5	28,6	27,4	26,0	24,5	23,0	21,5	20,1	19,0	18,1	17,3	16,6	16,1
5	28,6	27,5	26,0	24,5	22,9	21,3	19,9	18,5	17,5	16,7	16,0	15,3	14,8
6	27,4	26,1	24,5	22,8	21,2	19,6	18,2	16,9	16,0	15,2	14,6	14,0	13,6
7	26,0	24,6	22,8	21,0	19,4	17,8	16,5	15,2	14,4	13,8	13,3	12,8	12,4
8	24,5	22,9	21,0	19,2	17,5	16,0	14,7	13,6	12,9	12,4	12,0	11,6	11,3
9	22,8	21,1	19,1	17,3	15,5	14,2	13,0	12,0	11,4	11,1	10,8	10,5	10,3
10	21,0	19,1	17,1	15,3	13,6	12,4	11,3	10,5	10,0	9,8	9,6	9,5	9,3
11	19,1	17,1	15,1	13,3	11,7	10,6	9,7	9,0	8,7	8,6	8,5	8,5	8,4
12	17,2	15,1	13,1	11,4	9,9	8,9	8,1	7,7	7,5	7,5	7,6	7,7	7,7
13	15,2	13,1	11,1	9,5	8,2	7,3	6,7	6,5	6,4	6,6	6,8	7,0	7,1
14	13,2	11,2	9,2	7,8	6,6	5,9	5,5	5,4	5,5	5,8	6,1	6,4	6,6
15	11,3	9,3	7,4	6,2	5,2	4,6	4,4	4,5	4,8	5,2	5,6	6,0	6,3
16	9,4	7,5	5,8	4,7	3,9	3,5	3,5	3,8	4,2	4,8	5,3	5,8	6,1
17	7,6	5,9	4,4	3,4	2,8	2,6	2,8	3,3	3,8	4,6	5,2	5,7	6,1
18	6,0	4,4	3,1	2,3	2,0	2,0	2,4	3,0	3,7	4,5	5,2	5,8	6,3
19	4,5	3,1	2,0	1,4	1,3	1,6	2,1	2,9	3,8	4,6	5,4	6,1	6,6
20	3,2	2,0	1,2	0,8	0,9	1,4	2,1	3,0	4,0	4,9	5,8	6,5	7,1
21	2,1	1,1	0,6	0,5	0,8	1,5	2,3	3,3	4,5	5,4	6,4	7,1	7,7
22	1,3	0,5	0,2	0,4	0,9	1,8	2,8	3,9	5,1	6,1	7,1	7,8	8,5
23	0,7	0,2	0,1	0,6	1,3	2,3	3,4	4,7	5,9	6,9	7,9	8,7	9,3
24	0,4	0,1	0,3	1,0	1,9	3,0	4,3	5,6	6,8	7,9	8,9	9,7	10,3
25	0,3	0,3	0,8	1,7	2,8	4,0	5,4	6,7	7,9	9,0	10,0	10,8	11,4
26	0,5	0,8	1,5	2,6	3,8	5,2	6,6	8,0	9,2	10,2	11,2	11,9	12,5
27	0,9	1,5	2,4	3,7	5,1	6,5	8,0	9,4	10,6	11,5	12,4	13,1	13,7
28	1,5	2,4	3,6	5,0	6,5	8,0	9,5	10,9	12,0	12,9	13,7	14,4	14,9
29	2,4	3,5	5,0	6,5	8,1	9,7	11,1	12,5	13,5	14,3	15,0	15,7	16,2
30	3,6	4,9	6,5	8,2	9,8	11,4	12,8	14,1	15,0	15,8	16,4	17,0	17,4
31	5,0	6,4	8,2	10,0	11,6	13,2	14,5	15,8	16,6	17,2	17,7	18,2	18,6
32	6,5	8,1	10,0	11,8	13,5	15,0	16,3	17,4	18,1	18,6	19,0	19,4	19,7
33	8,2	9,9	11,9	13,7	15,5	16,8	18,0	19,0	19,6	19,9	20,2	20,5	20,7
34	10,0	11,9	13,9	15,7	17,4	18,6	19,7	20,5	21,0	21,2	21,4	21,5	21,7
35	11,9	13,9	15,9	17,7	19,3	20,4	21,3	22,0	22,3	22,4	22,5	22,5	22,6
36	13,8	15,9	17,9	19,6	21,1	22,1	22,9	23,3	23,5	23,5	23,4	23,3	23,3
37	15,8	17,9	19,9	21,5	22,8	23,7	24,3	24,5	24,6	24,4	24,2	24,0	23,9
38	17,8	19,8	21,8	23,2	24,4	25,1	25,5	25,6	25,5	25,2	24,9	24,6	24,4
39	19,7	21,7	23,6	24,8	25,8	26,4	26,6	26,5	26,2	25,8	25,4	25,0	24,7
40	21,6	23,5	25,2	26,3	27,1	27,5	27,5	27,2	26,8	26,2	25,7	25,2	24,9
41	23,4	25,1	26,6	27,6	28,2	28,4	28,2	27,7	27,2	26,4	25,8	25,3	24,9
42	25,0	26,6	27,9	28,7	29,0	29,0	28,6	28,0	27,3	26,5	25,8	25,2	24,7
43	26,5	27,9	29,0	29,6	29,7	29,4	28,9	28,1	27,2	26,4	25,6	24,9	24,4
44	27,8	29,0	29,8	30,2	30,1	29,6	28,9	28,0	27,0	26,1	25,2	24,5	23,9
45	28,9	29,9	30,4	30,5	30,2	29,5	28,7	27,7	26,5	25,6	24,6	23,9	23,3
46	29,7	30,5	30,8	30,6	30,1	29,2	28,2	27,1	25,9	24,9	23,9	23,2	22,5
47	30,3	30,8	30,9	30,4	29,7	28,7	27,6	26,3	25,1	24,1	23,1	22,3	21,7
48	30,6	30,9	30,7	30,0	29,1	28,0	26,7	25,4	24,2	23,1	22,1	21,3	20,7

Störungen der dritten Coordinate.

Tafel 40. Schluss. Vert. Arg. I. Hor. Arg. 4

g.	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
0	19,3	18,5	17,4	16,1	14,4	12,6	10,5	8,4	6,2	4,6	3,2	2,3	1,9
1	18,2	17,3	16,1	14,8	13,0	11,2	9,2	7,2	5,1	3,7	2,5	1,9	1,8
2	17,0	16,1	14,9	13,5	11,7	9,9	8,0	6,1	4,1	2,9	2,1	1,7	1,9
3	15,8	14,8	13,6	12,2	10,5	8,7	6,9	5,1	3,3	2,4	1,8	1,7	2,2
4	14,6	13,6	12,4	11,0	9,3	7,6	5,9	4,3	2,7	2,1	1,8	2,0	2,7
5	13,4	12,4	11,3	9,8	8,2	6,6	5,1	3,7	2,3	2,1	2,0	2,5	3,5
6	12,3	11,3	10,2	8,8	7,3	5,8	4,5	3,3	2,2	2,3	2,5	3,3	4,5
7	11,2	10,3	9,2	7,9	6,5	5,2	4,1	3,1	2,3	2,7	3,2	4,3	5,7
8	10,2	9,3	8,3	7,1	5,9	4,7	3,8	3,1	2,6	3,3	4,1	5,4	7,0
9	9,3	8,4	7,5	6,5	5,4	4,5	3,8	3,3	3,1	4,1	5,2	6,7	8,5
0	8,5	7,7	6,9	6,0	5,1	4,4	3,9	3,8	3,9	5,1	6,5	8,2	10,1
1	7,8	7,1	6,4	5,7	5,0	4,5	4,3	4,5	4,9	6,3	7,9	9,8	11,8
2	7,2	6,7	6,1	5,5	5,0	4,8	4,8	5,3	6,0	7,6	9,4	11,5	13,6
3	6,8	6,4	5,9	5,5	5,3	5,3	5,5	6,3	7,3	9,1	11,1	13,2	15,4
4	6,5	6,3	5,9	5,7	5,7	5,9	6,4	7,5	8,8	10,7	12,8	15,0	17,2
5	6,4	6,3	6,1	6,1	6,3	6,7	7,5	8,8	10,4	12,4	14,6	16,8	19,0
6	6,4	6,4	6,4	6,6	7,0	7,7	8,7	10,3	12,0	14,1	16,4	18,6	20,7
7	6,6	6,7	6,9	7,3	7,9	8,8	10,1	11,8	13,7	15,9	18,2	20,3	22,3
8	6,9	7,2	7,5	8,1	8,9	10,0	11,5	13,4	15,4	17,6	19,9	22,0	23,8
9	7,4	7,8	8,3	9,0	10,0	11,3	13,0	15,0	17,2	19,3	21,6	23,5	25,2
0	8,0	8,5	9,2	10,0	11,2	12,7	14,5	16,6	18,9	21,0	23,1	34,9	26,4
1	8,7	9,3	10,2	11,1	12,5	14,1	16,0	18,2	20,5	22,6	24,5	26,1	27,4
2	9,6	10,3	11,3	12,3	13,8	15,6	17,6	19,8	22,1	24,0	25,8	27,2	28,2
3	10,6	11,4	12,4	13,6	15,2	17,0	19,1	21,3	23,5	25,3	26,9	28,1	28,8
4	11,7	12,5	13,6	14,9	16,6	18,4	20,5	22,6	24,8	26,4	27,8	28,7	29,1
25	12,8	13,7	14,9	16,2	18,0	19,8	21,8	23,8	25,9	27,3	28,5	29,1	29,2
26	14,0	14,9	16,1	17,5	19,3	21,1	23,0	24,9	26,9	28,1	28,9	29,3	29,1
27	15,2	16,2	17,4	18,8	20,5	22,3	24,1	25,9	27,7	28,6	29,2	29,3	28,8
28	16,4	17,4	18,6	20,0	21,7	23,4	25,1	26,7	28,3	28,9	29,2	29,0	28,3
29	17,6	18,6	19,7	21,2	22,8	24,4	25,9	27,3	28,7	28,9	29,0	28,5	27,5
0	18,7	19,7	20,8	22,2	23,7	25,2	26,5	27,7	28,8	28,7	28,5	27,7	26,5
1	19,8	20,7	21,8	23,1	24,5	25,8	26,9	27,9	28,7	28,3	27,8	26,7	25,3
2	20,8	21,7	22,7	23,9	25,1	26,3	27,2	27,9	28,4	27,7	26,9	25,6	24,0
3	21,7	22,6	23,5	24,5	25,6	26,5	27,2	27,7	27,9	26,9	25,8	24,3	22,5
4	22,5	23,3	24,1	25,0	25,9	26,6	27,1	27,2	27,1	25,9	24,5	22,8	20,9
	23,2	23,9	24,6	25,3	26,0	26,5	26,7	26,5	26,1	24,7	23,1	21,2	19,2
	23,8	24,3	24,9	25,5	26,0	26,2	26,2	25,7	25,0	23,4	21,6	19,5	17,4
	24,2	24,6	25,1	25,5	25,7	25,7	25,5	24,7	23,7	21,9	19,9	17,8	15,6
	24,5	24,7	25,1	25,3	25,3	25,1	24,6	23,5	22,2	20,3	18,2	16,0	13,8
	24,6	24,7	24,9	24,9	24,7	24,3	23,5	22,2	20,6	18,6	16,4	14,2	12,0
	24,6	24,6	24,6	24,4	24,0	23,3	22,3	20,7	19,0	16,9	14,6	12,4	10,3
	24,4	24,3	24,1	23,7	23,1	22,2	20,9	19,2	17,3	15,1	12,8	10,7	8,7
	24,1	23,8	23,5	22,9	22,1	21,0	19,5	17,6	15,6	13,4	11,1	9,0	7,2
	23,6	23,2	22,7	22,0	21,0	19,7	18,0	16,0	13,8	11,7	9,4	7,5	5,8
	23,0	22,5	21,8	21,0	19,8	18,3	16,5	14,4	12,1	10,0	7,9	6,1	4,6
	22,3	21,7	20,8	19,9	18,5	16,9	15,0	12,8	10,5	8,4	6,5	4,9	3,6
	21,4	20,7	19,7	18,7	17,2	15,4	13,4	11,2	8,9	7,0	5,2	3,8	2,8
	20,4	19,6	18,6	17,4	15,8	14,0	11,9	9,7	7,5	5,7	4,1	2,9	2,2
	19,3	18,5	17,4	16,1	14,4	12,6	10,5	8,4	6,2	4,6	3,2	2,3	1,9

Störungen der dritten Coordinate.

Tafel 41. Vert. Arg. II. Hor. Arg. 1

Arg.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
0	3,3	3,8	4,4	4,9	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	7,9	8,3	8,7	9,0	9,3
2	4,2	4,7	5,4	5,9	6,4	6,9	7,4	7,8	8,2	8,6	8,9	9,2	9,4	9,6
4	5,2	5,7	6,3	6,8	7,3	7,7	8,1	8,5	8,8	9,0	9,3	9,4	9,5	9,6
6	6,1	6,6	7,1	7,6	8,0	8,3	8,6	8,9	9,1	9,2	9,3	9,3	9,3	9,2
8	7,0	7,4	7,8	8,2	8,5	8,7	8,9	9,0	9,1	9,1	9,0	8,9	8,8	8,6
10	7,7	8,0	8,3	8,6	8,7	8,8	8,9	8,8	8,8	8,7	8,5	8,3	8,0	7,7
12	8,3	8,5	8,6	8,7	8,7	8,7	8,6	8,4	8,2	8,0	7,7	7,4	7,0	6,7
14	8,6	8,7	8,6	8,6	8,5	8,3	8,0	7,7	7,4	7,1	6,8	6,3	5,9	5,5
16	8,6	8,6	8,4	8,2	8,0	7,7	7,3	6,9	6,5	6,1	5,7	5,2	4,7	4,3
18	8,5	8,3	7,9	7,6	7,3	6,9	6,4	6,0	5,5	5,0	4,6	4,1	3,5	3,1
20	8,1	7,7	7,3	6,9	6,5	6,0	5,5	5,0	4,4	3,9	3,5	3,0	2,5	2,1
22	7,5	7,0	6,5	6,0	5,5	5,0	4,5	4,0	3,4	2,9	2,5	2,1	1,7	1,3
24	6,7	6,2	5,6	5,1	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,1	1,7	1,3	1,0	0,7
26	5,8	5,3	4,6	4,1	3,6	3,1	2,6	2,2	1,8	1,4	1,1	0,8	0,6	0,4
28	4,8	4,3	3,7	3,2	2,7	2,3	1,9	1,5	1,2	1,0	0,7	0,6	0,5	0,4
30	3,9	3,4	2,9	2,4	2,0	1,7	1,4	1,1	0,9	0,8	0,7	0,7	0,7	0,8
32	3,0	2,6	2,2	1,8	1,5	1,3	1,1	1,0	0,9	0,9	1,0	1,1	1,2	1,4
34	2,3	2,0	1,7	1,4	1,3	1,2	1,1	1,2	1,2	1,3	1,5	1,7	2,0	2,3
36	1,7	1,5	1,4	1,3	1,3	1,3	1,4	1,6	1,8	2,0	2,3	2,6	3,0	3,3
38	1,4	1,3	1,4	1,4	1,5	1,7	2,0	2,3	2,6	2,9	3,2	3,7	4,1	4,5
40	1,4	1,4	1,6	1,8	2,0	2,3	2,7	3,1	3,5	3,9	4,3	4,8	5,3	5,7
42	1,5	1,7	2,1	2,4	2,7	3,1	3,6	4,0	4,5	5,0	5,4	5,9	6,5	6,9
44	1,9	2,3	2,7	3,1	3,5	4,0	4,5	5,0	5,6	6,1	6,5	7,0	7,5	7,9
46	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,6	7,1	7,5	7,9	8,3	8,7
48	3,3	3,8	4,4	4,9	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	7,9	8,3	8,7	9,0	9,3

Tafel 42. Vert. Arg. III. Hor. Arg. 1

Arg.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
0	1,7	1,6	1,5	1,3	1,2	1,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,6	0,5	0,5	0,4
4	1,6	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8	0,8	0,8	0,7	0,7	0,7	0,8
8	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,2	1,2	1,2	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,4
12	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,7	1,7	1,7	1,9	1,9	2,0	2,1	2,2
16	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
20	2,1	2,3	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
24	2,3	2,5	2,5	2,7	2,8	2,9	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,5	3,6
28	2,4	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,2	3,2	3,3	3,3	3,3	3,2
32	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,8	2,8	2,8	2,9	2,8	2,8	2,7	2,7	2,6
36	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,3	2,3	2,3	2,1	2,1	2,0	1,9	1,8
40	2,2	2,1	2,1	2,0	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0
44	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,1	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
48	1,7	1,6	1,5	1,3	1,2	1,1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,6	0,5	0,5	0,4

Störungen der dritten Coordinate.

Tafel 41. Fortsetzung. Vert. Arg. II. Hor. Arg. 1

Arg.	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270
0	9,5	9,7	9,8	9,9	9,9	9,9	9,8	9,7	9,6	9,4	9,1	8,8	8,5	8,1
2	9,7	9,7	9,8	9,8	9,7	9,5	9,3	9,1	8,9	8,6	8,3	7,9	7,5	7,1
4	9,5	9,5	9,4	9,3	9,1	8,9	8,6	8,3	8,0	7,6	7,2	6,8	6,4	5,9
6	9,0	8,9	8,7	8,5	8,2	8,0	7,6	7,2	6,9	6,5	6,0	5,6	5,2	4,6
8	8,3	8,1	7,8	7,5	7,1	6,8	6,4	6,0	5,6	5,2	4,7	4,3	3,9	3,4
10	7,4	7,1	6,6	6,3	5,9	5,5	5,1	4,7	4,3	3,9	3,5	3,1	2,7	2,4
12	6,3	5,9	5,4	5,0	4,6	4,2	3,8	3,4	3,0	2,6	2,3	2,0	1,7	1,5
14	5,1	4,6	4,2	3,8	3,3	2,9	2,6	2,2	1,9	1,6	1,3	1,1	0,9	0,8
16	3,8	3,4	3,0	2,6	2,2	1,8	1,5	1,2	1,0	0,8	0,6	0,5	0,4	0,4
18	2,7	2,3	1,9	1,6	1,2	0,9	0,7	0,5	0,4	0,3	0,2	0,2	0,2	0,3
20	1,7	1,4	1,0	0,8	0,5	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	0,6
22	1,0	0,7	0,5	0,3	0,1	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,1
24	0,5	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,9	1,2	1,5	1,9
26	0,3	0,3	0,2	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,4	1,7	2,1	2,5	2,9
28	0,5	0,5	0,6	0,7	0,9	1,1	1,4	1,7	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,1
30	1,0	1,1	1,3	1,5	1,8	2,0	2,4	2,8	3,1	3,5	4,0	4,4	4,8	5,4
32	1,7	1,9	2,2	2,5	2,9	3,2	3,6	4,0	4,4	4,8	5,3	5,7	6,1	6,6
34	2,6	2,9	3,4	3,7	4,1	4,5	4,9	5,3	5,7	6,1	6,5	6,9	7,3	7,6
36	3,7	4,1	4,6	5,0	5,4	5,8	6,2	6,6	7,0	7,4	7,7	8,0	8,3	8,5
38	4,9	5,4	5,8	6,2	6,7	7,1	7,4	7,8	8,1	8,4	8,7	8,9	9,1	9,2
40	6,2	6,6	7,0	7,4	7,8	8,2	8,5	8,8	9,0	9,2	9,4	9,5	9,6	9,6
42	7,3	7,7	8,1	8,4	8,8	9,1	9,3	9,5	9,6	9,7	9,8	9,8	9,8	9,7
44	8,3	8,6	9,0	9,2	9,5	9,7	9,8	9,9	9,9	9,9	9,9	9,8	9,7	9,4
46	9,0	9,3	9,5	9,7	9,9	10,0	10,0	10,0	9,9	9,8	9,6	9,4	9,2	8,9
48	9,5	9,7	9,8	9,9	9,9	9,9	9,8	9,7	9,6	9,4	9,1	8,8	8,5	8,1

Tafel 42. Fortsetzung. Vert. Arg. III. Hor. Arg. 1

Arg.	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270
0	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
4	0,8	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,8
8	1,5	1,6	1,7	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4
12	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	2,9	2,9	2,9	2,9
16	3,1	3,2	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,4	3,4	3,4	3,3	3,3	3,2	3,1
20	3,5	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,6	3,5	3,4	3,3	3,3	3,2	3,1
24	3,6	3,6	3,6	3,5	3,5	3,4	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7
28	3,2	3,2	3,1	3,0	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2
32	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7	1,7	1,6	1,6
36	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
40	0,9	0,8	0,8	0,7	0,7	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	0,8	0,9
44	0,5	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,9
48	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3

Störungen der dritten Coordinate.

Tafel 41. Schluss. Vert. Arg. II. Hor. Arg. 1

Arg.	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
0	7,7	7,3	6,8	6,3	5,8	5,3	4,8	4,3	3,8	3,3	2,9	2,5	2,1
2	6,7	6,2	5,7	5,2	4,7	4,2	3,8	3,4	2,9	2,5	2,2	1,9	1,6
4	5,5	5,0	4,6	4,1	3,7	3,2	2,8	2,5	2,2	1,9	1,7	1,5	1,4
6	4,3	3,8	3,5	3,0	2,7	2,3	2,0	1,8	1,6	1,5	1,4	1,3	1,4
8	3,1	2,7	2,4	2,1	1,8	1,6	1,4	1,3	1,3	1,3	1,3	1,4	1,6
10	2,1	1,8	1,6	1,4	1,2	1,1	1,1	1,1	1,2	1,3	1,5	1,7	2,0
12	1,3	1,1	1,0	0,9	0,9	0,9	1,0	1,1	1,4	1,6	1,9	2,3	2,7
14	0,7	0,7	0,7	0,7	0,8	1,0	1,2	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0	3,5
16	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,3	1,6	2,0	2,4	2,9	3,4	3,9	4,5
18	0,4	0,7	0,9	1,2	1,5	1,9	2,3	2,8	3,2	3,8	4,3	4,8	5,5
20	0,8	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	3,7	4,2	4,7	5,3	5,8	6,4
22	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	3,7	4,1	4,7	5,2	5,7	6,2	6,7	7,2
24	2,3	2,7	3,2	3,7	4,2	4,7	5,2	5,7	6,2	6,7	7,1	7,5	7,9
26	3,3	3,8	4,3	4,8	5,3	5,8	6,2	6,6	7,1	7,5	7,8	8,1	8,4
28	4,5	5,0	5,4	5,9	6,3	6,8	7,2	7,5	7,8	8,1	8,3	8,5	8,6
30	5,7	6,2	6,5	7,0	7,3	7,7	8,0	8,2	8,4	8,5	8,6	8,7	8,6
32	6,8	7,3	7,6	7,9	8,2	8,4	8,6	8,7	8,7	8,7	8,7	8,6	8,4
34	7,9	8,2	8,4	8,6	8,8	8,9	8,9	8,9	8,8	8,7	8,5	8,3	8,0
36	8,7	8,9	9,0	9,1	9,1	9,1	9,0	8,9	8,6	8,4	8,1	7,7	7,3
38	9,3	9,3	9,3	9,3	9,2	9,0	8,8	8,6	8,2	7,8	7,4	7,0	6,5
40	9,6	9,5	9,4	9,2	9,0	8,7	8,4	8,0	7,6	7,1	6,6	6,1	5,5
42	9,6	9,3	9,1	8,8	8,5	8,1	7,7	7,2	6,8	6,2	5,7	5,2	4,5
44	9,2	8,9	8,6	8,2	7,8	7,3	6,9	6,3	5,8	5,3	4,7	4,2	3,6
46	8,6	8,2	7,8	7,3	6,9	6,3	5,9	5,3	4,8	4,3	3,8	3,3	2,9
48	7,7	7,3	6,8	6,3	5,8	5,3	4,8	4,3	3,8	3,3	2,9	2,5	2,1

Tafel 42. Schluss. Vert. Arg. III. Hor. Arg. 1

Arg.	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
0	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1
4	1,9	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2	2,1	2,0	2,0	1,9
8	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,3	2,2	2,2	2,0	1,9	1,8	1,7
12	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5	2,4	2,2	2,1	2,0	1,8	1,7	1,6
16	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,4	2,3	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6
20	2,9	2,8	2,7	2,6	2,4	2,3	2,2	2,0	2,0	1,9	1,8	1,8	1,7
24	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9
28	2,1	2,0	1,9	1,9	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,9	2,0	2,0	2,1
32	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,7	1,8	1,8	2,0	2,1	2,2	2,3
36	1,1	1,2	1,3	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	1,9	2,0	2,2	2,3	2,4
40	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,7	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,[illegible]
44	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,7	1,8	2,0	2,0	2,1	2,2	2,2	2,[illegible]
48	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,1	2,1	2,1	2,1	2,[illegible]

Störungen der dritten Coordinate.

Tafel 43. Vert. Arg. V. Hor. Arg. 4

Arg.	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
0	1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9	2,0	2,1	2,3	2,4	2,7	2,9	3,2
2	1,2	1,4	1,6	1,8	2,1	2,2	2,3	2,5	2,6	2,8	2,9	3,2	3,5	3,8
4	1,6	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,8	2,9	3,0	3,2	3,4	3,7	4,0	4,2
6	2,1	2,4	2,6	2,8	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	3,7	3,8	4,0	4,2	4,4
8	2,6	2,9	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	4,0	4,1	4,2	4,3	4,3
10	3,1	3,4	3,6	3,7	3,7	3,8	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1	4,1	4,2	4,1
12	3,6	3,8	3,9	3,9	3,8	3,8	3,8	3,9	3,9	3,9	3,9	3,8	3,8	3,6
14	3,9	4,0	4,0	3,9	3,8	3,8	3,7	3,7	3,7	3,6	3,6	3,4	3,3	3,0
16	4,0	4,0	4,0	3,9	3,7	3,6	3,5	3,4	3,4	3,2	3,1	2,9	2,7	2,4
18	4,0	3,9	3,8	3,6	3,4	3,2	3,1	3,0	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	3,8	3,6	3,4	3,2	2,9	2,8	2,7	2,5	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,2
22	3,4	3,1	2,9	2,7	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	1,8	1,6	1,3	1,0	0,8
24	2,9	2,6	2,4	2,2	2,0	1,9	1,8	1,6	1,5	1,3	1,2	1,0	0,8	0,6
26	2,4	2,1	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,0	0,9	0,8	0,7	0,7
28	1,9	1,6	1,4	1,3	1,3	1,2	1,2	1,1	1,1	1,0	0,9	0,9	0,8	0,9
30	1,4	1,2	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,1	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,4
32	1,1	1,0	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4	1,6	1,7	2,0
34	1,0	1,0	1,0	1,1	1,3	1,4	1,5	1,6	1,6	1,8	1,9	2,1	2,3	2,6
36	1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	1,9	2,0	2,1	2,3	2,4	2,7	2,9	3,2

Tafel 43. Fortsetzung.

Arg.	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270
0	3,6	4,0	4,3	4,5	4,6	4,6	4,4	4,1	3,6	3,1	2,6	2,2	1,8	1,6
2	4,1	4,4	4,6	4,6	4,5	4,3	4,0	3,5	3,0	2,5	2,1	1,8	1,5	1,5
4	4,4	4,5	4,6	4,4	4,2	3,8	3,4	2,9	2,4	2,0	1,6	1,4	1,3	1,4
6	4,5	4,5	4,4	4,1	3,7	3,3	2,8	2,3	1,8	1,5	1,2	1,2	1,3	1,6
8	4,3	4,2	3,9	3,6	3,1	2,6	2,1	1,7	1,3	1,1	1,0	1,2	1,4	1,8
10	3,9	3,6	3,3	2,8	2,3	1,9	1,4	1,1	0,9	0,9	1,0	1,3	1,6	2,1
12	3,4	3,0	2,6	2,1	1,6	1,2	0,9	0,7	0,7	0,8	1,1	1,5	2,0	2,4
14	2,7	2,2	1,8	1,4	1,0	0,8	0,6	0,6	0,7	1,0	1,4	1,9	2,4	2,8
16	2,0	1,6	1,2	0,9	0,6	0,5	0,5	0,7	1,0	1,4	1,9	2,4	2,9	3,2
18	1,4	1,0	0,7	0,5	0,4	0,4	0,6	0,9	1,4	1,9	2,4	2,8	3,2	3,4
20	0,9	0,6	0,4	0,4	0,5	0,7	1,0	1,5	2,0	2,5	2,9	3,2	3,5	3,5
22	0,6	0,5	0,4	0,6	0,8	1,2	1,6	2,1	2,6	3,0	3,4	3,6	3,7	3,6
24	0,5	0,5	0,6	0,9	1,3	1,7	2,2	2,7	3,2	3,5	3,8	3,8	3,7	3,4
26	0,7	0,8	1,1	1,4	1,9	2,4	2,9	3,3	3,7	3,9	4,0	3,8	3,6	3,2
28	1,1	1,4	1,7	2,2	2,7	3,1	3,6	3,9	4,1	4,1	4,0	3,7	3,4	2,9
30	1,6	2,0	2,4	2,9	3,4	3,8	4,1	4,3	4,3	4,2	3,9	3,5	3,0	2,6
32	2,3	2,8	3,2	3,6	4,0	4,2	4,4	4,4	4,3	4,0	3,6	3,1	2,6	2,2
34	3,0	3,4	3,8	4,1	4,4	4,5	4,5	4,3	4,0	3,6	3,1	2,6	2,1	1,8
36	3,6	4,0	4,3	4,5	4,6	4,6	4,4	4,1	3,6	3,1	2,6	2,2	1,8	1,6

Störungen der dritten Coordinate.

Tafel 43. Schluss. Vert. Arg. V. Hor. Arg. 1

Arg.	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390
0	1,4	1,6	1,7	2,0	2,5	3,0	3,4	3,7	4,0	4,0	4,0	3,9
2	1,5	1,8	2,1	2,5	2,9	3,3	3,7	3,9	4,0	3,9	3,8	3,6
4	1,6	2,0	2,4	2,8	3,3	3,6	3,9	3,9	3,9	3,7	3,5	3,2
6	1,9	2,4	2,8	3,2	3,6	3,8	3,9	3,8	3,6	3,3	3,0	2,6
8	2,2	2,7	3,1	3,4	3,7	3,7	3,7	3,5	3,2	2,8	2,4	2,1
10	2,6	3,0	3,4	3,6	3,7	3,6	3,4	3,1	2,7	2,3	1,9	1,6
12	2,9	3,2	3,5	3,5	3,5	3,3	3,0	2,6	2,2	1,8	1,4	1,2
14	3,2	3,4	3,6	3,5	3,3	2,9	2,5	2,1	1,7	1,4	1,1	1,0
16	3,5	3,5	3,5	3,3	2,9	2,4	2,0	1,6	1,3	1,1	0,9	0,9
18	3,6	3,4	3,3	3,0	2,5	2,0	1,6	1,3	1,0	1,0	1,0	1.1
20	3,5	3,2	2,9	2,5	2,1	1,7	1,3	1,1	1,0	1,1	1,2	1,4
22	3,4	3,0	2,6	2,1	1,7	1,4	1,1	1,1	1,1	1,3	1,5	1,8
24	3,1	2,6	2,2	1,8	1,4	1,2	1,1	1,2	1,4	1,7	2,0	2,4
26	2,8	2,3	1,9	1,6	1,3	1,3	1,3	1,5	1,8	2,2	2,6	2,9
28	2,4	2,0	1,6	1,4	1,3	1,4	1,6	1,9	2,3	2,7	3,1	3,4
30	2,1	1,8	1,5	1,5	1,5	1,7	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	3,8
32	1,8	1,6	1,4	1,5	1,7	2,1	2,5	2,9	3,3	3,6	3,9	4,0
34	1,5	1,5	1,5	1,7	2,1	2,6	3,0	3,4	3,7	3,9	4,1	4,1
36	1,4	1,6	1,7	2,0	2,5	3,0	3,4	3,7	4,0	4,0	4,0	3,9

Von der Summe aller vorhergehenden Störungen der dritten Coordi
ist die Constante

90,0

abzuziehen.

Tafel 44. Epochen.

Jahr	$\omega+\eta$	ξ	$\theta+\lambda$
1850	103,77112	0	18,80912
51	7984	— 25,0	1496
52 *B*	8858	— 50,0	2082
53	103,79699	— 75,0	2666
54	103,80601	— 99,9	3250
55	1473	— 124,9	3834
56 *B*	2347	— 150,0	4420
57	3219	— 175,0	5004
58	4090	— 200,0	5588
59	4962	— 225,0	6172
1860 *B*	5836	— 250,1	6757
61	6708	— 275,2	7341
62	7579	— 300,2	7925
63	8451	— 325,3	8509
64 *B*	103,89325	— 350,4	9095
65	103,90197	— 375,5	18,89679
66	1069	— 400,5	18,90263
67	1940	— 425,6	0847
68 *B*	2814	— 450,8	1432
69	3686	— 475,9	2016
1870	4558	— 501,0	2600
71	5430	— 526,1	3184
72 *B*	6304	— 551,3	3769
73	7175	— 576,4	4353
74	8047	— 600,6	4937
75	8919	— 626,8	5521
76 *B*	103,99793	— 652,0	6106
77	104,00665	— 677,1	6690
78	1537	— 702,3	7274
79	2408	— 727,5	7858
1880 *B*	3282	— 752,8	8443
81	4154	— 778,0	9027
82	5026	— 803,2	18,99611
83	5898	— 828,4	19,00194
84 *B*	6772	— 853,7	0780
85	7643	— 878,9	1363
86	8515	— 904,1	1947
87	104,09387	— 929,4	2531
88 *B*	104,10261	— 954,7	3116
89	1133	— 980,0	3700
1890	2005	—1005,3	4284
91	2876	—1030,5	4867
92 *B*	3751	—1055,9	5453
93	4622	—1081,2	6036
94	5494	—1106,5	6620
95	6366	—1131,8	7204
96 *B*	7240	—1157,2	7789
97	8112	—1182,5	8372
98	8984	—1207,9	8956
99	104,19856	—1233,2	19,09540
1900	104,20727	—1258,6	19,10123

Tafel 45. Bewegungen.

Tage	$\omega+\eta$	ξ	$\theta+\lambda$
100	239	— 6,9	160
200	478	—13,8	320
300	716	—20,7	480
10	24	— 0,7	16
20	48	— 1,4	32
30	72	— 2,1	48
40	96	— 2,8	64
50	119	— 3,4	80
60	143	— 4,1	96
70	167	— 4,8	112
80	191	— 5,5	128
90	215	— 6,2	144
0,5	1	0,0	1
1,0	2	— 0,1	2
1,5	4	— 0,1	2
2,0	5	— 0,1	3
2,5	6	— 0,2	4
3,0	7	— 0,2	5
3,5	8	— 0,2	5
4,0	10	— 0,3	6
4,5	11	— 0,3	7
5,0	12	— 0,3	8
5,5	13	— 0,4	9
6,0	14	— 0,4	10
6,5	16	— 0,4	10
7,0	17	— 0,5	11
7,5	18	— 0,5	12
8,0	19	— 0,5	13
8,5	20	— 0,6	14
9,0	21	— 0,6	14
9,5	23	— 0,6	15

Tafel 46. Solarnutation.

Arg. 7.

Arg.	$\omega+\eta$	ξ	$\theta+\lambda$
0	31	+2,0	10
1	28	2,0	8
2	25	2,1	6
3	22	2,1	4
4	20	2,1	3
5	17	2,0	2
6	14	1,9	1
7	11	1,8	0
8	9	1,6	0
9	7	1,4	0
10	5	1,2	0
11	3	1,0	1
12	2	0,8	1
13	1	0,5	2
14	0	+0,2	3
15	0	—0,1	4
16	0	0,3	5
17	0	0,6	7
18	1	0,8	9
19	2	1,0	11
20	4	1,2	13
21	5	1,4	15
22	7	1,6	17
23	9	1,8	19
24	12	1,9	21
25	15	2,0	23
26	18	2,1	24
27	21	2,1	26
28	24	2,1	27
29	27	2,0	29
30	29	2,0	30
31	32	1,9	31
32	35	1,8	31
33	37	1,6	32
34	39	1,4	32
35	41	1,2	32
36	43	1,0	32
37	44	0,8	31
38	45	0,5	31
39	46	—0,2	30
40	46	+0,1	28
41	46	0,3	27
42	46	0,6	25
43	45	0,8	23
44	44	1,0	21
45	43	1,2	19
46	41	1,4	17
47	39	1,6	15
48	36	1,8	13
49	33	1,9	12
50	31	+2,0	10

Tafel 47. Arg. 8. Lunarnutation.

Arg.	ω+η	D.	ξ	D.	θ+λ	D.	Arg.	ω+η	D.	ξ	D.	θ+λ	D.
0	468	18	+33,6	0,6	122	12	50	193	19	−34,3	0,6	341	13
1	486	18	33,0	0,7	134	13	51	174	18	33,7	0,8	328	14
2	504	17	32,3	0,8	147	13	52	156	18	32,9	0,9	314	14
3	521	16	31,5	1,0	160	14	53	138	17	32,0	1,1	300	15
4	537	15	30,5	1,0	174	14	54	121	16	30,9	1,1	285	14
5	552	15	29,5	1,2	188	14	55	105	15	29,8	1,3	271	15
6	567	13	28,3	1,3	202	14	56	90	14	28,5	1,3	256	14
7	580	13	27,0	1,4	216	14	57	76	13	27,2	1,5	242	15
8	593	12	25,6	1,5	230	14	58	63	12	25,7	1,6	227	14
9	605	11	24,1	1,7	244	14	59	51	11	24,1	1,7	213	15
10	616	10	22,4	1,7	258	14	60	40	10	22,4	1,8	198	15
11	626	8	20,7	1,8	272	14	61	30	8	20,6	1,9	183	14
12	634	7	18,9	1,9	286	14	62	22	7	18,7	1,9	169	14
13	641	6	17,0	1,9	300	13	63	15	5	16,8	2,0	155	14
14	647	5	15,1	2,0	313	13	64	10	5	14,8	2,0	141	13
15	652	4	13,1	2,0	326	13	65	5	3	12,8	2,1	128	13
16	656	3	11,1	2,1	339	12	66	2	2	10,7	2,1	115	12
17	659	1	9,0	2,1	351	12	67	0	0	8,6	2,2	103	12
18	660	0	6,9	2,1	363	12	68	0	1	6,4	2,2	91	11
19	660	1	4,8	2,2	375	11	69	1	2	4,2	2,2	80	11
20	659	2	2,6	2,2	386	10	70	3	4	− 2,0	2,2	69	10
21	657	4	+ 0,4	2,2	396	10	71	7	5	+ 0,2	2,2	59	9
22	653	5	− 1,8	2,2	406	9	72	12	6	2,4	2,2	50	9
23	648	7	4,0	2,1	415	9	73	18	7	4,6	2,2	41	8
24	641	8	6,1	2,2	424	7	74	25	8	6,8	2,1	33	7
25	633	9	8,3	2,1	431	7	75	33	10	8,9	2,1	26	6
26	624	10	10,4	2,1	438	6	76	43	10	11,0	2,1	20	5
27	614	11	12,5	2,0	444	5	77	53	12	13,1	2,0	15	5
28	603	12	14,5	2,0	449	4	78	65	13	15,1	1,9	10	3
29	591	13	16,5	1,9	453	4	79	78	14	17,0	1,9	7	3
30	578	14	18,4	1,9	457	2	80	92	15	18,9	1,8	4	2
31	564	15	20,3	1,8	459	2	81	107	15	20,7	1,7	2	1
32	549	16	22,1	1,7	461	0	82	122	17	22,4	1,6	1	0
33	533	17	23,8	1,6	461	0	83	139	17	24,0	1,5	1	1
34	516	18	25,4	1,5	461	1	84	156	18	25,5	1,4	2	2
35	498	18	26,9	1,4	460	2	85	174	18	26,9	1,3	4	2
36	480	19	28,3	1,3	458	3	86	192	19	28,2	1,2	6	4
37	461	20	29,6	1,1	455	4	87	211	19	29,4	1,1	10	4
38	441	20	30,7	1,1	451	5	88	230	20	30,5	1,0	14	5
39	421	21	31,8	0,9	446	6	89	250	20	31,5	0,8	19	6
40	400	21	32,7	0,8	440	7	90	270	20	32,3	0,7	25	7
41	379	21	33,5	0,6	433	7	91	290	20	33,0	0,6	32	7
42	358	21	34,1	0,5	426	8	92	310	21	33,6	0,5	39	8
43	337	21	34,6	0,4	418	9	93	331	20	34,1	0,3	47	9
44	316	21	35,0	0,2	409	10	94	351	20	34,4	0,2	56	10
45	295	21	35,2	0,1	399	10	95	371	20	34,6	0,0	66	10
46	274	21	35,3	0,0	389	11	96	391	20	34,6	0,0	76	11
47	253	20	35,3	0,2	378	12	97	411	19	34,6	0,2	87	11
48	233	20	35,1	0,3	366	12	98	430	19	34,4	0,3	98	12
49	213	20	34,8	0,5	354	13	99	449	19	34,1	0,5	110	12
50	193		−34,3		341		100	468		+33,6		122	

Taf. 48. Mittlere Anoma

Jahr	Epochen
1850	210°43209
51	297,41824
52 B	24,64271
53	111,62886
54	198,61502
55	285,60117
56 B	12,82565
57	99,81180
58	186,79796
59	273,78411
1860 B	1,00857
61	87,99473
62	174,98087
63	261,96703
64 B	349,19149
65	76,17765
66	163,16379
67	250,14995
68 B	337,37441
69	64,36056
1870	151,34671
71	238,33286
72 B	325,55732
73	52,54346
74	139,52961
75	226,51575
76 B	313,74022
77	40,72636
78	127,71251
79	214,69865
1880 B	301,92311
81	28,90925
82	115,89539
83	202,88154
84 B	290,10599
85	17,09214
86	104,07827
87	191,06442
88 B	278,28887
89	5,27502
1890	92,26115
91	179,24730
92 B	266,47175
93	353,45788
94	80,44402
95	167,43015
96 B	254,65462
97	341,64075
98	68,62689
99	155,61302
1900	242,59916

Tage	Bewe
100	23°83
200	47,66
300	71,49
10	2,38
20	4,76
30	7,14
40	9,53
50	11,91
60	14,29
70	16,68
80	19,06
90	21,44
0,5	0,11
1,0	0,23
1,5	0,35
2,0	0,47
2,5	0,59
3,0	0,71
3,5	0,83
4,0	0,95
4,5	1,07
5,0	1,19
5,5	1,31
6,0	1,42
6,5	1,54
7,0	1,66
7,5	1,78
8,0	1,90
8,5	2,02
9,0	2,14
9,5	2,26

Mittelpunktsgleichung.

Tafel 49. Arg.: Mittlere Anomalie + deren Störungen.

0°+	D.	5°+	D.	10°+	D.	15°+	D.	20°+	D.	25°+	D.	Arg.
0°00000		0°97501		1°93968		2°88380		3°79765		4°67206		5°0
	1954		1943		1912		1860		1790		1703	
0,01954		0,99444		5880		2,90240		3,81555		4,68909		4,9
	1954		1943		1911		1859		1789		1701	
3908		1,01387		7791		2099		3344		4,70610		4,8
	1954		1942		1909		1858		1787		1699	
5862		3329		1,99700		3957		5131		2309		4,7
	1953		1942		1909		1857		1785		1697	
7815		5271		2,01609		5814		6916		4006		4,6
	1954		1941		1908		1856		1784		1695	
0,09769		7212		3517		7670		3,88700		5701		4,5
	1953		1941		1908		1855		1783		1693	
0,11722		1,09153		5425		2,99525		3,90483		7394		4,4
	1953		1940		1907		1853		1780		1691	
3675		1,11093		7332		3,01378		2263		4,79085		4,3
	1953		1939		1906		1851		1779		1689	
5628		3032		2,09238		3229		4042		4,80774		4,2
	1953		1940		1905		1850		1778		1687	
7581		4972		2,11143		5079		5820		2461		4,1
	1953		1939		1904		1849		1776		1686	
0,19534		6911		3047		6928		7596		4147		4,0
	1953		1939		1902		1848		1774		1684	
0,21487		1,18850		4949		3,08776		3,99370		5831		3,9
	1953		1938		1902		1847		1773		1681	
3440		1,20788		6851		3,10623		4,01143		7512		3,8
	1953		1937		1901		1846		1771		1679	
5393		2725		2,18752		2469		2914		4,89191		3,7
	1953		1937		1901		1844		1769		1677	
7346		4662		2,20653		4313		4683		4,90868		3,6
	1953		1936		1900		1843		1767		1675	
0,29299		6598		2553		6156		6450		2543		3,5
	1952		1935		1898		1841		1766		1673	
0,31251		1,28533		4451		7997		8216		4216		3,4
	1952		1935		1897		1840		1764		1671	
3203		1,30468		6348		3,19837		4,09980		5887		3,3
	1952		1935		1896		1839		1763		1669	
5155		2403		2,28244		3,21676		4,11743		7556		3,2
	1952		1934		1895		1838		1761		1668	
7107		4337		2,30139		3514		3504		4,99224		3,1
	1952		1933		1895		1836		1759		1665	
0,39059		6270		2034		5350		5263		5,00889		3,0
	1952		1933		1893		1835		1757		1663	
0,41011		1,38203		3927		7185		7020		2552		2,9
	1952		1932		1892		1833		1756		1661	
2963		1,40135		5819		3,29018		4,18776		4213		2,8
	1952		1932		1891		1832		1754		1659	
4915		2067		7710		3,30850		4,20530		5872		2,7
	1951		1931		1891		1830		1752		1656	
6866		3998		2,39601		2680		2282		7528		2,6
	1951		1931		1890		1829		1751		1655	
0,48817		5929		2,41491		4509		4033		5,09183		2,5
	1950		1930		1889		1828		1749		1653	
0,50767		7859		3380		6337		5782		5,10836		2,4
	1951		1929		1888		1826		1747		1651	
2718		1,49788		5268		8163		7529		2487		2,3
	1950		1929		1886		1825		1745		1649	
4668		1,51717		7154		3,39988		4,29274		4136		2,2
	1950		1928		1886		1823		1743		1647	
6618		3645		2,49040		3,41811		4,31017		5783		2,1
	1950		1927		1884		1822		1742		1644	
0,58568		5572		2,50924		3633		2759		7427		2,0
	1950		1927		1883		1821		1740		1642	
0,60518		7499		2807		5454		4499		5,19069		1,9
	1949		1926		1882		1819		1738		1640	
2467		1,59425		4689		7273		6237		5,20709		1,8
	1949		1925		1882		1818		1736		1638	
4416		1,61350		6571		3,49091		7973		2347		1,7
	1949		1924		1880		1817		1735		1636	
6365		3274		2,58451		3,50908		4,39708		3983		1,6
	1948		1924		1879		1815		1732		1634	
0,68313		5198		2,60330		2723		4,41440		5617		1,5
	1948		1923		1878		1813		1731		1632	
0,70261		7121		2208		4536		3171		7249		1,4
	1948		1922		1877		1812		1729		1629	
2209		1,69043		4085		6348		4900		5,28878		1,3
	1948		1922		1875		1810		1727		1627	
4157		1,70965		5960		8158		6627		5,30505		1,2
	1948		1921		1875		1809		1725		1626	
6105		2886		7835		3,59967		4,48352		2131		1,1
	1947		1920		1873		1808		1724		1623	
8052		4806		2,69708		3,61775		4,50076		3754		1,0
	1947		1920		1873		1806		1722		1621	
0,79999		6726		2,71581		3581		1798		5375		0,9
	1946		1919		1871		1805		1720		1619	
0,81945		1,78645		3452		5386		3518		6994		0,8
	1946		1918		1870		1803		1717		1617	
3891		1,80563		5322		7189		5235		5,38611		0,7
	1945		1918		1868		1801		1716		1614	
5836		2481		7190		3,68990		6951		5,40225		0,6
	1946		1916		1868		1800		1714		1612	
7782		4397		2,79058		3,70790		4,58665		1837		0,5
	1945		1916		1867		1798		1712		1610	
0,89727		6313		2,80925		2588		4,60377		3447		0,4
	1944		1915		1866		1797		1710		1608	
0,91671		1,88228		2791		4385		2087		5055		0,3
	1944		1914		1864		1795		1709		1606	
3615		1,90142		4655		6180		3796		6661		0,2
	1943		1913		1863		1793		1706		1604	
5558		1,92055		6518		7973		5502		8265		0,1
	1943		1913		1862		1792		1704		1601	
0,97501		1,93968		2,88380		3,79765		4,67206		5,49866		0,0
355°—		350°—		345°—		340°—		335°—		330°—		Arg.

Mittelpunktsgleichung.

Tafel 49. Fortsetzung. Arg.: Mittlere Anomalie + deren Störungen.

Arg.	30°+	D.	35°+	D.	40°+	D.	45°+	D.	50°+	D.	55°+	D.
0,0	5,49866	1599	6,26986	1481	6,97912	1351	7,62086	1212	8,19056	1063	8,68475	910
0,1	5,51465	1597	6,28467	1479	6,99263	1348	3298	1208	8,20119	1060	8,69385	906
0,2	3062	1594	6,29946	1477	7,00611	1346	4506	1205	1179	1057	8,70291	903
0,3	4656	1592	6,31423	1474	1957	1343	5711	1203	2236	1054	1194	900
0,4	6248	1591	2897	1471	3300	1340	6914	1200	3290	1051	2094	897
0,5	7839	1588	4368	1469	4640	1338	8114	1197	4341	1049	2991	894
0,6	5,59427	1586	5837	1466	5978	1335	7,69311	1194	5390	1045	3885	891
0,7	5,61013	1583	7303	1464	7313	1333	7,70505	1191	6435	1042	4776	887
0,8	2596	1581	6,38767	1461	8646	1330	1696	1188	7477	1040	5663	884
0,9	4177	1579	6,40228	1458	7,09976	1327	2884	1185	8517	1036	6547	881
1,0	5756	1576	1686	1456	7,11303	1324	4069	1182	8,29553	1033	7428	878
1,1	7332	1574	3142	1454	2627	1321	5251	1180	8,30586	1029	8306	875
1,2	5,68906	1572	4596	1451	3948	1318	6431	1176	1615	1027	8,79181	872
1,3	5,70478	1570	6047	1449	5266	1316	7607	1174	2642	1024	8,80053	869
1,4	2048	1568	7496	1446	6582	1313	8781	1171	3666	1021	0922	866
1,5	3616	1565	6,48942	1444	7895	1310	7,79952	1168	4687	1018	1788	862
1,6	5181	1563	6,50386	1441	7,19205	1308	7,81120	1165	5705	1015	2650	859
1,7	6744	1560	1827	1438	7,20513	1305	2285	1162	6720	1012	3509	856
1,8	8304	1558	3265	1435	1818	1302	3447	1158	7732	1009	4365	853
1,9	5,79862	1555	4700	1433	3120	1299	4605	1156	8741	1005	5218	850
2,0	5,81417	1554	6133	1431	4419	1296	5761	1153	8,39746	1003	6068	847
2,1	2971	1551	7564	1428	5715	1293	6914	1150	8,40749	1000	6915	843
2,2	4522	1549	6,58992	1426	7008	1291	8064	1147	1749	996	7758	840
2,3	6071	1546	6,60418	1423	8299	1288	7,89211	1144	2745	993	8598	837
2,4	7617	1544	1841	1420	7,29587	1285	7,90355	1141	3738	990	8,89435	834
2,5	5,89161	1542	3261	1418	7,30872	1283	1496	1139	4728	987	8,90269	831
2,6	5,90703	1539	4679	1415	2155	1280	2635	1135	5715	984	1100	828
2,7	2242	1537	6094	1412	3435	1277	3770	1132	6699	981	1928	824
2,8	3779	1535	7506	1410	4712	1274	4902	1129	7680	978	2752	822
2,9	5314	1532	6,68916	1407	5986	1271	6031	1126	8658	975	3574	818
3,0	6846	1530	6,70323	1405	7257	1268	7157	1123	8,49633	972	4392	815
3,1	8376	1528	1728	1402	8525	1266	8280	1121	8,50605	968	5207	812
3,2	5,99904	1525	3130	1399	7,39791	1263	7,99401	1117	1573	966	6019	809
3,3	6,01429	1523	4529	1397	7,41054	1260	8,00518	1115	2539	962	6828	806
3,4	2952	1521	5926	1394	2314	1257	1633	1112	3501	959	7634	803
3,5	4473	1518	7320	1391	3571	1255	2745	1108	4460	955	8437	799
3,6	5991	1515	6,78711	1389	4826	1251	3853	1106	5415	953	8,99236	796
3,7	7506	1513	6,80100	1386	6077	1248	4959	1102	6368	950	9,00032	793
3,8	6,09019	1511	1486	1384	7325	1246	6061	1099	7318	947	0825	790
3,9	6,10530	1508	2870	1381	8571	1243	7160	1096	8265	944	1615	786
4,0	2038	1506	4251	1378	7,49814	1240	8256	1093	8,59209	941	2401	784
4,1	3544	1503	5629	1376	7,51054	1237	8,09349	1091	8,60150	937	3185	780
4,2	5047	1501	7005	1373	2291	1234	8,10440	1087	1087	935	3965	777
4,3	6548	1498	8378	1370	3525	1232	1527	1085	2022	931	4742	774
4,4	8046	1496	6,89748	1367	4757	1229	2612	1082	2953	928	5516	771
4,5	6,19542	1494	6,91115	1365	5986	1226	3694	1078	3881	925	6287	767
4,6	6,21036	1491	2480	1362	7212	1222	4772	1075	4806	922	7054	765
4,7	2527	1489	3842	1359	8434	1220	5847	1073	5728	919	7819	761
4,8	4016	1486	5201	1357	7,59654	1217	6920	1070	6647	916	8580	758
4,9	5502	1484	6558	1354	7,60871	1215	7990	1066	7563	912	9,09338	754
5,0	6,26986		6,97912		7,62086		8,19056		8,68475		9,10092	
Arg.	325°—		320°—		315°—		310°—		305°—		300°—	

Mittelpunktsgleichung.

Tafel 49. Fortsetzung. Arg.: Mittlere Anomalie + deren Störungen.

60°+	D.	65°+	D.	70°+	D.	75°+	D.	80°+	D.	85°+	D.	Arg.
9,10092		9,43752		9,69393		9,87024		9,96735		9,98672		5,0
	752		592		431		272		114		39	
0844		4344		9,69824		7296		6849		8633		4,9
	748		588		428		268		111		43	
1592		4932		9,70252		7564		6960		8590		4,8
	745		585		425		265		108		45	
2337		5517		0677		7829		7068		8545		4,7
	742		582		421		262		105		48	
3079		6099		1098		8091		7173		8497		4,6
	739		579		418		259		102		51	
3818		6678		1516		8350		7275		8446		4,5
	735		575		414		255		99		55	
4553		7253		1930		8605		7374		8391		4,4
	733		572		412		253		96		57	
5286		7825		2342		8858		7470		8334		4,3
	729		569		408		249		92		60	
6015		8394		2750		9107		7562		8274		4,2
	726		566		405		246		89		63	
6741		8960		3155		9353		7651		8211		4,1
	723		562		402		243		86		67	
7464		9,49522		3557		9596		7737		8144		4,0
	720		560		399		240		84		70	
8184		9,50082		3956		9,89836		7821		8074		3,9
	716		556		396		236		80		72	
8900		0638		4352		9,90072		7901		8002		3,8
	713		553		393		233		77		75	
9,19613		1191		4745		0305		7978		7927		3,7
	709		550		389		230		74		79	
9,20322		1741		5134		0535		8052		7848		3,6
	707		546		386		227		71		82	
1029		2287		5520		0762		8123		7766		3,5
	704		543		383		224		68		84	
1733		2830		5903		0986		8191		7682		3,4
	701		540		380		221		65		88	
2434		3370		6283		1207		8256		7594		3,3
	697		537		376		218		61		90	
3131		3907		6659		1425		8317		7504		3,2
	694		534		374		215		59		93	
3825		4441		7033		1640		8376		7411		3,1
	691		530		370		211		55		96	
4516		4971		7403		1851		8431		7315		3,0
	688		528		367		209		53		99	
5204		5499		7770		2060		8484		7216		2,9
	684		524		364		205		49		103	
5888		6023		8134		2265		8533		7113		2,8
	681		521		361		202		46		106	
6569		6544		8495		2467		8579		7007		2,7
	678		517		357		199		43		108	
7247		7061		8852		2666		8622		6899		2,6
	676		515		354		196		40		112	
7923		7576		9206		2862		8662		6787		2,5
	672		511		352		192		37		114	
8595		8087		9558		3054		8699		6673		2,4
	669		508		348		190		34		118	
9264		8595		9,79906		3244		8733		6555		2,3
	665		505		344		186		31		120	
9,29929		9100		9,80250		3430		8764		6435		2,2
	662		502		341		183		28		123	
9,30591		9,59602		0591		3613		8792		6312		2,1
	658		498		338		180		25		126	
1249		9,60100		0929		3793		8817		6186		2,0
	656		496		335		177		22		129	
1905		0596		1264		3970		8839		6057		1,9
	652		492		331		173		18		132	
2557		1088		1595		4143		8857		5925		1,8
	649		488		329		171		16		135	
3206		1576		1924		4314		8873		5790		1,7
	646		485		325		167		12		138	
3852		2061		2249		4481		8885		5652		1,6
	643		482		323		164		10		141	
4495		2543		2572		4645		8895		5511		1,5
	640		479		319		161		6		144	
5135		3022		2891		4806		8901		5367		1,4
	636		476		316		158		4		147	
5771		3498		3207		4964		8905		5220		1,3
	633		473		312		155		0		150	
6404		3971		3519		5119		8905		5070		1,2
	630		470		310		152		3		153	
7034		4441		3829		5271		8902		4917		1,1
	627		466		306		149		6		156	
7661		4907		4135		5420		8896		4761		1,0
	624		463		303		146		9		158	
8285		5370		4438		5566		8887		4603		0,9
	620		460		300		142		12		161	
8905		5830		4738		5708		8875		4442		0,8
	617		457		297		139		15		165	
9,39522		6287		5035		5847		8860		4277		0,7
	614		453		294		136		18		168	
9,40136		6740		5329		5983		8842		4109		0,6
	610		450		291		133		21		171	
0746		7190		5620		6116		8821		3938		0,5
	607		447		287		130		24		173	
1353		7637		5907		6246		8797		3765		0,4
	604		444		284		127		27		177	
1957		8081		6191		6373		8770		3588		0,3
	602		440		281		124		30		179	
2559		8521		6472		6497		8740		3409		0,2
	598		438		278		121		33		183	
3157		8959		6750		6618		8707		3226		0,1
	595		434		274		117		35		185	
9,43752		9,69393		9,87024		9,96735		9,98672		9,93041		0,0
295°—		290°—		285°—		280°—		275°—		270°—		Arg.

Mittelpunktsgleichung.

Tafel 49. Fortsetzung. Arg.: Mittlere Anomalie + deren Störungen.

Arg.	90°+	D.	95°+	D.	100°+	D.	105°+	D.	110°+	D.	115°+	D.
0,0	9,93041	188	9,80093	331	9,60121	469	9,33450	599	9,00431	723	8,61437	838
0,1	2853	191	9,79762	334	9,59652	472	2851	602	8,99708	725	8,60599	840
0,2	2662	194	9428	337	9180	474	2249	604	8983	727	8,59759	843
0,3	2468	197	9091	340	8706	477	1645	607	8256	730	8916	845
0,4	2271		8751		8229		1038		7526		8071	
		200		343		480		610		732		847
0,5	2071	203	8408	346	7749	482	9,30428	612	6794	734	7224	849
0,6	1868	206	8062	349	7267	485	9,29816	615	6060	737	6375	851
0,7	1662	208	7713	351	6782	488	9201	617	5323	739	5524	853
0,8	1454	212	7362	354	6294	490	8584	620	4584	742	4671	856
0,9	1242		7008		5804		7964		3842		3815	
		214		357		493		622		744		858
1,0	1028	218	6651	360	5311	496	7342	625	3098	746	2957	860
1,1	0810	220	6291	362	4815	498	6717	628	2352	749	2097	862
1,2	0590	223	5929	365	4317	501	6089	630	1603	751	1235	864
1,3	0367	226	5564	368	3816	503	5459	632	0852	753	8,50371	867
1,4	9,90141		5196		3313		4827		8,90099		8,49504	
		229		371		506		635		756		869
1,5	9,89912	232	4825	373	2807	508	4192	637	8,89343	758	8635	872
1,6	9680	235	4452	377	2299	511	3555	640	8585	760	7763	873
1,7	9445	237	4075	379	1788	514	2915	642	7825	763	6890	876
1,8	9208	241	3696	381	1274	517	2273	644	7062	765	6014	878
1,9	8967		3315		0757		1629		6297		5136	
		243		384		519		647		768		880
2,0	8724	247	2931	388	9,50238	522	0982	649	5529	770	4256	882
2,1	8477	249	2543	390	9,49716	525	9,20333	652	4759	772	3374	884
2,2	8228	252	2153	393	9191	527	9,19681	654	3987	775	2490	886
2,3	7976	255	1760	396	8664	529	9027	657	3212	777	1604	889
2,4	7721		1364		8135		8370		2435		8,40715	
		258		398		532		659		779		890
2,5	7463	260	0966	401	7603	535	7711	662	1656	781	8,39825	893
2,6	7203	264	0565	404	7068	538	7049	665	0875	783	8932	895
2,7	6939	266	9,70161	406	6530	540	6384	667	8,80092	786	8037	897
2,8	6673	269	9,69755	410	5990	543	5717	669	8,79306	788	7140	899
2,9	6404		9345		5447		5048		8518		6241	
		271		412		546		672		791		902
3,0	6133	275	8933	415	4901	548	4376	674	7727	793	5339	904
3,1	5858	278	8518	418	4353	550	3702	677	6934	795	4435	906
3,2	5580	281	8100	420	3803	553	3025	679	6139	797	3529	908
3,3	5299	283	7680	423	3250	556	2346	682	5342	800	2621	910
3,4	5016		7257		2694		1664		4542		1711	
		287		426		559		684		802		912
3,5	4729	289	6831	428	2135	561	0980	686	3740	805	8,30799	915
3,6	4440	292	6403	431	1574	564	9,10294	689	2935	807	8,29884	916
3,7	4148	295	5972	434	1010	566	9,09605	691	2128	808	8968	918
3,8	3853	298	5538	437	9,40444	569	8914	694	1320	811	8050	921
3,9	3555		5101		9,39875		8220		8,70509		7129	
		300		439		571		696		814		923
4,0	3255	304	4662	442	9304	574	7524	698	8,69695	815	6206	925
4,1	2951	306	4220	444	8730	576	6826	701	8880	818	5281	927
4,2	2645	309	3776	448	8154	579	6125	703	8062	820	4354	929
4,3	2336	312	3328	450	7575	582	5422	706	7242	822	3425	931
4,4	2024		2878		6993		4716		6420		2494	
		315		453		584		708		825		933
4,5	1709	317	2425	455	6409	587	4008	711	5595	827	1561	936
4,6	1392	321	1970	458	5822	589	3297	713	4768	829	8,20625	937
4,7	1071	323	1512	461	5233	592	2584	715	3939	832	8,19688	939
4,8	0748	326	1051	464	4641	594	1869	718	3107	834	8749	942
4,9	0422	329	0587	466	4047	597	1151	720	2273	836	7807	944
5,0	9,80093		9,60121		9,33450		9,00431		8,61437		8,16863	
Arg.	265°—		260°—		255°—		250°—		245°—		240°—	

Mittelpunktsgleichung.

Tafel 49. Fortsetzung. Arg.: Mittlere Anomalie + deren Störungen.

120°+	D.	125°+	D.	130°+	D.	135°+	D.	140°+	D.	145°+	D.	Arg.
8,16863	946	7,67111	1045	7,12593	1136	6,53739	1219	5,97970	1292	5,24718	1357	5,0
5917	948	6066	1047	7,11457	1138	2520	1220	5,89678	1294	3361	1359	4,9
4969	950	5019	1049	7,10319	1140	1300	1222	8384	1295	2002	1359	4,8
4019	952	3970	1051	7,09179	1141	6,50078	1223	7089	1297	5,20643	1361	4,7
3067		2919		8038		6,48855		5792		5,19282		4,6
	954		1053		1143		1224		1298		1362	
2113	956	1866	1054	6895	1144	7631	1226	4494	1299	7920	1364	4,5
1157	958	7,60812	1057	5751	1146	6405	1228	3195	1301	6556	1365	4,4
8,10199	960	7,59755	1058	4605	1148	5177	1229	1894	1302	5191	1366	4,3
8,09239	962	8697	1060	3457	1150	3948	1231	5,80592	1303	3825	1367	4,2
8277		7637		2307		2717		5,79289		2458		4,1
	964		1062		1152		1232		1304		1368	
7313	966	6575	1064	1155	1153	1485	1234	7985	1306	5,11090	1370	4,0
6347	968	5511	1065	7,00002	1155	6,40251	1235	6679	1308	5,09720	1370	3,9
5379	970	4446	1068	6,98847	1157	6,39016	1237	5371	1309	8350	1372	3,8
4409	973	3378	1070	7690	1158	7779	1238	4062	1310	6978	1373	3,7
3436		2308		6532		6541		2752		5605		3,6
	975		1072		1160		1240		1312		1374	
2461	976	1236	1073	5372	1161	5301	1242	1440	1313	4231	1376	3,5
1485	979	7,50163	1075	4211	1163	4059	1243	5,70127	1314	2855	1377	3,4
8,00506	980	7,49088	1077	3048	1165	2816	1245	5,68813	1316	1478	1378	3,3
7,99526	982	8011	1079	1883	1167	1571	1246	7497	1317	5,00100	1379	3,2
8544		6932		6,90716		6,30325		6180		4,98721		3,1
	984		1081		1168		1248		1318		1380	
7560	987	5851	1082	6,89548	1170	6,29077	1249	4862	1319	7341	1381	3,0
6573	989	4769	1084	8378	1172	7828	1251	3543	1321	5960	1382	2,9
5584	991	3685	1086	7206	1173	6577	1252	2222	1322	4578	1383	2,8
4593	992	2599	1088	6033	1175	5325	1253	5,60900	1324	3195	1385	2,7
2601		1511		4858		4072		5,59576		1810		2,6
	994		1090		1176		1255		1325		1386	
2607	996	7,40421	1092	3682	1178	2817	1256	8251	1326	4,90424	1387	2,5
1611	999	7,39329	1094	2504	1180	1561	1258	6925	1327	4,89037	1388	2,4
7,90612	1000	8235	1095	1324	1181	6,20303	1259	5598	1328	7649	1390	2,3
7,89612	1003	7140	1097	6,80143	1183	6,19044	1261	4270	1330	6259	1390	2,2
8609		6043		6,78960		7783		2940		4869		2,1
	1004		1099		1185		1263		1332		1392	
7605	1006	4944	1101	7775	1187	6520	1264	1608	1333	3477	1392	2,0
6599	1008	3843	1102	6588	1188	5256	1265	5,50275	1334	2085	1393	1,9
5591	1010	2741	1104	5400	1190	3991	1267	5,48941	1335	4,80692	1395	1,8
4581	1012	1637	1106	4210	1191	2724	1268	7606	1336	4,79297	1396	1,7
3569		7,30531		3019		1456		6270		7901		1,6
	1014		1108		1193		1270		1337		1397	
2555	1016	7,29423	1109	1826	1194	6,10186	1271	4933	1339	6504	1398	1,5
1539	1018	8314	1112	6,70632	1196	6,08915	1273	3594	1340	5106	1399	1,4
7,80521	1019	7202	1113	6,69436	1198	7642	1274	2254	1341	3707	1401	1,3
7,79502	1022	6089	1115	8238	1200	6368	1276	5,40913	1343	2306	1401	1,2
8480		4974		7038		5092		5,39570		4,70905		1,1
	1024		1117		1201		1277		1344		1402	
7456	1026	3857	1119	5837	1203	3815	1278	8226	1345	4,69503	1403	1,0
6430	1028	2738	1120	4634	1204	2537	1279	6881	1346	8100	1405	0,9
5402	1030	1618	1122	3430	1206	6,01258	1281	5535	1348	6695	1406	0,8
4372	1031	7,20496	1123	2224	1208	5,99977	1283	4187	1349	5289	1407	0,7
3341		7,19373		6,61016		8694		2838		3882		0,6
	1034		1126		1209		1284		1350		1408	
2307	1035	8247	1127	6,59807	1210	7410	1285	1488	1351	2474	1409	0,5
1272	1038	7120	1129	8597	1212	6125	1287	5,30137	1353	4,61065	1410	0,4
7,70234	1039	5991	1131	7385	1214	4838	1288	5,28784	1354	4,59655	1410	0,3
7,69195	1041	4860	1133	6171	1215	3550	1289	7430	1355	8245	1412	0,2
7,68154	1043	3727	1134	4956	1217	2261	1291	6075	1357	6833	1413	
7,67111		7,12593		6,53739		5,90970		5,24718		4,55420		
235°—		230°—		225°—		220°—		215°—		210°—		

Mittelpunktsgleichung.

Tafel 49. Schluss. Arg.: Mittlere Anomalie + deren Störungen.

Arg.	150°+	D.	155°+	D.	160°+	D.	165°+	D.	170°+	D.	175°+	D.
0°0	4°55420	1414	3°83508	1462	3°09420	1501	2°33588	1531	1°56450	1553	0°78442	1566
0,1	4006	1415	3,82046	1463	7919	1502	2,32057	1532	4897	1554	6876	1566
0,2	2591	1416	3,80583	1464	6417	1503	2,30525	1533	3343	1553	5310	1566
0,3	4,51175	1417	3,79119	1464	4914	1503	2,28992	1533	1790	1554	3744	1567
0,4	4,49758	1418	7655	1465	3411	1504	7459	1534	1,50236	1554	2177	1566
0,5	8340	1419	6190	1466	1907	1505	5925	1534	1,48682	1555	0,70611	1567
0,6	6921	1420	4724	1467	3,00402	1505	4391	1535	7127	1555	0,69044	1567
0,7	5501	1422	3257	1468	2,98897	1506	2856	1535	5572	1556	7477	1567
0,8	4079	1422	1789	1469	7391	1506	2,21321	1535	4016	1556	5910	1567
0,9	2657	1424	3,70320	1469	5885	1507	2,19786	1536	2460	1556	4343	1567
1,0	4,41233	1424	3,68851	1471	4378	1508	8250	1536	1,40904	1556	2776	1567
1,1	4,39809	1426	7380	1471	2870	1508	6714	1537	1,39348	1556	0,61209	1568
1,2	8383	1426	5909	1472	2,91362	1509	5177	1537	7792	1557	0,59641	1568
1,3	6957	1427	4437	1473	2,89853	1509	3640	1538	6235	1557	8073	1568
1,4	5530	1429	2964	1474	8344	1511	2102	1538	4678	1558	6505	1568
1,5	4101	1430	1490	1475	6833	1511	2,10564	1539	3120	1558	4937	1568
1,6	2671	1430	3,60015	1475	5322	1512	2,09025	1539	1562	1558	3369	1568
1,7	4,31241	1432	3,58540	1476	3810	1512	7486	1540	1,30004	1558	1801	1568
1,8	4,29809	1432	7064	1477	2298	1513	5946	1540	1,28446	1559	0,50233	1569
1,9	8377	1433	5587	1478	2,80785	1514	4406	1541	6887	1559	0,48664	1569
2,0	6944	1434	4109	1479	2,79271	1514	2865	1541	5328	1559	7095	1569
2,1	5510	1435	2630	1479	7757	1515	2,01324	1542	3769	1560	5526	1570
2,2	4075	1436	3,51151	1480	6242	1515	1,99782	1542	2209	1560	3956	1569
2,3	2639	1437	3,49671	1481	4727	1516	8240	1542	1,20649	1560	2387	1569
2,4	4,21202	1438	8190	1482	3211	1517	6698	1543	1,19089	1560	0,40818	1569
2,5	4,19764	1439	6708	1483	1694	1517	5155	1543	7529	1560	0,39249	1569
2,6	8325	1440	5225	1483	2,70177	1518	3612	1544	5969	1561	7680	1569
2,7	6885	1441	3742	1484	2,68659	1519	2068	1544	4408	1562	6111	1570
2,8	5444	1442	2258	1485	7140	1519	1,90524	1544	2846	1562	4541	1570
2,9	4002	1443	3,40773	1485	5621	1520	1,88980	1545	1,11284	1562	2971	1570
3,0	2559	1444	3,39288	1486	4101	1520	7435	1546	1,09722	1562	0,31401	1570
3,1	4,11115	1445	7802	1487	2581	1521	5889	1546	8160	1562	0,29831	1570
3,2	4,09670	1446	6315	1488	2,61060	1521	4343	1547	6598	1562	8261	1569
3,3	8224	1447	4827	1489	2,59539	1522	2796	1547	5036	1563	6692	1570
3,4	6777	1447	3338	1490	8017	1523	1,81249	1547	3473	1563	5122	1570
3,5	5330	1448	1848	1490	6494	1523	1,79702	1548	1910	1563	3552	1570
3,6	3882	1450	3,30358	1491	4971	1524	8154	1548	1,00347	1563	1982	1570
3,7	2432	1450	3,28867	1492	3447	1524	6606	1548	0,98784	1564	0,20412	1570
3,8	4,00982	1451	7375	1492	1923	1525	5058	1548	7220	1564	0,18842	1570
3,9	3,99531	1452	5883	1493	2,50398	1526	3510	1549	5656	1564	7272	1569
4,0	8079	1453	4390	1494	2,48872	1526	1961	1549	4092	1564	5703	1570
4,1	6626	1454	2896	1494	7346	1527	1,70412	1550	2528	1564	4133	1571
4,2	5172	1455	3,21402	1496	5819	1527	1,68862	1550	0,90964	1564	2562	1570
4,3	3717	1455	3,19906	1496	4292	1527	7312	1551	0,89400	1565	0,10992	1570
4,4	2262	1457	8410	1497	2765	1528	5761	1551	7835	1565	0,09422	1570
4,5	3,90805	1457	6913	1497	2,41237	1529	4210	1551	6270	1565	7852	1570
4,6	3,89348	1459	5416	1498	2,39708	1529	2659	1552	4705	1565	6282	1570
4,7	7889	1459	3918	1499	8179	1530	1,61107	1552	3140	1566	4712	1571
4,8	6430	1461	2419	1499	6649	1530	1,59555	1552	1574	1566	3141	1570
4,9	4969	1461	3,10920	1500	5119	1531	1,58003	1553	0,80008	1566	0,01571	1571
5,0	3,83508		3,09420		2,33588		1,56450		0,78442		0,00000	
Arg.	205°—		200°—		195°—		190°—		185°—		180°—	

Reduction der Länge auf den Aequator.

Tafel 50. Arg. $f + \omega + \eta$

0° 1800° −	D.	5° 1850° −	D.	10° 1900° −	D.	15° 1950° −	D.	20° 2000° −	D.	25° 2050° −	D.	Arg.
0°,00000	2033	1°,01249	2010	2°,00280	1943	2°,94872	1831	3°,82794	1675	4°,61811	1474	5°,0
0,02033	2032	3259	2009	2223	1941	6703	1829	4469	1672	3285	1470	4,9
4065	2033	5268	2008	4164	1939	2,98532	1826	6141	1668	4755	1465	4,8
6098	2032	7276	2007	6103	1938	3,00358	1823	7809	1664	6220	1461	4,7
0,08130	2032	1,09283	2006	8041	1935	2181	1820	3,89473	1660	7681	1456	4,6
0,10162	2032	1,11289	2005	2,09976	1934	4001	1818	3,91133	1657	4,69137	1452	4,5
2194	2032	3294	2004	2,11910	1932	5819	1815	2790	1653	4,70589	1447	4,4
4226	2032	5298	2003	3842	1930	7634	1811	4443	1650	2036	1443	4,3
6258	2032	7301	2002	5772	1928	3,09445	1809	6093	1646	3479	1438	4,2
0,18290	2031	1,19303	2001	7700	1926	3,11254	1807	7739	1642	4917	1433	4,1
0,20321	2031	1,21304	2000	2,19626	1924	3061	1803	3,99381	1638	6350	1429	4,0
2352	2031	3304	1998	2,21550	1921	4864	1801	4,01019	1635	7779	1424	3,9
4383	2031	5302	1997	3471	1920	6665	1798	2654	1631	4,79203	1419	3,8
6414	2031	7299	1997	5391	1919	3,18463	1795	4285	1627	4,80622	1415	3,7
0,28445	2031	1,29296	1996	7310	1916	3,20258	1792	5912	1623	2037	1410	3,6
0,30476	2030	1,31292	1994	2,29226	1914	2050	1789	7535	1620	3447	1405	3,5
2506	2030	3286	1993	2,31140	1912	3839	1786	4,09155	1615	4852	1401	3,4
4536	2030	5279	1992	3052	1910	5625	1784	4,10770	1612	6253	1396	3,3
6566	2029	7271	1991	4962	1908	7409	1780	2382	1608	7649	1391	3,2
0,38595	2029	1,39262	1990	6870	1905	3,29189	1778	3990	1604	4,89040	1387	3,1
0,40624	2029	1,41252	1988	2,38775	1904	3,30967	1774	5594	1600	4,90427	1381	3,0
2653	2028	3240	1987	2,40679	1901	2741	1771	7194	1596	1808	1377	2,9
4681	2028	5227	1986	2580	1899	4512	1768	4,18790	1592	3185	1372	2,8
6709	2027	7213	1984	4479	1897	6280	1765	4,20382	1588	4557	1367	2,7
0,48736	2027	1,49197	1983	6376	1895	8045	1762	1970	1584	5924	1362	2,6
0,50763	2026	1,51180	1982	2,48271	1893	3,39807	1758	3554	1581	7286	1357	2,5
2789	2026	3162	1981	2,50164	1890	3,41565	1755	5135	1576	8643	1352	2,4
4815	2026	5143	1979	2054	1888	3320	1753	6711	1572	4,99995	1348	2,3
6841	2025	7122	1978	3942	1886	5073	1750	8283	1568	5,01343	1343	2,2
0,58866	2025	1,59100	1976	5828	1883	6823	1746	4,29851	1564	2686	1337	2,1
0,60891	2024	1,61076	1975	7711	1881	3,48569	1743	4,31415	1560	4023	1333	2,0
2915	2024	3051	1973	2,59592	1879	3,50312	1740	2975	1556	5356	1327	1,9
4939	2023	5024	1972	2,61471	1877	2052	1736	4531	1552	6683	1322	1,8
6962	2023	6996	1970	3348	1871	3788	1733	6083	1547	8005	1317	1,7
0,68985	2021	1,68966	1969	5222	1872	5521	1730	7630	1544	5,09322	1313	1,6
0,71006	2021	1,70935	1968	7094	1869	7251	1727	4,39174	1539	5,10635	1307	1,5
3027	2020	2903	1966	2,68963	1867	3,58978	1723	4,40713	1535	1942	1302	1,4
5047	2020	4869	1964	2,70830	1864	3,60701	1720	2248	1531	3244	1297	1,3
7067	2019	6833	1963	2694	1862	2421	1717	3779	1527	4541	1292	1,2
0,79086	2019	1,78796	1961	4556	1860	4138	1713	5306	1522	5833	1287	1,1
0,81105	2018	1,80757	1960	6416	1857	5851	1710	6828	1518	7120	1282	1,0
3123	2017	2717	1958	2,78273	1854	7561	1706	8346	1514	8402	1276	0,9
5140	2016	4675	1956	2,80127	1852	3,69267	1703	4,49860	1509	5,19678	1271	0,8
7156	2016	6631	1955	1979	1850	3,70970	1700	4,51369	1505	5,20949	1266	0,7
0,89172	2015	1,88586	1953	3829	1847	2670	1696	2874	1501	2215	1261	0,6
0,91187	2014	1,90539	1952	5676	1845	4366	1692	4375	1496	3476	1256	0,5
3201	2013	2491	1950	7521	1842	6058	1689	5871	1492	4732	1251	0,4
5214	2013	4441	1948	2,89363	1839	7747	1686	7363	1488	5983	1245	0,3
7227	2011	6389	1946	2,91202	1836	3,79433	1682	4,58851	1483	7228	1240	0,2
0,99238	2011	1,98335	1945	3038	1834	3,81115	1679	4,60334	1477	8468	1234	0,1
1,01249		2,00280		2,94872		3,82794		4,61811		5,29702		0,0
175° 355° +		170° 350° +		165° 345° +		160° 340° +		155° 335° +		150° 330° +		Arg.

Reduction der Länge auf den Aequator.

Tafel 50. Fortsetzung. Arg. $f+\omega+\eta$.

Arg.	30° 210°−	D.	35° 215°−	D.	40° 220°−	D.	45° 225°−	D.	50° 230°−	D.	55° 235°−	D.
0,0	5,29702	1229	5,84287	941	6,23475	613	6,45344	249	6,48248	145	6,30949	558
0,1	5,30931	1224	5228	935	4088	606	5593	241	8103	153	6,30391	566
0,2	2155	1219	6163	929	4694	599	5834	233	7950	161	6,29825	574
0,3	3374	1213	7092	923	5293	593	6067	226	7789	169	9251	583
0,4	4587	1208	8015	917	5886	586	6293	218	7620	177	8668	591
0,5	5795	1202	8932	910	6472	578	6511	211	7443	185	8077	600
0,6	6997	1197	5,89842	904	7050	571	6722	203	7258	193	7477	608
0,7	8194	1192	5,90746	898	7621	564	6925	195	7065	202	6869	617
0,8	5,39386	1186	1644	891	8185	557	7120	188	6863	209	6252	625
0,9	5,40572	1181	2535	885	8742	550	7308	180	6654	218	5627	633
1,0	1753	1175	3420	879	9292	542	7488	172	6436	226	4994	642
1,1	2928	1169	4299	872	6,29834	536	7660	165	6210	234	4352	650
1,2	4097	1164	5171	866	6,30370	529	7825	157	5976	242	3702	658
1,3	5261	1159	6037	860	0899	521	7982	149	5734	251	3044	667
1,4	6420	1153	6897	853	1420	515	8131	141	5483	259	2377	675
1,5	7573	1147	7750	847	1935	507	8272	134	5224	267	1702	684
1,6	8720	1142	8597	841	2442	500	8406	126	4957	275	1018	692
1,7	5,49862	1136	5,99438	834	2942	493	8532	118	4682	284	6,20326	700
1,8	5,50998	1130	6,00272	828	3435	486	8650	110	4398	292	6,19626	709
1,9	2128	1124	1100	821	3921	479	8760	103	4106	300	8917	717
2,0	3252	1119	1921	815	4400	471	8863	94	3806	308	8200	726
2,1	4371	1113	2736	808	4871	464	8957	87	3498	317	7474	734
2,2	5484	1108	3544	802	5335	457	9044	79	3181	325	6740	742
2,3	6592	1102	4346	795	5792	450	9123	71	2856	333	5998	751
2,4	7694	1096	5141	789	6242	442	9194	63	2523	341	5247	759
2,5	8790	1091	5930	782	6684	435	9257	55	2182	350	4488	768
2,6	5,59881	1085	6712	776	7119	428	9312	47	1832	358	3720	776
2,7	5,60966	1079	7488	769	7547	421	9359	40	1474	366	2944	784
2,8	2045	1073	8257	762	7968	413	9399	32	1108	374	2160	793
2,9	3118	1068	9019	756	8381	406	9431	23	0734	383	1367	801
3,0	4186	1061	6,09775	749	8787	399	9454	15	6,40351	391	6,10566	810
3,1	5247	1056	6,10524	742	9186	391	9469	8	6,39960	400	6,09756	818
3,2	6303	1050	1266	736	9577	384	9477	0	9560	407	8938	826
3,3	7353	1044	2002	729	6,39961	376	9477	8	9153	416	8112	835
3,4	8397	1038	2731	722	6,40337	369	9469	17	8737	424	7277	843
3,5	5,69435	1032	3453	716	0706	362	9452	24	8313	433	6434	852
3,6	5,70467	1026	4169	709	1068	351	9428	32	7880	441	5582	860
3,7	1493	1021	4878	702	1422	347	9396	40	7439	449	4722	868
3,8	2514	1014	5580	695	1769	339	9356	48	6990	457	3854	877
3,9	3528	1009	6275	689	2108	332	9308	56	6533	466	2977	885
4,0	4537	1003	6964	682	2440	324	9252	64	6067	474	2092	893
4,1	5540	996	7646	675	2764	317	9188	72	5593	483	1199	902
4,2	6536	990	8321	668	3081	309	9116	81	5110	491	6,00297	910
4,3	7526	984	8989	662	3390	302	9035	88	4619	499	5,99387	919
4,4	8510	978	6,19651	654	3692	294	8947	96	4120	508	8468	927
4,5	5,79488	972	6,20305	648	3986	287	8851	105	3612	516	7541	935
4,6	5,80460	966	0953	641	4273	279	8746	113	3096	524	6606	944
4,7	1426	960	1594	634	4552	272	8633	120	2572	533	5662	952
4,8	2386	954	2228	627	4824	264	8513	128	2039	541	4710	960
4,9	3340	947	2855	620	5088	256	8385	137	1498	549	3750	969
5,0	5,84287		6,23475		6,45344		6,48248		6,30949		5,92781	
Arg.	145° 325°+		140° 320°+		135° 315°+		130° 310°+		125° 305°+		120° 300°+	

Reduction der Länge auf den Aequator.

Tafel 50. Schluss. Arg. $f+\omega+\eta$

60° 240°−	D.	65° 245°−	D.	70° 250°−	D.	75° 255°−	D.	80° 260°−	D.	85° 265°−	D.	Arg.
5°92781	977	5°33840	1385	4°55143	1763	3°58764	2088	2°47867	2339	1°26627	2497	5°0
1804	985	2455	1393	3380	1770	6676	2091	5528	2343	4130	2500	4,9
5,90819	994	5,31062	1401	4,51610	1777	4582	2099	3185	2347	1,21630	2501	4,8
5,89825	1002	5,29661	1409	4,49833	1784	2483	2105	2,40838	2351	1,19129	2504	4,7
8823	1010	8252	1417	8049	1791	3,50378	2111	2,38487	2356	6625	2506	4,6
7813	1019	6835	1425	6258	1799	3,48267	2117	6131	2359	4119	2507	4,5
6794	1027	5410	1433	4459	1805	6150	2123	3772	2363	1,11612	2510	4,4
5767	1035	3977	1441	2654	1812	4027	2128	2,31409	2367	1,09102	2511	4,3
4732	1043	2536	1449	4,40842	1819	3,41899	2134	2,29042	2371	6591	2513	4,2
3689	1052	5,21087	1456	4,39023	1826	3,39765	2139	6671	2374	4078	2515	4,1
2637	1060	5,19631	1464	7197	1833	7626	2145	4297	2379	1,01563	2516	4,0
1577	1069	8167	1472	5364	1840	5481	2150	2,21918	2382	0,99047	2518	3,9
5,80508	1076	6695	1480	3524	1847	3331	2156	2,19536	2385	6529	2520	3,8
5,79432	1084	5215	1487	4,31677	1853	3,31175	2161	7151	2390	4009	2521	3,7
8348	1093	3728	1495	4,29824	1860	3,29014	2167	4761	2393	0,91488	2523	3,6
7255	1102	2233	1503	7964	1867	6847	2172	2,12368	2397	0,88965	2525	3,5
6153	1110	5,10730	1511	6097	1874	4675	2177	2,09971	2401	6440	2526	3,4
5043	1118	5,09219	1518	4223	1880	2498	2183	7570	2404	3914	2528	3,3
3925	1126	7701	1526	2343	1888	3,20315	2188	5166	2407	0,81386	2529	3,2
2799	1135	6175	1534	4,20455	1894	3,18127	2193	2759	2411	0,78857	2530	3,1
1664	1143	4641	1541	4,18561	1901	5934	2198	2,00348	2414	6327	2532	3,0
5,70521	1151	3100	1549	6660	1907	3736	2203	1,97934	2418	3795	2533	2,9
5,69370	1159	5,01551	1557	4753	1914	3,11533	2209	5516	2421	0,71262	2534	2,8
8211	1167	4,99994	1564	2839	1921	3,09324	2214	3095	2424	0,68728	2536	2,7
7044	1176	8430	1572	4,10918	1927	7110	2219	1,90671	2427	6192	2536	2,6
5868	1184	6858	1579	4,08991	1934	4891	2224	1,88244	2431	.3656	2538	2,5
4684	1192	5279	1587	7057	1940	2667	2229	5813	2433	0,61118	2539	2,4
3492	1200	3692	1595	5117	1946	3,00438	2234	3380	2437	0,58579	2539	2,3
2292	1208	2097	1602	3171	1953	2,98204	2239	1,80943	2439	6040	2541	2,2
5,61084	1217	4,90495	1610	4,01218	1959	5965	2243	1,78504	2443	3499	2541	2,1
5,59867	1224	4,88885	1617	3,99259	1966	3722	2249	6061	2446	0,50958	2543	2,0
8643	1233	7268	1624	7293	1971	2,91473	2253	3615	2449	0,48415	2543	1,9
7410	1241	5644	1632	5322	1978	2,89220	2259	1,71166	2452	5872	2544	1,8
6169	1249	4012	1640	3344	1985	6961	2263	1,68714	2454	3328	2545	1,7
4920	1257	2372	1647	3,91359	1991	4698	2268	6260	2458	0,40783	2546	1,6
3663	1265	4,80725	1654	3,89368	1998	2430	2273	3802	2460	0,38237	2546	1,5
2398	1273	4,79071	1662	7370	2004	2,80157	2277	1,61342	2463	5691	2547	1,4
5,51125	1282	7409	1669	5366	2010	2,77880	2282	1,58879	2466	3144	2547	1,3
5,49843	1289	5740	1676	3356	2016	5598	2287	6413	2469	0,30597	2548	1,2
8554	1298	4064	1684	3,81340	2022	3311	2291	3944	2471	0,28049	2549	1,1
7256	1306	2380	1691	3,79318	2028	2,71020	2296	1,51473	2474	5500	2549	1,0
5950	1313	4,70689	1699	7290	2035	2,68724	2300	1,48999	2476	2951	2549	0,9
4637	1321	4,68990	1706	5255	2040	6424	2304	6523	2479	0,20402	2549	0,8
3316	1330	7284	1713	3215	2047	4120	2309	4044	2481	0,17853	2550	0,7
1986	1338	5571	1720	3,71168	2053	2,61811	2313	1,41563	2484	5303	2550	0,6
5,40648	1346	3851	1727	3,69115	2058	2,59498	2317	1,39079	2485	2753	2550	0,5
5,39302	1354	2124	1734	7057	2065	7181	2322	6594	2488	0,10203	2550	0,4
7948	1361	4,60390	1742	4992	2070	4859	2326	4106	2491	0,07653	2551	0,3
6587	1370	4,58648	1749	2922	2076	2533	2331	1,31615	2493	5102	2551	0,2
5217	1377	6899	1756	3,60846	2082	2,50202	2335	1,29122	2495	2551	2551	0,1
5,33840		4,55143		3,58764		2,47867		1,26627		0,00000		0,0
115° 295°+		110° 290°+		105° 285°+		100° 280°+		95° 275°+		90° 270°+		Arg.

Log. des Factors der Störungen der Abweichung.

Taf. 51. Arg. $f + \omega + \eta$

Arg.	0°— 180°+	D.	5°— 185°+	D.	10°— 190°+	D.	15°— 195°+	D.	20°— 200°+	D.	25°— 205°+	D.	Arg.
0,0	0,63804	0	0,63759	2	0,63620	4	0,63374	6	0,62999	9	0,62462	13	5,0
0,1	804	0	757	2	616	4	368	6	990	9	449	13	4,9
0,2	804	0	755	2	612	4	362	6	981	9	436	13	4,8
0,3	804	0	753	2	608	4	356	7	972	9	423	13	4,7
0,4	804	0	751	2	604	4	349	6	963	9	410	13	4,6
0,5	804	0	749	2	600	4	343	7	954	10	397	13	4,5
0,6	804	1	747	2	596	4	336	6	944	9	384	13	4,4
0,7	803	0	745	2	592	4	330	7	935	10	371	13	4,3
0,8	803	0	743	2	588	4	323	6	925	9	358	13	4,2
0,9	803	0	741	2	584	4	317	7	916	10	345	14	4,1
1,0	803	1	739	2	580	4	310	6	906	10	331	13	4,0
1,1	802	0	737	3	576	5	304	7	896	10	318	14	3,9
1,2	802	0	734	2	571	4	297	7	886	10	304	14	3,8
1,3	802	1	732	2	567	5	290	7	876	10	290	14	3,7
1,4	801	0	730	2	562	4	283	7	866	10	276	14	3,6
1,5	801	1	728	3	558	5	276	7	856	10	262	14	3,5
1,6	800	0	725	2	553	4	269	7	846	10	248	14	3,4
1,7	800	1	723	3	549	5	262	7	836	10	234	14	3,3
1,8	799	1	720	2	544	4	255	7	826	10	220	14	3,2
1,9	798	1	718	3	540	5	248	7	816	11	206	15	3,1
2,0	797	0	715	2	535	4	241	7	805	10	191	14	3,0
2,1	797	1	713	3	531	5	234	8	795	11	177	15	2,9
2,2	796	1	710	2	526	5	226	7	784	10	162	14	2,8
2,3	795	1	708	3	521	5	219	7	774	11	148	15	2,7
2,4	794	1	705	3	516	4	212	7	763	10	133	15	2,6
2,5	793	1	702	3	512	5	205	8	753	11	118	15	2,5
2,6	792	1	699	3	507	5	197	7	742	11	103	15	2,4
2,7	791	1	696	3	502	5	190	8	731	11	088	15	2,3
2,8	790	1	693	3	497	5	182	7	720	11	073	15	2,2
2,9	789	1	690	3	492	5	175	8	709	11	058	15	2,1
3,0	788	1	687	3	487	5	167	8	698	11	043	15	2,0
3,1	787	1	684	3	482	6	159	8	687	11	028	16	1,9
3,2	786	1	681	3	476	5	151	8	676	11	0,62012	15	1,8
3,3	785	1	678	3	471	5	143	8	665	11	0,61997	16	1,7
3,4	784	1	675	3	466	5	135	8	654	11	981	16	1,6
3,5	783	2	672	3	461	6	127	8	643	12	965	16	1,5
3,6	781	1	669	3	455	5	119	8	631	11	949	16	1,4
3,7	780	2	666	4	450	6	111	8	620	12	933	16	1,3
3,8	778	1	662	3	444	5	103	8	608	12	917	16	1,2
3,9	777	2	659	3	439	6	095	9	596	12	901	17	1,1
4,0	775	1	656	3	433	5	086	8	584	12	884	16	1,0
4,1	774	2	653	4	428	6	078	9	572	12	868	17	0,9
4,2	772	1	649	3	422	6	069	8	560	12	851	16	0,8
4,3	771	2	646	4	416	6	061	9	548	12	835	17	0,7
4,4	769	1	642	3	410	6	052	8	536	12	818	17	0,6
4,5	768	2	639	4	404	6	044	9	524	12	801	17	0,5
4,6	766	2	635	3	398	6	035	9	512	12	784	17	0,4
4,7	764	2	632	4	392	6	026	9	500	13	767	17	0,3
4,8	762	1	628	4	386	6	017	9	487	12	750	17	0,2
4,9	761	2	624	4	380	6	0,63008	9	475	13	733	18	0,1
5,0	0,63759		0,63620		0,63374		0,62999		0,62462		0,61715		0,0
Arg.	175°+ 355°—		170°+ 350°—		165°+ 345°—		160°+ 340°—		155°+ 335°—		150°+ 330°—		Arg.

Log. des Factors der Störungen der Abweichung.

Tafel 51. Fortsetzung. Arg. $f + \omega + \eta$

30°— 210°+	D.	35°— 215°+	D.	40°— 220°+	D.	45°— 225°+	D.	50°— 230°+	D.	55°— 235°+	D.	Arg.
0,61715	17	0,60699	23	0,59332	32	0,57508	42	0,55085	56	0,51869	74	5,0
698	18	676	24	300	32	466	42	0,55029	56	795	74	4,9
680	17	652	24	268	32	424	42	0,54973	56	721	75	4,8
663	18	628	24	236	32	382	43	917	57	646	75	4,7
645	18	604	24	204	32	339	43	860	57	571	76	4,6
627	18	580	24	172	33	296	43	803	57	495	76	4,5
609	18	556	24	139	32	253	43	746	58	419	76	4,4
591	18	532	25	107	33	210	44	688	58	343	77	4,3
573	18	507	25	074	33	166	44	630	58	266	77	4,2
555	19	482	25	041	33	122	44	572	59	189	78	4,1
536	18	457	25	0,59008	33	078	45	513	59	111	78	4,0
518	19	432	25	0,58975	34	0,57033	45	454	60	0,51033	79	3,9
499	19	407	25	941	34	0,56988	45	394	60	0,50954	79	3,8
480	19	382	26	907	34	943	45	334	60	875	80	3,7
461	19	356	25	873	34	898	46	274	60	795	80	3,6
442	19	331	26	839	35	852	46	214	61	715	81	3,5
423	19	305	26	804	34	806	46	153	61	634	81	3,4
404	20	279	26	770	35	760	46	092	61	553	81	3,3
384	19	253	26	735	35	714	47	0,54031	62	472	82	3,2
365	20	227	27	700	35	667	47	0,53969	62	390	82	3,1
345	20	200	26	665	35	620	47	907	62	308	83	3,0
325	20	174	27	630	36	573	47	845	63	225	84	2,9
305	20	147	27	594	36	526	48	782	63	141	84	2,8
285	20	120	27	558	36	478	48	719	64	0,50057	84	2,7
265	20	093	27	522	36	430	48	655	64	0,49973	85	2,6
245	21	066	27	486	37	382	48	591	64	888	85	2,5
224	20	039	27	449	36	334	49	527	65	803	86	2,4
204	21	0,60012	28	413	37	285	49	462	65	717	86	2,3
183	21	0,59984	28	376	37	236	49	397	65	631	87	2,2
162	21	956	28	339	38	187	50	332	66	544	87	2,1
141	21	928	28	301	37	137	50	266	66	457	88	2,0
120	21	900	29	264	38	087	50	200	67	369	88	1,9
099	21	871	28	226	38	0,56037	50	133	67	281	89	1,8
078	21	843	29	188	38	0,55987	51	0,53066	67	192	89	1,7
057	21	814	29	150	38	936	51	0,52999	68	103	90	1,6
036	22	785	29	112	39	885	52	931	68	0,49013	90	1,5
0,61014	22	756	29	073	39	833	51	863	68	0,48923	91	1,4
0,60992	22	727	29	0,58034	39	782	52	795	69	832	92	1,3
970	22	698	29	0,57995	39	730	52	726	69	740	92	1,2
948	22	669	30	956	40	678	53	657	70	648	93	1,1
926	22	639	30	916	40	625	52	587	70	555	93	1,0
904	22	609	30	876	40	573	53	517	70	462	93	0,9
882	22	579	30	836	40	520	53	447	71	369	94	0,8
860	23	549	31	796	40	467	54	376	71	275	95	0,7
837	22	518	30	756	41	413	54	305	72	180	95	0,6
815	23	488	31	715	41	359	54	233	72	0,48085	96	0,5
792	23	457	31	674	41	305	54	161	72	0,47989	97	0,4
769	23	426	31	633	41	251	55	089	73	892	97	0,3
746	23	395	31	592	42	196	55	0,52016	73	795	97	0,2
723	24	364	32	550	42	141	56	0,51943	74	698	98	0,1
0,60699		0,59332		0,57508		0,55085		0,51869		0,47600		0,0
145°+ 325°—		140°+ 320°—		135°+ 315°—		130°+ 310°—		125°+ 305°—		120°+ 300°—		Arg.

Log. des Factors der Störungen der Abweichung.

Tafel 51. Schluss. Arg. $f + \omega + \eta$

Arg.	60°— 240°+	D.	65°— 245°+	D.	70°— 250°+	D.	75°— 255°+	D.	80°— 260°+	D.	85°— 265°+	D.
0,0	0,47600	99	0,41886	133	0,34116	183	0,23196	263	0,06759	418	9,7738	87
0,1	501	99	753	133	0,33933	184	0,22933	265	6341	422	651	88
0,2	402	100	620	134	749	185	668	267	5919	427	563	90
0,3	302	100	486	135	564	186	401	270	5492	431	473	93
0,4	202	101	351	136	378	187	0,22131	271	5061	437	380	95
0,5	101	101	215	138	191	189	0,21860	274	4624	441	285	97
0,6	0,47000	102	0,41077	138	0,33002	190	586	276	4183	446	188	99
0,7	0,46898	103	0,40939	138	0,32812	192	310	278	3737	452	9,7089	101
0,8	795	104	801	140	620	193	0,21032	281	3285	457	9,6988	104
0,9	691	104	661	140	427	194	0,20751	283	2828	462	884	106
1,0	587	104	521	141	233	195	468	285	2366	468	778	109
1,1	483	105	380	142	0,32038	197	0,20183	288	1898	474	669	112
1,2	378	106	238	143	0,31841	198	0,19895	290	1424	480	557	115
1,3	272	106	0,40095	143	643	200	605	293	0944	485	442	119
1,4	166	107	0,39952	144	443	201	312	295	0,00459	492	323	122
1,5	0,46059	107	808	146	242	202	0,19017	298	9,99967	498	201	125
1,6	0,45952	108	662	147	0,31040	204	0,18719	301	9469	505	9,6076	129
1,7	844	109	515	147	0,30836	206	418	303	8964	511	9,5947	133
1,8	735	110	368	149	630	207	0,18115	305	8453	518	814	137
1,9	625	110	219	149	423	208	0,17810	308	7935	524	677	142
2,0	515	111	0,39070	150	215	210	502	311	7411	53	535	146
2,1	404	111	0,38920	151	0,30005	211	0,17191	314	688	54	389	152
2,2	293	112	769	152	0,29794	213	0,16877	317	634	55	9.5237	—
2,3	181	113	617	153	581	215	560	319	579	55	0,3221	119
2,4	0,45068	114	464	154	366	216	241	323	524	56	0,3102	119
2,5	0,44954	114	310	155	0,29150	217	0,16918	325	468	57	0,2983	119
2,6	840	115	0,38155	156	0,28933	219	0,15593	328	411	58	864	119
2,7	725	115	0,37999	157	714	221	0,15265	332	353	58	745	119
2,8	610	116	842	158	493	222	0,14933	335	295	59	626	119
2,9	494	117	684	159	271	224	598	338	236	60	507	120
3,0	377	118	525	160	0,28047	226	0,14260	341	176	61	387	119
3,1	259	118	365	161	0,27821	227	0,13919	344	115	62	268	119
3,2	141	119	204	162	594	229	575	348	9,9053	63	149	119
3,3	0,44022	120	0,37042	164	365	231	0,13227	351	9,8990	64	0,2030	120
3,4	0,43902	120	0,36878	165	0,27134	232	0,12876	354	926	65	0,1910	119
3,5	782	121	713	165	0,26902	234	522	358	861	66	791	119
3,6	661	122	548	167	668	236	0,12164	361	795	67	672	119
3,7	539	123	381	167	432	237	0,11803	364	728	69	553	120
3,8	416	123	214	168	0,26195	240	439	368	659	69	433	119
3,9	293	124	0,36046	170	0,25955	241	0,11071	372	590	71	314	119
4,0	169	125	0,35876	171	714	243	0,10699	376	519	72	195	119
4,1	0,43044	126	705	172	471	245	0,10323	379	447	73	0,1076	120
4,2	0,42918	126	533	173	0,25226	247	0,09944	383	374	75	0,0956	119
4,3	792	127	360	174	0,24979	249	561	388	299	76	837	120
4,4	665	128	186	175	730	251	0,09173	392	223	77	717	119
4,5	537	129	0,35011	177	479	253	0,08781	396	146	79	598	120
4,6	408	129	0,34834	178	0,24226	255	0,08385	400	9,8067	80	478	119
4,7	279	130	656	179	0,23971	256	0,07985	404	9,7987	81	359	120
4,8	149	131	477	180	715	258	581	409	906	83	239	119
4,9	0,42018	132	297	181	457	261	0,07172	413	823	85	0,0120	120
5,0	0,41886		0,34116		0,23196		0,06759		9,7738		0,0000	
Arg.	115°+ 295°—		110°+ 290°—		105°+ 285°—		100°+ 280°—		95°+ 275°—		90°+ 270°—	

Anm. Vom Zeichen ——— an sind die Zahlen statt der Logarithmen angesetzt.

log $\bar{r}$.

Tafel 52. Arg.: Mittlere Anomalie + deren Störungen.

Arg.	0°	D.	10°	D.	20°	D.	30°	D.	40°	D.	50°	D.	Arg
0,0	0,370957	0	0,371710	30	0,373925	58	0,377473	83	0,382155	104	0,387732	118	10,0
0,2	957	1	740	31	0,373983	59	556	84	259	104	0,387850	119	9,8
0,4	958	1	771	32	0,374042	60	640	84	363	104	0,387969	119	9,6
0,6	959	2	803	32	102	60	724	85	467	105	0,388088	120	9,4
0,8	961	3	835	33	162	61	809	85	572	105	208	120	9,2
1,0	964	3	868	33	223	61	894	86	677	105	328	120	9,0
1,2	967	4	901	34	284	62	0,377980	86	782	106	448	120	8,8
1,4	971	5	935	34	346	62	0,378066	86	888	106	568	121	8,6
1,6	976	5	0,371969	35	408	63	152	87	0,382994	106	689	121	8,4
1,8	981	6	0,372004	35	471	63	239	87	0,383100	107	810	121	8,2
2,0	987	6	039	36	534	64	326	88	207	107	0,388931	121	8,0
2,2	0,370993	7	075	37	598	64	414	88	314	108	0,389052	122	7,8
2,4	0,371000	8	112	37	662	65	502	89	422	108	174	121	7,6
2,6	008	8	149	38	727	65	591	89	530	108	295	122	7,4
2,8	016	9	187	38	792	66	680	89	638	108	417	122	7,2
3,0	025	9	225	39	858	66	769	90	746	109	539	123	7,0
3,2	034	10	264	40	924	67	859	90	855	109	662	122	6,8
3,4	044	11	304	40	0,374991	67	0,378949	91	0,383964	109	784	123	6,6
3,6	055	11	344	41	0,375058	68	0,379040	91	0,384073	110	0,389907	123	6,4
3,8	066	12	385	41	126	68	131	92	183	110	0,390030	123	6,2
4,0	078	12	426	42	194	69	223	92	293	110	153	123	6,0
4,2	090	13	468	43	263	69	315	92	403	111	276	124	5,8
4,4	103	14	511	43	332	70	407	93	514	111	400	124	5,6
4,6	117	14	554	43	402	71	500	93	625	111	524	124	5,4
4,8	131	15	597	44	473	71	593	94	736	111	648	124	5,2
5,0	146	15	641	45	544	71	687	94	847	112	772	125	5,0
5,2	161	16	686	45	615	72	781	95	0,384959	112	0,390897	125	4,8
5,4	177	17	731	46	687	72	876	95	0,385071	113	0,391022	125	4,6
5,6	194	17	777	46	759	73	0,379971	95	184	113	147	124	4,4
5,8	211	18	823	47	832	74	0,380066	96	297	113	271	125	4,2
6,0	229	18	870	48	906	74	162	96	410	113	396	125	4,0
6,2	247	19	918	48	0,375980	74	258	96	523	114	521	126	3,8
6,4	266	20	0,372966	49	0,376054	75	354	97	637	114	647	125	3,6
6,6	286	20	0,373015	49	129	75	451	97	751	114	772	126	3,4
6,8	306	21	064	50	204	76	548	98	865	115	0,391898	126	3,2
7,0	327	21	114	50	280	76	646	98	0,385980	115	0,392024	127	3,0
7,2	348	22	164	51	356	77	744	98	0,386095	115	151	126	2,8
7,4	370	23	215	51	433	77	842	99	210	115	277	127	2,6
7,6	393	23	266	52	510	78	0,380941	99	325	116	404	127	2,4
7,8	416	24	318	52	588	78	0,381040	99	441	116	531	127	2,2
8,0	440	24	370	53	666	79	139	100	557	116	658	127	2,0
8,2	464	25	423	54	745	79	239	100	673	117	785	127	1,8
8,4	489	26	477	54	824	79	339	101	790	117	0,392912	127	1,6
8,6	515	26	531	55	903	80	440	101	0,386907	117	0,393039	128	1,4
8,8	541	27	586	55	0,376983	81	541	101	0,387024	117	167	128	1,2
9,0	568	27	641	56	0,377064	81	642	102	141	118	295	128	1,0
9,2	595	28	697	56	145	81	744	102	259	118	423	128	0,8
9,4	623	28	753	57	226	82	846	103	377	118	551	129	0,6
9,6	651	29	810	57	308	82	0,381949	103	495	118	680	128	0,4
9,8	680	30	867	58	390	83	0,382052	103	613	119	808	129	0,2
10,0	0,371710		0,373925		0,377473		0,382155		0,387732		0,393937		0,0
Arg.	350°		340°		330°		320°		310°		300°		Arg

log $\bar{r}$

Tafel 52. Fortsetzung. Arg.: Mittlere Anomalie + deren Störungen.

Arg.	60°	D.	70°	D.	80°	D.	90°	D.	100°	D.	110°	D.	Arg.
0,0	0,393937	128	0,400510	133	0,407203	134	0,413797	130	0,420103	122	0,425964	112	10,0
0,2	0,394065	129	643	134	337	133	0,413927	129	225	122	0,426076	111	9,8
0,4	194	129	777	133	470	134	0,414056	130	347	122	187	111	9,6
0,6	323	129	0,400910	134	604	133	186	129	469	121	298	111	9,4
0,8	452	129	0,401044	134	737	134	315	129	590	121	409	111	9,2
1,0	581	130	178	134	0,407871	133	444	129	711	121	520	111	9,0
1,2	711	129	312	133	0,408004	133	573	129	832	121	631	110	8,8
1,4	840	130	445	134	137	133	702	128	0,420953	121	741	110	8,6
1,6	0,394970	130	579	134	270	133	830	129	0,421074	121	851	110	8,4
1,8	0,395100	130	713	134	403	133	0,414959	128	195	120	0,426961	110	8,2
2,0	230	130	847	133	536	133	0,415087	128	315	120	0,427071	109	8,0
2,2	360	130	0,401980	134	669	133	215	128	435	120	180	109	7,8
2,4	490	130	0,402114	134	802	133	343	128	555	120	289	109	7,6
2,6	620	130	248	134	0,408935	133	471	128	675	119	398	109	7,4
2,8	751	130	382	133	0,409068	133	599	128	794	120	507	109	7,2
3,0	0,395881	131	515	134	201	133	727	127	0,421914	119	616	108	7,0
3,2	0,396012	131	649	134	334	133	854	128	0,422033	119	724	108	6,8
3,4	143	131	783	134	467	132	0,415982	127	152	119	832	107	6,6
3,6	274	131	0,402917	134	599	133	0,416109	127	271	119	0,427939	107	6,4
3,8	405	131	0,403051	134	732	132	236	127	390	118	0,428046	107	6,2
4,0	536	131	185	134	864	133	363	127	508	118	153	107	6,0
4,2	667	132	319	134	0,409997	132	490	127	626	118	260	107	5,8
4,4	799	131	453	134	0,410129	132	617	127	744	118	367	106	5,6
4,6	0,396930	132	587	134	261	132	744	126	862	118	473	106	5,4
4,8	0,397062	132	721	134	393	132	870	126	0,422980	118	579	106	5,2
5,0	194	132	855	134	525	132	0,416996	126	0,423098	117	685	106	5,0
5,2	326	131	0,403989	135	657	132	0,417122	126	215	117	791	106	4,8
5,4	457	132	0,404124	134	789	132	248	126	332	117	0,428897	105	4,6
5,6	589	132	258	134	0,410921	132	374	126	449	117	0,429002	105	4,4
5,8	721	132	392	134	0,411053	131	500	126	566	116	107	105	4,2
6,0	853	132	526	134	184	132	626	125	682	116	212	104	4,0
6,2	0,397985	132	660	134	316	131	751	125	798	116	316	104	3,8
6,4	0,398117	132	794	134	447	132	0,417876	125	0,423914	116	420	104	3,6
6,6	249	133	0,404928	134	579	131	0,418001	125	0,424030	115	524	104	3,4
6,8	382	132	0,405062	134	710	131	126	125	145	115	628	103	3,2
7,0	514	133	196	134	841	131	251	124	260	115	731	103	3,0
7,2	647	132	330	134	0,411972	131	375	125	375	115	834	103	2,8
7,4	779	133	464	134	0,412103	131	500	124	490	115	0,429937	103	2,6
7,6	0,398912	133	598	134	234	131	624	124	605	115	0,430040	102	2,4
7,8	0,399045	133	732	134	365	131	748	124	720	114	142	102	2,2
8,0	178	133	0,405866	134	496	131	872	124	834	114	244	102	2,0
8,2	311	133	0,406000	133	627	130	0,418996	124	0,423948	113	346	102	1,8
8,4	444	133	133	134	757	131	0,419120	124	0,425061	114	448	101	1,6
8,6	577	133	267	134	0,412888	130	244	123	175	113	549	101	1,4
8,8	710	133	401	134	0,413018	130	367	123	288	113	650	101	1,2
9,0	843	133	535	133	148	130	490	123	401	113	751	101	1,0
9,2	0,399976	133	668	134	278	130	613	123	514	113	852	100	0,8
9,4	0,400109	134	802	134	408	130	736	122	627	113	0,430952	100	0,6
9,6	243	133	0,406936	134	538	130	858	123	740	112	0,431052	100	0,4
9,8	376	134	0,407070	133	668	129	0,419981	122	852	112	0,431152	100	0,2
10,0	0,400510		0,407203		0,413797		0,420103		0,425964		0,431252		0,0
Arg.	290°		280°		270°		260°		250°		240°		Arg.

log $\bar{r}$.

Tafel 52. Schluss. Arg.: Mittlere Anomalie + deren Störungen.

Arg.	120°	D.	130°	D.	140°	D.	150°	D.	160°	D.	170°	D.	Arg.
0,0	0,431252	99	0,435869	85	0,439737	69	0,442798	53	0,445012	35	0,446351	18	10,0
0,2	351	99	0,435954	84	806	69	851	52	047	35	369	17	9,8
0,4	450	99	0,436038	85	875	69	903	52	082	35	386	17	9,6
0,6	549	98	123	84	0,439944	68	0,442955	52	117	34	403	17	9,4
0,8	647	98	207	84	0,440012	68	0,443007	51	151	34	420	16	9,2
1,0	745	98	291	83	080	68	058	51	185	34	436	16	9,0
1,2	843	98	374	83	148	67	109	51	219	33	452	16	8,8
1,4	0,431941	97	457	83	215	67	160	50	252	33	468	15	8,6
1,6	0,432038	97	540	82	282	67	210	50	285	33	483	15	8,4
1,8	135	97	622	82	349	66	260	49	318	32	498	14	8,2
2,0	232	96	704	82	415	66	309	49	350	32	512	14	8,0
2,2	328	96	786	82	481	66	358	49	382	32	526	14	7,8
2,4	424	96	868	81	547	66	407	49	414	31	540	13	7,6
2,6	520	96	0,436949	81	613	65	456	48	445	31	553	13	7,4
2,8	616	96	0,437030	81	678	65	504	48	476	30	566	13	7,2
3,0	712	95	111	80	743	64	552	48	506	30	579	12	7,0
3,2	807	95	191	80	807	64	600	47	536	30	591	12	6,8
3,4	902	94	271	80	871	64	647	47	566	29	603	12	6,6
3,6	0,432996	94	351	80	935	63	694	47	595	29	615	11	6,4
3,8	0,433090	94	431	79	0,440998	63	741	46	624	29	626	11	6,2
4,0	184	94	510	79	0,441061	63	787	46	653	29	637	11	6,0
4,2	278	93	589	78	124	62	833	45	682	28	648	10	5,8
4,4	371	93	667	78	186	62	878	45	710	28	658	10	5,6
4,6	464	93	745	78	248	62	923	45	738	27	668	9	5,4
4,8	557	93	823	78	310	62	0,443968	45	765	27	677	9	5,2
5,0	650	92	901	77	372	61	0,444013	44	792	27	686	9	5,0
5,2	742	92	0,437978	77	433	61	057	44	819	26	695	9	4,8
5,4	834	92	0,438055	77	494	60	101	43	845	26	704	8	4,6
5,6	0,433926	91	132	76	554	60	144	43	871	26	712	8	4,4
5,8	0,434017	91	208	76	614	60	187	43	897	25	720	7	4,2
6,0	108	91	284	76	674	59	230	42	922	25	727	7	4,0
6,2	199	90	360	75	733	59	272	42	947	24	734	7	3,8
6,4	289	91	435	75	792	59	314	42	971	24	741	6	3,6
6,6	380	90	510	74	851	58	356	41	0,445995	24	747	6	3,4
6,8	470	90	584	75	909	58	397	41	0,446019	23	753	6	3,2
7,0	560	89	659	74	0,441967	58	438	41	042	23	759	5	3,0
7,2	649	89	733	73	0,442025	58	479	40	065	23	764	5	2,8
7,4	738	89	806	74	083	57	519	40	088	22	769	4	2,6
7,6	827	88	880	73	140	57	559	40	110	22	773	4	2,4
7,8	0,434915	88	0,438953	73	197	56	599	39	132	22	777	4	2,2
8,0	0,435003	88	0,439026	73	253	56	638	39	154	21	781	3	2,0
8,2	091	88	199	72	309	55	677	39	175	21	784	3	1,8
8,4	179	87	271	72	364	55	716	38	196	21	787	3	1,6
8,6	266	87	343	71	419	55	754	38	217	20	790	2	1,4
8,8	353	87	414	71	474	55	792	38	237	20	792	2	1,2
9,0	440	86	485	71	529	54	830	37	257	19	794	2	1,0
9,2	526	86	556	71	583	54	867	37	276	19	796	1	0,8
9,4	612	86	627	70	637	54	904	36	295	19	797	1	0,6
9,6	698	86	697	70	691	54	940	36	314	19	798	1	0,4
9,8	784	85	767	70	745	53	0,444976	36	333	18	799	0	0,2
10,0	0,435869		0,439737		0,442798		0,445012		0,446351		0,446799		0,0
Arg.	230°		220°		210°		200°		190°		180°		Arg.

Sinus der Abweichung.

Tafel 53. Arg. $f + \omega + \eta$

Arg.	0°+ 180°−	D.	5°+ 185°−	D.	10°+ 190°−	D.	15°+ 195°−	D.	20°+ 200°−	D.	25°+ 205°−	D.	Arg.
0,0	0,000000	1055	0,052667	1051	0,104935	1039	0,156402	1019	0,206680	991	0,255385	955	5,0
0,1	0,001055	1054	3718	1050	5974	1038	7421	1018	7671	990	6340	955	4,9
0,2	2109	1055	4768	1050	7012	1038	8439	1018	8661	990	7295	954	4,8
0,3	3164	1055	5818	1050	8050	1037	0,159457	1017	0,209651	989	8249	953	4,7
0,4	4219	1055	6868	1050	0,109087	1037	0,160474	1017	0,210640	988	0,259202	952	4,6
0,5	5274	1054	7918	1050	0,110124	1037	1491	1016	1628	988	0,260154	952	4,5
0,6	6328	1055	0,058968	1050	1161	1037	2507	1015	2616	987	1106	951	4,4
0,7	7383	1054	0,060018	1049	2198	1036	3522	1015	3603	986	2057	950	4,3
0,8	8437	1055	1067	1050	3234	1036	4537	1015	4589	985	3007	949	4,2
0,9	0,009492	1054	2117	1049	4270	1035	5552	1014	5574	985	3956	948	4,1
1,0	0,010546	1055	3166	1049	5305	1035	6566	1013	6559	984	4904	948	4,0
1,1	1601	1054	4215	1048	6340	1035	7579	1013	7543	984	5852	947	3,9
1,2	2655	1055	5263	1049	7375	1034	8592	1013	8527	983	6799	946	3,8
1,3	3710	1054	6312	1048	8409	1034	0,169605	1012	0,219510	982	7745	945	3,7
1,4	4764	1055	7360	1048	0,119443	1034	0,170617	1011	0,220492	982	8690	944	3,6
1,5	5819	1054	8408	1047	0,120477	1033	1628	1011	1474	981	0,269634	944	3,5
1,6	6873	1054	0,069455	1048	1510	1033	2639	1011	2455	980	0,270578	942	3,4
1,7	7927	1054	0,070503	1047	2543	1033	3650	1010	3435	980	1520	942	3,3
1,8	0,018981	1054	1550	1047	3576	1032	4660	1009	4415	979	2462	941	3,2
1,9	0,020035	1054	2597	1047	4608	1032	5669	1009	5394	978	3403	940	3,1
2,0	1089	1054	3644	1047	5640	1031	6678	1008	6372	977	4343	939	3,0
2,1	2143	1054	4691	1047	6671	1031	7686	1008	7349	977	5282	939	2,9
2,2	3197	1054	5738	1046	7702	1031	8694	1007	8326	976	6221	937	2,8
2,3	4251	1054	6784	1046	8733	1030	0,179701	1007	0,229302	976	7158	937	2,7
2,4	5305	1054	7830	1046	0,129763	1030	0,180708	1006	0,230278	975	8095	936	2,6
2,5	6359	1053	8876	1045	0,130793	1029	1714	1006	1253	974	9031	935	2,5
2,6	7412	1054	0,079921	1045	1822	1029	2720	1005	2227	973	0,279966	934	2,4
2,7	8466	1053	0,080966	1045	2851	1029	3725	1005	3200	973	0,280900	934	2,3
2,8	0,029519	1054	2011	1045	3880	1028	4730	1004	4173	972	1834	932	2,2
2,9	0,030573	1053	3056	1045	4908	1028	5734	1003	5145	971	2766	932	2,1
3,0	1626	1053	4101	1044	5936	1028	6737	1003	6116	970	3698	931	2,0
3,1	2679	1053	5145	1044	6964	1027	7740	1002	7086	970	4629	930	1,9
3,2	3732	1053	6189	1044	7991	1027	8742	1001	8056	969	5559	929	1,8
3,3	4785	1053	7233	1043	0,139018	1026	0,189743	1001	9025	968	6488	928	1,7
3,4	5838	1053	8276	1043	0,140044	1026	0,190744	1001	0,239993	968	7416	927	1,6
3,5	6891	1053	0,089319	1043	1070	1025	1745	1000	0,240961	967	8343	927	1,5
3,6	7944	1053	0,090362	1043	2095	1025	2745	999	1928	966	0,289270	925	1,4
3,7	0,038997	1052	1405	1043	3120	1024	3744	999	2894	965	0,290195	925	1,3
3,8	0,040049	1052	2448	1042	4144	1024	4743	998	3859	965	1120	924	1,2
3,9	1101	1052	3490	1041	5168	1024	5741	998	4824	964	2044	923	1,1
4,0	2153	1052	4531	1042	6192	1023	6739	997	5788	963	2967	922	1,0
4,1	3205	1052	5573	1041	7215	1023	7736	996	6751	962	3889	921	0,9
4,2	4257	1052	6614	1041	8238	1022	8732	996	7713	962	4810	920	0,8
4,3	5309	1052	7655	1040	0,149260	1022	0,199728	995	8675	961	5730	919	0,7
4,4	6361	1052	8695	1041	0,150282	1021	0,200723	994	0,249636	960	6649	918	0,6
4,5	7413	1051	0,099736	1040	1303	1021	1717	994	0,250596	959	7567	918	0,5
4,6	8464	1051	0,100776	1040	2324	1020	2711	993	1555	959	8485	916	0,4
4,7	0,049515	1051	1816	1039	3344	1020	3704	993	2514	958	0,299401	916	0,3
4,8	0,050566	1051	2855	1040	4364	1019	4697	992	3472	957	0,300317	915	0,2
4,9	0,051617	1050	3895	1040	5383	1019	5689	991	4429	956	0,301232	914	0,1
5,0	0,052667		0,104935		0,156402		0,206680		0,255385		0,302146		0,0
Arg.	175°+ 355°−		170°+ 350°−		165°+ 345°−		160°+ 340°−		155°+ 335°−		150°+ 330°−		Arg.

Sinus der Abweichung.

Tafel 53. Fortsetzung. Arg. $f + \omega + \eta$

Arg.	30°+ 210°−	D.	35°+ 215°−	D.	40°+ 220°−	D.	45°+ 225°−	D.	50°+ 230°−	D.	55°+ 235°−	D.
0,0	0,302146	913	0,346609	863	0,388432	807	0,427299	745	0,462915	677	0,495007	604
0,1	3059	912	7472	862	0,389239	806	8044	744	3592	676	5611	603
0,2	3971	911	8334	862	0,390045	805	8788	743	4268	674	6214	601
0,3	4882	910	0,349196	860	0850	804	0,429531	741	4942	673	6815	600
0,4	5792	910	0,350056	859	1654	803	0,430272	740	5615	672	7415	598
0,5	6702	909	0915	858	2457	801	1012	738	6287	670	8013	597
0,6	7611	908	1773	857	3258	800	1750	738	6957	669	8610	595
0,7	8519	906	2630	856	4058	799	2488	736	7626	667	9205	594
0,8	0,309425	905	3486	855	4857	798	3224	735	8293	666	0,499799	592
0,9	0,310330	905	4341	854	5655	796	3959	733	8959	664	0,500391	590
1,0	1235	904	5195	853	6151	796	4692	732	0,469623	663	0981	589
1,1	2139	902	6048	851	7247	794	5424	731	0,470286	662	1570	588
1,2	3041	901	6899	851	8011	793	6155	729	0948	660	2158	586
1,3	3942	901	7750	849	8834	792	6884	728	1608	659	2744	584
1,4	4843	900	8599	849	0,399626	791	7612	727	2267	657	3328	583
1,5	5743	899	0,359448	847	0,400417	789	8339	725	2924	656	3911	581
1,6	6642	897	0,360295	846	1206	788	9064	724	3580	654	4492	580
1,7	7539	897	1141	845	1994	787	0,439788	722	4234	653	5072	579
1,8	8436	896	1986	844	2781	786	0,440510	721	4887	652	5651	577
1,9	0,319332	895	2830	843	3567	784	1231	720	5539	650	6228	575
2,0	0,320227	894	3673	842	4351	783	1951	719	6189	649	6803	574
2,1	1121	893	4515	840	5134	782	2670	717	6838	647	7377	572
2,2	2014	892	5355	840	5916	781	3387	716	7485	646	7949	571
2,3	2906	891	6195	838	6697	779	4103	715	8131	644	8520	569
2,4	3797	890	7033	838	7476	778	4818	713	8775	643	9089	567
2,5	4687	889	7871	836	8254	777	5531	712	0,479418	641	0,509656	566
2,6	5576	888	8707	835	9031	776	6243	711	0,480059	640	0,510222	564
2,7	6464	887	0,369542	834	0,409807	774	6954	709	0699	638	0786	563
2,8	7351	886	0,370376	833	0,410581	773	7663	708	1337	637	1349	561
2,9	8237	885	1209	831	1354	773	8371	706	1974	635	1910	560
3,0	0,329122	884	2040	831	2127	771	9077	705	2609	634	2470	558
3,1	0,330006	883	2871	829	2898	769	0,449782	704	3243	633	3028	557
3,2	0859	882	3700	828	3667	768	0,450486	702	3876	631	3585	555
3,3	1771	881	4528	827	4435	767	1188	701	4507	629	4140	553
3,4	2652	880	5355	826	5202	766	1889	700	5136	628	4693	552
3,5	3532	879	6181	825	5968	764	2589	698	5764	627	5245	550
3,6	4411	878	7006	824	6732	763	3287	697	6391	625	5795	549
3,7	5289	877	7830	822	7495	762	3984	695	7016	624	6344	547
3,8	6166	876	8652	822	8257	761	4679	694	7640	622	6891	546
3,9	7042	875	0,379474	820	9018	759	5373	692	8262	621	7437	544
4,0	7917	874	0,380294	819	0,419777	758	6065	691	8883	619	7981	542
4,1	8791	873	1113	818	0,420535	757	6756	690	0,489502	618	8523	541
4,2	0,339664	872.	1931	817	1292	755	7446	689	0,490120	616	9064	539
4,3	0,340536	870	2748	815	2047	754	8135	687	0736	615	0,519603	538
4,4	1406	870	3563	815	2801	753	8822	686	1351	613	0,520141	536
4,5	2276	869	4378	813	3554	752	0,459508	684	1964	611	0677	534
4,6	3145	868	5191	812	4306	750	0,460192	683	2575	610	1211	533
4,7	4013	866	6003	811	5056	749	0875	681	3185	609	1744	531
4,8	4879	866	6814	810	5805	748	1556	680	3794	607	2275	530
4,9	5745	864	7624	808	6553	746	2236	679	4401	606	2805	528
5,0	0,346609		0,388432		0,427299		0,462915		0,495007		0,523333	
Arg.	145°+ 325°−		140°+ 320°−		135°+ 315°−		130°+ 310°−		125°+ 305°−		120°+ 300°−	

Sinus der Abweichung.

Tafel 53. Schluss. Arg. $f + \omega + \eta$

Arg.	60°+ 240°—	D.	65°+ 245°—	D.	70°+ 250°—	D.	75°+ 255°—	D.	80°+ 260°—	D.	85°+ 265°—	D.	Arg.
0,0	0,523333	527	0,547676	445	0,567850	360	0,583703	272	0,595112	182	0,601994	91	5,0
0,1	3860	525	8121	443	8210	358	3975	270	5294	181	2085	89	4,9
0,2	4385	523	8564	441	8568	356	4245	268	5475	178	2174	87	4,8
0,3	4908	522	9005	440	8924	355	4513	267	5653	177	2261	86	4,7
0,4	5430	520	9445	438	9279	353	4780	265	5830	175	2347	83	4,6
0,5	5950	519	0,549883	437	9632	351	5045	263	6005	173	2430	82	4,5
0,6	6469	517	0,550320	435	0,569983	349	5308	261	6178	171	2512	80	4,4
0,7	6986	515	0755	433	0,570332	348	5569	260	6349	170	2592	78	4,3
0,8	7501	514	1188	431	0680	346	5829	258	6519	168	2670	76	4,2
0,9	8015	512	1619	430	1026	344	6087	256	6687	166	2746	75	4,1
1,0	8527	510	2049	428	1370	342	6343	254	6853	164	2821	73	4,0
1,1	9037	509	2477	427	1712	341	6597	253	7017	162	2894	71	3,9
1,2	0,529546	507	2904	425	2053	339	6850	250	7179	160	2965	69	3,8
1,3	0,530053	506	3329	423	2392	337	7100	249	7339	159	3034	67	3,7
1,4	0559	504	3752	421	2729	336	7349	247	7498	157	3101	65	3,6
1,5	1063	503	4173	420	3065	334	7596	246	7655	155	3166	64	3,5
1,6	1566	501	4593	418	3399	332	7842	243	7810	153	3230	61	3,4
1,7	2067	499	5011	416	3731	330	8085	242	7963	152	3291	60	3,3
1,8	2566	497	5427	415	4061	329	8327	240	8115	149	3351	58	3,2
1,9	3063	496	5842	413	4390	327	8567	238	8264	148	3409	56	3,1
2,0	3559	494	6255	411	4717	325	8805	236	8412	146	3465	54	3,0
2,1	4053	493	6666	410	5042	323	9041	235	8558	144	3519	52	2,9
2,2	4546	491	7076	408	5365	321	9276	233	8702	142	3571	51	2,8
2,3	5037	490	7484	406	5686	320	9509	231	8844	141	3622	49	2,7
2,4	5527	488	7890	404	6006	318	9740	229	8985	138	3671	47	2,6
2,5	6015	486	8294	403	6324	317	0,589969	227	9123	137	3718	45	2,5
2,6	6501	484	8697	401	6641	314	0,590196	226	9260	135	3763	43	2,4
2,7	6985	483	9098	399	6955	313	0422	224	9395	133	3806	42	2,3
2,8	7468	481	9497	398	7268	311	0646	222	9528	131	3848	39	2,2
2,9	7949	480	0,559895	396	7579	310	0868	220	9659	130	3887	38	2,1
3,0	8429	478	0,560291	394	7889	307	1088	218	9789	127	3925	36	2,0
3,1	8907	476	0685	392	8196	306	1306	217	0,599916	126	3961	34	1,9
3,2	9383	475	1077	391	8502	304	1523	214	0,600042	124	3995	32	1,8
3,3	0,539858	473	1468	389	8806	302	1737	213	0166	122	4027	30	1,7
3,4	0,540331	471	1857	387	9108	300	1950	211	0288	120	4057	28	1,6
3,5	0802	470	2244	386	9408	299	2161	210	0408	119	4085	27	1,5
3,6	1272	468	2630	384	0,579707	297	2371	207	0527	117	4112	25	1,4
3,7	1740	467	3014	383	0,580004	295	2578	206	0644	115	4137	23	1,3
3,8	2207	465	3397	380	0299	293	2784	204	0759	113	4160	21	1,2
3,9	2672	463	3777	379	0592	292	2988	202	0872	111	4181	20	1,1
4,0	3135	461	4156	377	0884	290	3190	202	0983	109	4201	17	1,0
4,1	3596	460	4533	376	1174	288	3390	199	1092	108	4218	16	0,9
4,2	4056	458	4909	373	1462	286	3589	197	1200	105	4234	14	0,8
4,3	4514	457	5282	372	1748	284	3786	195	1305	104	4248	12	0,7
4,4	4971	455	5654	370	2032	283	3981	193	1409	102	4260	10	0,6
4,5	5426	453	6024	369	2315	281	4174	191	1511	100	4270	8	0,5
4,6	5879	452	6393	367	2596	279	4365	189	1611	98	4278	6	0,4
4,7	6331	450	6760	365	2875	278	4554	188	1709	97	4284	5	0,3
4,8	6781	448	7125	363	3153	276	4742	186	1806	95	4289	3	0,2
4,9	7229	447	7488	362	3429	274	4928	184	1901	93	4292	1	0,1
5,0	0,547676		0,567850		0,583703		0,595112		0,601994		0,604293		0,0
Arg.	115°+ 295°—		110°+ 290°—		105°+ 285°—		100°+ 280°—		95°+ 275°—		90°+ 270°—		Arg.

Hülfstafel um Decimaltheile des Grades in Minuten und Secunden zu verwandeln.

0°01	0' 36"	0°51	30' 36"	0°0001	0",36	0°0051	18",36
0,02	1 12	0,52	31 12	0,0002	0,72	0,0052	18,72
0,03	1 48	0,53	31 48	0,0003	1,08	0,0053	19,08
0,04	2 24	0,54	32 24	0,0004	1,44	0,0054	19,44
0,05	3 0	0,55	33 0	0,0005	1,80	0,0055	19,80
0,06	3 36	0,56	33 36	0,0006	2,16	0,0056	20,16
0,07	4 12	0,57	34 12	0,0007	2,52	0,0057	20,52
0,08	4 48	0,58	34 48	0,0008	2,88	0,0058	20,88
0,09	5 24	0,59	35 24	0,0009	3,24	0,0059	21,24
0,10	6 0	0,60	36 0	0,0010	3,60	0,0060	21,60
0,11	6 36	0,61	36 36	0,0011	3,96	0,0061	21,96
0,12	7 12	0,62	37 12	0,0012	4,32	0,0662	22,32
0,13	7 48	0,63	37 48	0,0013	4,68	0,0063	22,68
0,14	8 24	0,64	38 24	0,0014	5,04	0,0064	23,04
0,15	9 0	0,65	39 0	0,0015	5,40	0,0065	23,40
0,16	9 36	0,66	39 36	0,0016	5,76	0,0066	23,76
0,17	10 12	0,67	40 12	0,0017	6,12	0,0067	24,12
0,18	10 48	0,68	40 48	0,0018	6,48	0,0068	24,48
0,19	11 24	0,69	41 24	0,0019	6,84	0,0069	24,84
0,20	12 0	0,70	42 0	0,0020	7,20	0,0070	25,20
0,21	12 36	0,71	42 36	0,0021	7,56	0,0071	25,56
0,22	13 12	0,72	43 12	0,0022	7,92	0,0072	25,92
0,23	13 48	0,73	43 48	0,0023	8,28	0,0073	26,28
0,24	14 24	0,74	44 24	0,0024	8,64	0,0074	26,64
0,25	15 0	0,75	45 0	0,0025	9,00	0,0075	27,00
0,26	15 36	0,76	45 36	0,0026	9,36	0,0076	27,36
0,27	16 12	0,77	46 12	0,0027	9,72	0,0077	27,72
0,28	16 48	0,78	46 48	0,0028	10,08	0,0078	28,08
0,29	17 24	0,79	47 24	0,0029	10,44	0,0079	28,44
0,30	18 0	0,80	48 0	0,0030	10,80	0,0080	28,80
0,31	18 36	0,81	48 36	0,0031	11,16	0,0081	29,16
0,32	19 12	0,82	49 12	0,0032	11,52	0,0082	29,52
0,33	19 48	0,83	49 48	0,0033	11,88	0,0083	29,88
0,34	20 24	0,84	50 24	0,0034	12,24	0,0084	30,24
0,35	21 0	0,85	51 0	0,0035	12,60	0,0085	30,60
0,36	21 36	0,86	51 36	0,0036	12,96	0,0086	30,96
0,37	22 12	0,87	52 12	0,0037	13,32	0,0087	31,32
0,38	22 48	0,88	52 48	0,0038	13,68	0,0088	31,68
0,39	23 24	0,89	53 24	0,0039	14,04	0,0089	32,04
0,40	24 0	0,90	54 0	0,0040	14,40	0,0090	32,40
0,41	24 36	0,91	54 36	0,0041	14,76	0,0091	32,76
0,42	25 12	0,92	55 12	0,0042	15,12	0,0092	33,12
0,43	25 48	0,93	55 48	0,0043	15,48	0,0093	33,48
0,44	26 24	0,94	56 24	0,0044	15,84	0,0094	33,84
0,45	27 0	0,95	57 0	0,0045	16,20	0,0095	34,20
0,46	27 36	0,96	57 36	0,0046	16,56	0,0096	34,56
0,47	28 12	0,97	58 12	0,0047	16,92	0,0097	34,92
0,48	28 48	0,98	58 48	0,0048	17,28	0,0098	35,28
0,49	29 24	0,99	59 24	0,0049	17,64	0,0099	35,64
0,50	30 0	1,00	60 0	0,0050	18,00	0,0100	36,00

VON DER METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE IM ALLGEMEINEN

UND

IN IHRER ANWENDUNG AUF DIE GEODÄSIE.

VON

P. A. HANSEN,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESSELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTN.

Des VIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

№ V.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1867.

Vom Verfasser übergeben den 10. Juli 1867.
Der Abdruck vollendet den 16. September 1867.

VON DER METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATE IM ALLGEMEINEN

UND

IN IHRER ANWENDUNG AUF DIE GEODÄSIE

VON

P. A. HANSEN.

Der Hauptzweck dieser Abhandlung ist die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Geodäsie, oder die Ausgleichung der Winkel eines Dreiecksnetzes, auf die Art darzulegen, die mir die geeignetste zu sein scheint. Zwar hat Gauss schon einen speciellen Fall dieser Anwendung in einer Abhandlung, die in Bezug auf die Sache selbst die erste war, niedergelegt*), während Bessel fast gleichzeitig seine Auflösung derselben Aufgabe veröffentlichen liess**). Später hat Bessel seine Auflösung der allgemeineren Aufgabe veröffentlicht***), und ich habe fast gleichzeitig eine wesentlich davon verschiedene Auflösung einer noch allgemeineren Aufgabe, aber kurz gefasst, und gleichsam nur im Scelet gegeben †).

Es ist namentlich diese letztgenannte Auflösung, die ich vollständig ausgearbeitet in der gegenwärtigen Abhandlung niedergelegt habe, und die sich von der Bessel'schen vielfach, unter andern dadurch unterscheidet, dass ich die unbestimmten Auflösungen von Systemen von linearischen Gleichungen, die Bessel verlangt, vollständig vermieden habe; ich bin anzunehmen geneigt, dass durch mein Verfahren eine grössere Kürze der auszuführenden Rechnungen erlangt wird. Auch habe ich nicht nur die Vorschriften zur Berechnung der Gewichte beliebiger Functionen der

*) Gauss, Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Gottingae 1828.

**) Schum. A. N. B. VI. No. 121.

***) Bessel und Baeyer, Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit Preussischen und Russischen Dreiecksketten. Berlin 1838.

†) Schum. A. N. B. XVI. No. 361.

Unbekannten, die bei Bessel fehlen, vollständig entwickelt, sondern auch gezeigt, wie verfahren werden muss, wenn mehr wie Eine Grundlinie gemessen worden ist, oder wenn man das auszugleichende Dreiecksnetz an ein anderes, nebenliegendes, schon ausgeglichenes anschliessen will.

Bei der Ausgleichung eines grossen, aus vielen Dreiecken bestehenden Netzes ist es von Wichtigkeit, die anzuwendenden allgemeinen Formeln in solcher Darstellung und Aufeinanderfolge vor sich zu haben, dass man nie die vollständige Uebersicht verlieren kann, denn wenn dieser Umstand eintreten sollte, so ist er nur durch Verlust an Zeit und Arbeit zu heben. Aus diesem Grunde habe ich mich schon im Laufe der Ableitungen und während der Ausführung eines Beispiels bemüht, die Erklärungen möglichst vollständig zu geben, und schliesslich habe ich aus demselben Grunde noch eine Recapitulation aller Vorschriften und Formeln gegeben, die wohl ausserdem überflüssig gewesen wäre, von welcher mir aber schien, dass sie die Uebersichtlichkeit fördern möchte.

Wenn gleich die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Geodäsie den Hauptgrund zur Abfassung dieser Abhandlung bildete, so wollte ich doch nicht unterlassen diese Methode auch in ihrer Allgemeinheit, und in der ganzen Ausdehnung, die sie gegenwärtig besitzt, zu entwickeln, und dabei einen Weg zu verfolgen, den ich schon seit vielen Jahren überlegt habe. Gewöhnlich geht man bei der Ableitung dieser Methode im Allgemeinen von den allgemeinen Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus, aber es zeigt sich immer im Laufe der Entwickelungen, dass man damit nicht vollständig ausreicht, sondern immer in grösserem oder geringerem Maasse den Satz zu Hülfe nehmen muss, dass bei der Bestimmung Einer Unbekannten aus einer Anzahl von gleich guten Beobachtungen das arithmetische Mittel aus diesen der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten sei. Da dieses sich so verhält, so nahm ich mir vor diesen Satz als Axiom an die Spitze der Ableitungen zu stellen. und aus demselben das Verfahren abzuleiten, welches zu befolgen ist, wenn die Werthe mehrerer Unbekannten aus Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit zu bestimmen sind, und die Zahl dieser Beobachtungen grösser ist wie die der Unbekannten. Ich wurde, wie sich voraussehen liess, auf diese Weise auf die Methode der kleinsten Quadrate hingeführt. Der Satz, welcher hiedurch bewiesen worden ist, lässt sich streng genommen wie folgt aussprechen:

»Mit demselben Recht, mit welchem man im ersteren, einfachsten Falle das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der einzigen Unbekannten ansieht, muss man im anderen, allgemeinen Falle diejenigen Werthe der Unbekannten als die wahrscheinlichsten Werthe derselben betrachten, durch welche bewirkt wird, dass die Summe der mit ihren bez. Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum wird.«

Ich glaube, dass in Bezug auf die Methode der kleinsten Quadrate dieser Satz an der Grenze der streng beweisbaren Sätze liegt.

Während bei der Ableitung dieses Satzes sich für den Begriff des Gewichts einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen eine einfache und sachgemässe Erklärung darbietet, bleibt es ohne Weiteres unmöglich, die Relation zwischen den Gewichten und den relativen Genauigkeiten zweier oder mehrerer Beobachtungen festzustellen. Hiezu musste ich zwei bekannte Sätze aus den Elementen der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwenden und mit dem obigen Axiom verbinden. Das Resultat, welches unter andern hieraus hervorging, ist das bekannte, nemlich dass die Gewichte den Quadraten der Genauigkeiten proportional sind. Es brauchten diese Untersuchungen wieder nur in der Annahme Einer Unbekannten ausgeführt zu werden, da die Folgerungen, die daraus entsprangen, ohne Weiteres auf eine beliebige Anzahl von Unbekannten ausgedehnt werden konnten. Aus diesem Grunde wurden sie vor der vollständigen Ableitung des oben angeführten Satzes dem Texte einverleibt.

Die Abhandlung behandelt der Reihe nach die folgenden Themata:

§. 1. Ermittelung des wahrscheinlichsten Werthes Einer Unbekannten aus Beobachtungen. Art. 1—17.

§. 2. Ausdehnung des Vorhergehenden auf den Fall, in welchem die Werthe mehrerer unabhängiger Unbekannten durch Beobachtungen zu bestimmen sind. Art. 18—27.

§. 3. Ausdehnung der bisher behandelten Aufgabe auf den Fall, in welchem die Unbekannten nicht von einander unabhängig sind. Art. 28—63.

§. 4. Anwendung der eben gelösten Aufgabe auf die Geodäsie, unter der Bedingung, dass nur Eine Grundlinie gemessen worden ist.

a) Erstes Verfahren. Art. 64—107.

b) Zweites Verfahren. Art. 108—118.

§. 1. Ermittelung des wahrscheinlichsten Werthes Einer Unbekannten aus Beobachtungen.

1.

Grundsatz.

»Wenn für die unmittelbare Bestimmung einer unbekannten Grösse mehrere von einander unabhängige Beobachtungen vorhanden sind, die alle unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellt worden sind, so ist der aus diesen Beobachtungen hervorgehende wahrscheinlichste Werth der Unbekannten das arithmetische Mittel aus allen diesen Beobachtungen.«

Man kann diesen Satz zwar nicht vollständig beweisen, aber es lässt sich vieles anführen, welches dafür spricht, dass er in der Natur der Sache begründet ist. Es kann strenge genommen nur bewiesen werden, dass man bei der Anwendung dieses Satzes durch die Vermehrung der Anzahl der Beobachtungen sich immer mehr und mehr dem wahren Werthe der Unbekannten nähert. Beobachtungen, die unter gleichen Umständen und mit gleicher Sorgfalt angestellt worden sind, müssen nothwendig als mit gleicher Genauigkeit begabt angesehen werden, und es muss daher gewiss das aus denselben hervorgehende wahrscheinlichste Resultat wenigstens eine symmetrische Function von allen durch die Beobachtungen erhaltenen Werthen sein. Die Summe aller dieser Werthe ist aber die einfachste symmetrische Function derselben, die man sich denken kann. Wenn nun die Unbekannte x genannt wird, und m Beobachtungen nach und nach n, n', n'', etc.

für x gegeben haben, so dass aus denselben nach und nach hervorgegangen ist,

$$x = n$$
$$x = n'$$
$$x = n'' \text{ etc.}$$

dann wird

$$mx = n + n' + n'' + \text{ etc.}$$

und hieraus

$$x = \frac{n + n' + n'' + \text{ etc.}}{m}.$$

das ist, x wird gleich dem arithmetischen Mittel aus allen Beobachtungen.

Betrachten wir nun die Beschaffenheit des Fehlers, den wir begehen indem wir x durch die vorstehende Gleichung bestimmen. Seien der wahre Werth der Unbekannten w, und die wahren Fehler der Beobachtungen e, e', e'', etc., so dass

$$n = w + e, \quad n' = w + e', \quad n'' = w + e'', \quad \text{etc.}$$

wird, dann wird der Ausdruck des arithmetischen Mittels

$$x = w + \frac{e + e' + e'' + \text{ etc.}}{m}$$

Vorausgesetzt nun, dass kein Grund vorhanden ist um anzunehmen, dass gleiche positive und negative Fehler verschiedene Wahrscheinlichkeiten haben, muss die Summe $e + e' + e'' +$ etc. sich um desto mehr dem Werthe Null nähern, je mehr Beobachtungen vorhanden sind. Denn je öfterer die Beobachtungen wiederholt werden, mit desto grösserem Rechte darf man erwarten, dass alle möglichen Fälle in gleicher Anzahl vorgekommen sind, gleichwie man mit einem symmetrisch gearbeiteten homogenen Würfel um so mehr jede Zahl gleich viele Mal geworfen haben muss, je grösser die Anzahl der Würfe ist. Aber unter der obigen Voraussetzung, dass positive und negative Beobachtungsfehler gleiche Wahrscheinlichkeit haben, wird bei wachsendem m die Zahl und die Grösse der positiven Werthe von e sich der Zahl und der Grösse der negativen e unbegrenzt nähern, also schliesslich die Summe $e + e' + e'' +$ etc. Null werden, wie oben behauptet wurde. Aus mehrerem Grunde muss daher bei wachsendem m die Function

$$\frac{e + e' + e'' + \text{ etc.}}{m}$$

unmerklich werden, und der Werth $x = w$ aus dem arithmetischen Mittel hervorgehen.

2.

Indem wir nun immer das arithmetische Mittel aus gleich guten Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten ansehen, nehmen wir zugleich an, dass die Beobachtungsfehler bez.

$$n - \frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}$$
$$n' - \frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}$$
$$n'' - \frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}$$

u. s. w. seien. Aber es ist immer

$$\left(n-\frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}\right)+\left(n'-\frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}\right)+\left(n''-\frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}\right)+\text{etc.}=0.$$

und wir erfüllen also, indem wir das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten ansehen, wie auch die Anzahl der Beobachtungen beschaffen sei, die Bedingung, die strenge genommen stattfindet, wenn die Anzahl der Beobachtungen unendlich gross ist. Wir nähern uns also gewiss durch Vergrösserung der Anzahl der Beobachtungen dem wahren Werthe der Unbekannten, und dieses ist in der That alles was wir thun können, da die wahren Beobachtungsfehler uns stets unbekannt bleiben werden.

3.

Im vor. Art. ist schon eine Relation abgeleitet worden, die zwischen den übrig bleibenden Fehlern stattfindet, wenn man das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten betrachtet, aber es besteht zwischen diesen Fehlern noch eine merkwürdige Relation, die in dem folgenden Satze enthalten ist.

»Wenn man das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten betrachtet, so bewirkt man dadurch, dass die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum wird.«

Um diesen Satz zu beweisen, bemerke ich, dass man die übrig bleibenden Fehler durch $x-n$, $x-n'$, $x-n''$, etc. ausdrücken kann, und der Satz verlangt demzufolge, dass

$$(x-n)^2 + (x-n')^2 + (x-n'')^2 + \text{etc.} = \text{Minimum}$$

sei. Es ist an sich klar, dass diese Function kein Maximum haben kann, denn lässt man x unbestimmt (positiv oder negativ) wachsen, so nähert

sich der Werth derselben immer mehr und mehr dem unendlich Grossen. Die bekannte Bedingung des Minimums giebt nun hier

$$(x-n)+(x-n')+(x-n'')+\text{etc.}=0$$

woraus

$$x=\frac{n+n'+n''+\text{etc.}}{m}$$

folgt. W. z. b. w.

4.

Es ist im Vorhergehenden angenommen worden, dass gleiche positive und negative Fehler gleich wahrscheinlich seien, wir wollen aber jetzt annehmen, dass dieses nicht der Fall sei, und die Folgen untersuchen, die dieser Umstand auf die Bestimmung der Unbekannten ausübt. Im jetzt zu betrachtenden Falle wird sich die Summe $e+e'+e''+$ etc. bei stets wachsender Anzahl von Beobachtungen nicht der Null, sondern einer gewissen positiven oder negativen Grösse nähern, die ich mit mk bezeichnen will, woraus folgt, dass der positive (oder bez. negative) Fehler $e+k$ mit dem negativen (oder bez. positiven) Fehler e gleiche Wahrscheinlichkeit hat. Aus einer stets wachsenden Anzahl von Beobachtungen wird man nun, wenn man wie vorher das arithmetische Mittel aus denselben zur Bestimmung von x anwendet, schliesslich

$$x=w+k$$

statt des wahren Werthes $x=w$ erhalten. Man kann nun nie durch irgend ein der Wahrscheinlichkeitsrechnung entlehntes Princip k von w trennen, sondern muss dafür andere Mittel in Anspruch nehmen, und diese können in nichts anderem bestehen, als in sorgfältiger Ausarbeitung und Anwendung der bei der Lösung der Aufgabe anderweitig in Betracht kommenden Theorien. Wenn sowohl die Theorie, zufolge welcher x sich aus den angestellten Beobachtungen ergiebt, als die Theorie des zur Beobachtung angewandten Instruments vollständig bekannt sind, und richtig angewandt werden, so können nie gleiche positive und negative Fehler verschiedene Wahrscheinlichkeiten haben, und es muss aus diesem Grunde $k=0$ werden. Wenn aber im Gegentheil diese Theorien, oder nur Eine derselben mangelhaft ist, oder unzweckmässig angewandt wird, dann ist es nachher unmöglich den constanten Fehler k aus dem Resultat der Beobachtungen zu entfernen. Aus diesen

Gründen wird im Verlaufe dieser Abhandlung stets stillschweigend angenommen werden, dass $k = 0$ ist.

5.

Ich nehme jetzt an, dass der Werth $x = N$ das nach dem Vorhergehenden aus m Beobachtungen genommene arithmetische Mittel sei. Man habe ferner, nachdem dieses Resultat schon berechnet worden ist, zur Bestimmung derselben Unbekannten x eine Reihe von m' anderen, von jenen unabhängigen, Beobachtungen angestellt, die einzeln für eben so genau wie jene gehalten werden müssen, und daraus auf dieselbe Weise $x = N'$ erhalten, später habe man noch m'' andere gleich gute Beobachtungen, und daraus $x = N''$ erhalten, u. s. w. Wenn man hierauf aus allen diesen Beobachtungen den wahrscheinlichsten Werth von x berechnen will, so ist es von selbst klar, dass die Gruppirungen, die vorher gemacht worden sind, keinen Einfluss auf das neue Resultat haben dürfen, und dass man jetzt wie vorher, ehe die m', m'', etc. Beobachtungen angestellt worden waren, aus allen nun vorhandenen Beobachtungen das arithmetische Mittel nehmen muss. Da mN die Summe der ersten, $m'N'$ die Summe der zweiten, $m''N''$ die Summe der dritten Gruppe von Beobachtungen ist, u. s. w., so hat jetzt das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen, oder mit anderen Worten der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{mN + m'N' + m''N'' + \text{etc.}}{m + m' + m'' + \text{etc.}}$$

zum Ausdruck. Wenn wir nun annehmen, dass der Werth von $x = N$ das Resultat einer einzigen Beobachtung von solcher Beschaffenheit wäre, dass man sie für eben so genau halten müsste, wie das arithmetische Mittel aus m solcher Beobachtungen, aus denen die anderen Gruppen bestehen, so ist an sich klar, dass der wahrscheinlichste Werth von x immer noch derselbe bleibt, den der Ausdruck (1) giebt, und da wir denselben Schluss auf alle übrigen Gruppen N', N'', etc. von Beobachtungen ausdehnen können, so ergiebt sich, dass der Ausdruck (1) immer noch der wahrscheinlichste Werth von x ist, wenn N, N', N'', etc. einzelne Beobachtungen von der Beschaffenheit sind, dass man die Beobachtung, welche N gegeben hat, für eben so genau halten muss, wie das arithmetische Mittel aus m, die welche N' gegeben hat, für eben so genau wie das arithmetische Mittel aus m', die welche N'' gegeben hat,

für eben so genau wie das arithmetische Mittel aus m'' u. s. w. anderen Beobachtungen, denen allen irgend eine und dieselbe Genauigkeit beigelegt werden muss. Wenn man daher unter der Bezeichnung des Gewichts irgend einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen die Anzahl von Beobachtungen von der Genauigkeit = 1 versteht, deren arithmetisches Mittel für eben so genau gehalten werden muss, wie diese Beobachtung oder dieses Resultat aus Beobachtungen, so können wir den Ausdruck (1) in folgenden Satz einkleiden:

»Wenn man für die Bestimmung einer Unbekannten mehrere Beobachtungen angestellt hat, die so beschaffen sind, dass man ihnen bez. die Gewichte m, m', m'', etc. beilegen muss, so erhält man den wahrscheinlichsten Werth dieser Unbekannten, wenn man das Resultat einer jeden Beobachtung mit seinem Gewicht multiplicirt, diese Produkte addirt und mit der Summe aller Gewichte dividirt.«

Es folgt ferner aus den obigen Betrachtungen der Satz:

»Das Gewicht dieser Bestimmung der Unbekannten ist der Summe der Gewichte aller dazu zugezogenen Beobachtungen gleich.«

6.

Aus den Betrachtungen des vor. Art. können wir ausserdem noch die folgenden Folgerungen ziehen.

Das Gewicht irgend einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen ist immer relativ zu verstehen, indem immer die Genauigkeit oder das Gewicht irgend einer bestimmten Gattung von Beobachtungen = 1 gesetzt werden muss.

Die obige Ableitung des Begriffs des Gewichts beschränkt sich, strenge genommen, nur auf die Fälle, wo die Gewichte ganze Zahlen sind, allein es ist sehr leicht den Begriff des Gewichts auch auf gebrochene oder irrationale Zahlen auszudehnen. Denn wenn man durch geeignete Mittel in Erfahrung gebracht hat, dass irgend eine Beobachtung für genauer gehalten werden muss wie das arithmetische Mittel aus m, hingegen für weniger genau wie das arithmetische Mittel aus $m+1$ Beobachtungen der Gattung deren Gewicht = 1 gesetzt wird, so ist es klar, dass das Gewicht dieser Beobachtung nur gleich m plus einem Bruchtheil der Einheit sein kann, und nichts hindert uns in solchen Fällen das Gewicht dieser Beobachtung demgemäss anzunehmen, wenn nur Mittel vorhanden sind den Bruchtheil zu bestimmen. Aus demselben

Grunde sind wir eben so wenig gehindert, das Gewicht einer Beobachtung, die für weniger genau gehalten werden muss wie eine Beobachtung der Gattung, deren Gewicht = 1 gesetzt worden ist, durch einen ächten Bruch auszudrücken.

Endlich bedingt der oben festgesetzte Begriff des Gewichts nothwendig eine positive Zahl, und ein negatives Gewicht kann keinen Sinn haben.

7.

Es ist hiebei noch das Folgende zu bemerken. Da die Genauigkeit der verschiedenen Beobachtungen von der ungenauesten an, deren Gewicht = 0 angenommen, oder die als verfehlt betrachtet und verworfen werden muss, bis zur genauesten durch unendlich kleine Abstufungen wächst, so lässt sich gewiss immer eine Gattung von Beobachtungen denken, in Bezug auf welche das Gewicht irgend einer beliebigen anderen Beobachtung durch eine ganze Zahl ausgedrückt werden kann. Verändert man hierauf die Gattung von Beobachtungen, deren Gewicht der Einheit gleich gesetzt worden ist, so kann man dadurch schon auf Gewichte kommen, die nicht mehr durch ganze Zahlen ausgedrückt werden können. Um dieses deutlicher zu machen, will ich annehmen, man habe verschiedene Beobachtungen, denen zufolge der Wahl der Gattung von Beobachtungen, deren Gewicht = 1 gesetzt worden ist, die Gewichte 2, 3, 4, etc. beigelegt werden müssen, ändert man hierauf jene Gattung von Beobachtungen, die zur Einheit des Gewichts dienen, und wählt dafür eine andere, z. B. eine solche deren Gewicht das Dreifache jenes ist, dann sind die Gewichte der übrigen Beobachtungen schon nicht durchaus mehr ganze Zahlen, sondern gehen in die folgenden über, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$, etc. Man sieht hieraus wie die obige Definition des Gewichts auch schon ohne die Betrachtungen des vor. Art. zu Hülfe zu ziehen, auf gebrochene Zahlen führen kann.

8.

Die Relation, die wir im Art. 5 zwischen dem Gewicht einer Beobachtung und dem Gewicht des arithmetischen Mittels aus einer gewissen Anzahl gleich guter Beobachtungen aufgestellt haben, führt uns auf die Aufgabe zu bestimmen: wie gross denn eigentlich die Genauigkeit des arithmetischen Mittels aus einer gewissen Anzahl gleich guter

Beobachtungen in Bezug auf die Genauigkeit einer jeden einzelnen dieser Beobachtungen sei?

Die Lösung dieser Aufgabe fällt der Wahrscheinlichkeitsrechnung anheim, wenn wir erst festgesetzt haben werden, was unter relativer Genauigkeit verstanden werden muss.

»Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler irgend einer Beobachtung oder irgend eines Resultats aus Beobachtungen zwischen den Grenzen $-c$ und $+c$ liegt, der Wahrscheinlichkeit gleich ist, dass der Fehler irgend einer anderen Beobachtung oder irgend eines anderen Resultats aus Beobachtungen zwischen den Grenzen $-c'$ und $+c'$ liegt, so verhält sich die Genauigkeit des ersten Resultats zu der des zweiten wie c' zu c.«

Vermittelst dieser Definition, die die einfachste und sachgemässeste ist, die man von dem Begriff der relativen Genauigkeit einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen aufstellen kann, wird es leicht sein das Verhältniss der Genauigkeit einer einzelnen Beobachtung zu der des arithmetischen Mittels aus irgend einer Anzahl für gleich gut zu haltenden Beobachtungen zu bestimmen, wenn wir von dem Gesichtspunkt ausgehen, dass das arithmetische Mittel überhaupt der wahrscheinlichste Werth der aus diesen Beobachtungen zu bestimmenden Unbekannten ist.

9.

Sei für irgend eine bestimmte Gattung von Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Δ durch $\varphi\Delta$, wo φ ein Functionszeichen ist, ausgedrückt, dann wird, wenn wir die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler irgend einer Beobachtung dieser Gattung innerhalb der Grenzen $\mp c$ liegt, mit w bezeichnen, w gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Fehler von $-c$ bis $+c$, und da die Beobachtungsfehler durch unendlich kleine Stufen wachsen oder abnehmen,

$$w = \int_{-c}^{+c} \varphi\Delta \, . \, d\Delta$$

Da ferner jeder Beobachtungsfehler gewiss innerhalb der Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegt, so ergiebt sich

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\Delta \, . \, d\Delta$$

Wenn wir ferner die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Anzahl von m gleich guter Beobachtungen beziehungsweise die Fehler Δ', Δ'', etc. $\Delta^{(m)}$ vorkommen mit W bezeichnen, so erhalten wir

$$W = \varphi\Delta' \, . \, \varphi\Delta'' \, . \, . \, . \, . \, . \, \varphi\Delta^{(m)}$$

Diese Sätze ergeben sich aus den Elementen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wenn man die dort angenommenen endlichen Unterschiede in den überhaupt möglichen Fällen als unendlich klein betrachtet, oder die endliche Anzahl der möglichen Fälle in eine unendlich grosse Anzahl verwandelt. Endlich folgt aus denselben Betrachtungen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Δ' zwischen den Grenzen $\mp a'$, Δ'' zwischen den Grenzen $\mp a''$, etc. liegt, durch das $m$fache Integral

$$\int_{-a'}^{+a'} \int_{-a''}^{+a''} \cdots \int_{-a^{(m)}}^{+a^{(m)}} W d\Delta' \, . \, d\Delta'' \, . \, . \, . \, d\Delta^{(m)}$$

ausgedrückt wird. Dieser Ausdruck gilt zwar nur wenn die Beobachtungen von einander unabhängig sind, aber diese Bedingung hindert nicht ihn auf den Fall auszudehnen, in welchem zwischen den Fehlergrenzen a', a'', etc. eine Relation besteht, wenn diese nur so beschaffen ist, dass sie unbeschadet der Unabhängigkeit der Beobachtungen von einander stattfinden kann. Wenn nun eine solche Relation angenommen wird, so muss man bei den verschiedenen Integrationen darauf Rücksicht nehmen. Sei

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = f(\Delta', \Delta'' \, . \, . \, .)$$

diese Relation, worin y eine gegebene Grösse und f ein Functionszeichen ist, und die erste Aufgabe sei, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass y zwischen den Grenzen $\mp b$ liege. Man muss um diese Aufgabe zu lösen, zuerst vermittelst dieser Relation eine der Veränderlichen Δ', Δ'', etc. nebst dem Differential derselben aus dem obigen m fachen Integral eliminiren. Sei zu diesem Zweck

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta^{(m)} = F(y, \Delta', \Delta'', \, . \, . \, . \, . \, . \, \Delta^{(m-1)})$$

wo wieder F ein Functionszeichen ist, der Ausdruck für $\Delta^{(m)}$, welcher sich aus dem obigen Ausdruck für y ergiebt, so bekommt man, wenn man nicht blos $\Delta^{(m)}$ und $d\Delta^{(m)}$ eliminirt, sondern auch den obigen Ausdruck für W substituirt,

$$(4) \quad W d\Delta' \, . \, d\Delta'' \ldots d\Delta^{(m)} = K . \varphi\Delta' \, . \, \varphi\Delta'' \ldots \varphi\Delta^{(m-1)} \, . \, d\Delta' \, . \, d\Delta'' \ldots d\Delta^{(m-1)} . dy$$

wenn man zur Abkürzung

$$K = \varphi\,(F\,(y,\,\Delta',\,\Delta'',\,..\,\Delta^{(m-1)}))\,\frac{d\,.\,F\,(y,\,\Delta',\,\Delta'',\,...\,\Delta^{(m-1)})}{dy}$$

setzt, und die *m* fache Integration der rechten Seite dieser Gleichung muss jetzt so ausgeführt werden, dass man $\Delta',\,\Delta'',\,...\,\Delta^{(m-1)}$ innerhalb der Grenzen ausdehnt, für welche, wenn man y zwischen den Grenzen $\mp\,b$ nimmt, die Function F für $\Delta^{(m)}$ alle möglichen Werthe giebt. Die Integration endlich in Bezug auf y muss innerhalb der Grenzen $\mp\,b$ ausgedehnt werden.

10.

Wenn wir nun das Vorstehende anwenden wollen um die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die Summe der Fehler von m Beobachtungen innerhalb der Grenzen $\mp\,b$ liege, so wird die Relation (2) in

$$y = \Delta' + \Delta'' + \,...\, + \Delta^{(m)}$$

übergehen. Ich ziehe aber vor einen Schritt weiter zu gehen, und statt dieser Relation die folgende allgemeinere einzuführen,

$$y = \varepsilon'\Delta' + \varepsilon''\Delta'' + \,...\, + \varepsilon^{(m)}\Delta^{(m)}$$

worin $\varepsilon',\,\varepsilon'',\,...\,\varepsilon^{(m)}$ gegebene, numerische Coefficienten bedeuten sollen, denn hiedurch können wir die Auflösung unserer Aufgabe, wie sich weiter unten ergeben wird, sogleich auf den Fall ausdehnen, in welchem die Beobachtungen verschiedene Gewichte haben, während der einfachere Fall, in welchem die Gewichte aller in Betracht gezogenen einander gleich sind, daraus erhalten wird, wenn man

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \text{etc.} = \varepsilon^{(m)} = 1$$

setzt. Die oben angenommene Relation giebt

$$\Delta^{(m)} = \frac{y - \varepsilon'\Delta' - \varepsilon''\Delta'' - \,...\, - \varepsilon^{(m-1)}\Delta^{(m-1)}}{\varepsilon^{(m)}}$$

welche der allgemeinen Relation (3) entspricht. Hieraus ergiebt sich also

$$\frac{dF}{dy} = \frac{1}{\varepsilon^{(m)}}$$

Da ferner möglicher Weise jeder Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegen kann, und die Annahme dieser Grenzen für $\Delta',\,\Delta'',\,...\,\Delta^{(m-1)}$ nebst den Grenzen $\mp\,b$ für y in Folge der vorstehenden Gleichung dem Fehler $\Delta^{(m)}$ alle möglichen Werthe zutheilt, so müssen die Integrationen innerhalb dieser Grenzen ausgeführt werden.

Wenn wir daher die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der bez. mit $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots \varepsilon^{(m)}$ multiplicirten Beobachtungsfehler innerhalb der Grenzen $\pm b$ liege, mit W' bezeichnen, so wird zufolge der (4)

$$(5) \;..\; W' = \frac{1}{\varepsilon^{(m)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} M.\varphi\Delta'.\varphi\Delta''\ldots.\varphi\Delta^{(m-1)}$$

wenn zur Abkürzung

$$M = \varphi\left(\frac{y-\varepsilon'.\Gamma'-\varepsilon''.\Gamma''-\ldots-\varepsilon^{(m-1)}.\Gamma^{(m-1)}}{\varepsilon^{(m)}}\right) d\Delta'.d\Delta''\ldots d\Delta^{(m-1)}.dy$$

gesetzt wird.

11.

Um diesen Ausdruck integriren zu können, müssen wir die Function φ kennen, und die Kenntniss davon erlangt man durch den an die Spitze dieser Abhandlung gestellten Grundsatz. Nehmen wir die Gleichung

$$W = \varphi.\Delta.\varphi.\Delta'\ldots\varphi.\Delta^{(m)}$$

wieder vor, in welcher W die Wahrscheinlichkeit ist, dass in einer Reihe von m gleich guten Beobachtungen die Fehler $\Delta, \Delta', \ldots \Delta^{(m)}$ vorkommen. Indem wir uns wieder des oben angezogenen Grundsatzes bedienen, nehmen wir zugleich an, dass das Zusammentreffen der durch diese Annahme sich ergebenden Fehler der Beobachtungen die grösste Wahrscheinlichkeit habe, [illegible] in der anderen enthalten. Wenn also das Zusammentreffen der unter der genannten Bedingung sich ergebenden Fehler das wahrscheinlichste ist, so muss nothwendiger Weise W ein Maximum werden. Diese Bedingung giebt die Gleichung

[illegible]

wenn [illegible] das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen bedeutet. Wenn [illegible] die beobachteten Werthe der Unbekannten mit [illegible] bezeichnet werden, so wird

[illegible]

und daher

[illegible]

die obige Gleichung geht hiemit in

$$0 = \frac{d\varphi\Delta'}{\varphi\Delta'.d\Delta'} + \frac{d\varphi\Delta''}{\varphi\Delta''.d\Delta''} + \ldots + \frac{d\varphi\Delta^{(m)}}{\varphi\Delta^{(m)}.d\Delta^{(m)}} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

über. Aber im Art. 2 wurde gefunden, dass in Folge der Annahme des arithmetischen Mittels als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten, die Summe der übrig bleibenden Fehler Null ist, und hieraus erhalten wir jetzt

$$0 = \Delta' + \Delta'' + \ldots + \Delta^{(m)}$$

und da diese mit der Gleichung (6) zugleich stattfinden muss, so ergiebt sich allgemein, dass

$$\frac{d\varphi\Delta}{\varphi\Delta.d\Delta} = 2k\Delta$$

sein muss, wo k eine Constante ist, denn auf andere Art lässt sich den beiden Gleichungen zugleich nicht Gnüge leisten. Das Integral der vorstehenden Gleichung ist

$$\varphi\Delta = le^{k\Delta^2}$$

wo l die Integrationsconstante und e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist. Hiemit erhalten wir

$$W = l^m e^{k(\Delta'^2 + \Delta''^2 + \ldots + \Delta^{(m)2})}$$

und wenn die Summe der Quadrate der Fehler eines Maximums fähig wäre, so müsste k positiv angenommen werden. Da aber diese Summe nur eines Minimums fähig ist, so muss nothwendig k negativ sein, damit W ein Maximum werde. Setzt man um dieses auszudrücken $k = -h^2$, so wird

$$\varphi\Delta = le^{-h^2\Delta^2}$$

Es muss ferner, wie oben gezeigt wurde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\Delta . d\Delta = 1$$

werden, und da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\Delta^2} d\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

ist, wenn π das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet, so ergiebt sich $l = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, und es wird schliesslich

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und

$$W = \frac{h^m}{\pi^{\frac{m}{2}}} e^{-h^2(\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots+\Delta^{(m)2})}$$

wo $\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots+\Delta^{(m)2}$ ein Minimum ist. Es folgt hieraus wieder der Satz, dass wenn man eine Unbekannte durch das arithmetische Mittel aus den dafür erhaltenen Beobachtungen bestimmt, man zugleich dadurch bewirkt, dass die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum wird; welcher Satz im Art. 3 auf andere Art schon bewiesen wurde.

12.

Es sollen nun, um in den folgenden Ausdrücken eine leichtere Uebersicht zu gewinnen, die folgenden Abkürzungen in den Bezeichnungen eingeführt werden,

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon^{(m)}} = \theta', \quad \frac{\varepsilon''}{\varepsilon^{(m)}} = \theta'', \ldots \frac{\varepsilon^{(m-1)}}{\varepsilon^{(m)}} = \theta^{(m-1)}$$

$$\frac{h^m}{\varepsilon^{(m)}\pi^{\frac{m}{2}}} = l$$

$$\theta'\Delta'+\theta''\Delta''+\ldots+\theta^{(m-1)}\Delta^{(m-1)}-\frac{y}{\varepsilon^{(m)}} = \Delta$$

Substituirt man nun den unter (7) erhaltenen Ausdruck für $\varphi\Delta$ in den Ausdruck (5), so ergiebt sich

$$W' = l\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E'd\Delta'.d\Delta''\ldots d\Delta^{(m-1)}.dy$$

wo zur Abkürzung

$$E' = e^{-h^2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots+\Delta^{(m-1)2})}$$

gesetzt worden ist. Betrachtet man aber das Integral

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\{(\beta x+\gamma)^2+x^2+\delta\}}dx$$

und setzt darin

$$x = \frac{z}{\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{\beta\gamma}{1+\beta^2}$$

so wird es

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\left(z^2+\frac{\gamma^2}{1+\beta^2}+\delta\right)}dz$$

folglich, da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

ist

$$P = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\pi}{1+\beta^2}}\; e^{-h^2\left(\frac{\gamma^2}{1+\beta^2}+\delta\right)}$$

Wendet man diesen Ausdruck auf den obigen Ausdruck für W' an, so ergiebt sich nach der ersten Integration

$$W' = \frac{l}{h}\sqrt{\frac{\pi}{1+\theta'^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E''\, d\Delta''.\, d\Delta''' \dots .\, d\Delta^{(m-1)}.\, dy$$

wo

$$E'' = e^{-h^2\left\{\frac{(\Delta-\theta'\Delta')^2}{1+\theta'^2}+\Delta''^2+\Delta'''^2+\dots+\Delta^{(m-1)2}\right\}}$$

ist. Nach der zweiten Integration erhält man

$$W' = \frac{l}{h^2}\sqrt{\frac{\pi^2}{1+\theta'^2+\theta''^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E'''\, d\Delta''' \dots d\Delta^{(m-1)}.\, dy$$

wo

$$E''' = e^{-h^2\left\{\frac{(\Delta-\theta'\Delta'-\theta''\Delta'')^2}{1+\theta'^2+\theta''^2}+\Delta'''^2+\dots+\Delta^{(m-1)2}\right\}}$$

ist, nach der dritten Integration wird

$$W' = \frac{l}{h^3}\sqrt{\frac{\pi^3}{1+\theta'^2+\theta''^2+\theta'''^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E^{IV}\, d\Delta^{IV} \dots d\Delta^{(m-1)}.\, dy$$

wo

$$E^{IV} = e^{-h^2\left\{\frac{(\Delta-\theta'\Delta'-\theta''\Delta''-\theta'''\Delta''')^2}{1+\theta'^2+\theta''^2+\theta'''^2}+\Delta^{IV2}+\dots+\Delta^{(m-1)2}\right\}}$$

ist, und das Gesetz des Fortganges stellt sich jetzt deutlich hervor. Nach der $(m-2)$ten Integration wird folglich

$$W' = \frac{l}{h^{m-2}}\,\frac{\pi^{\frac{m-2}{2}}}{\sqrt{1+\theta'^2+\theta''^2+\dots+\theta^{(m-2)2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-b}^{+b} E^{(m-1)}\, d\Delta^{(m-1)}.\, dy$$

wo

$$E^{(m-1)} = e^{-h^2\left\{\frac{\left(\theta^{(m-1)}\Delta^{(m-1)}-\frac{y}{\varepsilon^{(m)}}\right)^2}{1+\theta'^2+\theta''^2+\dots+\theta^{(m-2)2}}+\Delta^{(m-1)2}\right\}}$$

ist. Führt man nun auch die $(m-1)$te Integration auf dieselbe Weise aus und substituirt die Ausdrücke der eingeführten Hülfsgrössen, so bekommt man

$$W' = \frac{h}{\sqrt{\pi}\,.\,\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\int_{-b}^{+b} e^{-\frac{h^2y^2}{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\,dy$$

womit alle Integrationen ausgeführt sind, die man ohne Hülfe von unendlichen Reihen erhalten kann.

13.

Nehmen wir nun an, dass die eben gefundene Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeit gleich sein soll, dass der Fehler irgend einer der in Betracht gezogenen Beobachtungen innerhalb der Grenzen $\mp a$ enthalten sei, so wird zufolge des Vorhergehenden auch

$$W' = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-a}^{+a} e^{-h^2y^2}\,dy$$

und es muss die Relation zwischen a und b aus der folgenden Gleichung bestimmt werden

$$\int_{-a}^{+a} e^{-h^2y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\int_{-b}^{+b} e^{-\frac{h^2y^2}{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\,dy$$

Sei

$$y^2 = u^2\,(\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots\ldots+\varepsilon^{(m)2})$$

dann wird

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\int_{-b}^{+b} e^{-\frac{h^2y^2}{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}\,dy = \int_{-c}^{+c} e^{-h^2u^2}\,du$$

wenn

$$c = \frac{b}{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+\varepsilon^{(m)2}}}$$

gesetzt wird. Die obige Bedingungsgleichung geht hiemit in die folgende

$$\int_{-a}^{+a} e^{-h^2y^2}\,dy = \int_{-c}^{+c} c^{-h^2u^2}\,du$$

über und hieraus folgt

$$b = a\,\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots+e^{(m)2}}$$

welches die gesuchte Relation ist.

Diese Relation giebt in Verbindung mit der im Art. 8 gegebenen Definition der relativen Genauigkeit sogleich den folgenden

1sten Satz.

»Die Genauigkeit der Summe von m gleich guten, beziehungsweise mit den gegebenen Factoren ε', ε'', . $\varepsilon^{(m)}$ multiplicirten Beobachtungen verhält sich zur Genauigkeit Einer dieser Beobachtungen wie

$$1 : \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \ldots + \varepsilon^{(m)2}}.«$$

Nehmen wir an, dass $\varepsilon' = \varepsilon'' = \text{etc.} = \varepsilon^{(m)} = \frac{1}{m}$ sei, dann geht die eben bezeichnete Function der Beobachtungen in das arithmetische Mittel aus denselben über, und wir erhalten daher sogleich den folgenden

2ten Satz.

»Die Genauigkeit des arithmetischen Mittels aus m gleich guten Beobachtungen verhält sich zur Genauigkeit irgend Einer derselben wie

$$\sqrt{m} : 1.«$$

Die Verbindung dieses Satzes mit der im Art. 5 aufgestellten Definition des Gewichts einer Bestimmung aus Beobachtungen zeigt, dass das Gewicht einer Beobachtung oder eines Resultats aus Beobachtungen dem Quadrat der Genauigkeit derselben proportional ist.

Man kann den ersten obigen Satz leicht auf Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit ausdehnen. Wenn man annimmt, dass die Fehler e', e'', . . . $e^{(m)}$ solchen Beobachtungen angehören, deren Genauigkeiten bez. den Zahlen $\sqrt{p'}$, $\sqrt{p''}$, . . . $\sqrt{p^{(m)}}$ proportional sind, so gehören die Fehler $e'\sqrt{p'}$, $e''\sqrt{p''}$ . . . $e^{(m)}\sqrt{p^{(m)}}$ gewiss Beobachtungen von gleicher Genauigkeit an, denn durch die Multiplication der Fehler mit den Zahlen $\sqrt{p'}$, $\sqrt{p''}$, etc. werden diese gewiss $\sqrt{p'}$ mal $\sqrt{p''}$ mal, etc. vergrössert, also die Genauigkeiten gewiss eben so viel verkleinert, und auf gleiches Maass gebracht. Bezeichnen wir daher die Fehler $e'\sqrt{p'}$, $e''\sqrt{p''}$, etc. mit Δ', Δ'', etc., so kann der Ausdruck

$$\varepsilon'e' + \varepsilon''e'' + \ldots + \varepsilon^{(m)}e^{(m)}$$

sogleich in den folgenden verwandelt werden

$$\frac{\varepsilon'}{\sqrt{p'}}\Delta' + \frac{\varepsilon''}{\sqrt{p''}}\Delta'' + \ldots + \frac{\varepsilon^{(m)}}{\sqrt{p^{(m)}}}\Delta^{(m)}$$

und hiemit ergiebt sich der

3te Satz.

»Die Genauigkeit der Summe von m, bez. mit den gegebenen Factoren $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots \varepsilon^{(m)}$ multiplicirten Beobachtungen, deren relative Genauigkeiten den Zahlen $\sqrt{p'}, \sqrt{p''}, \ldots \sqrt{p^{(m)}}$ proportional sind, oder mit anderen Worten, denen die Gewichte $p', p'', \ldots p^{(m)}$ beigelegt werden müssen, verhält sich zur Genauigkeit Einer Beobachtung der Gattung, deren Genauigkeit oder Gewicht als Einheit angenommen worden ist, wie

$$1 : \sqrt{\frac{\varepsilon'^2}{p'} + \frac{\varepsilon''^2}{p''} + \ldots + \frac{\varepsilon^{(m)2}}{p^{(m)}}}.«$$

Das Gewicht eines aus solchen Beobachtungen gezogenen Resultats hat also, wenn man es mit P bezeichnet,

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad P = \frac{1}{\frac{\varepsilon'^2}{p'} + \frac{\varepsilon''^2}{p''} + \ldots + \frac{\varepsilon^{(m)2}}{p^{(m)}}}$$

zum Ausdruck, und bedeutet, dass dieses Resultat für eben so genau gehalten werden muss, als wäre es das arithmetische Mittel aus P solcher Beobachtungen, deren Gewicht oder Genauigkeit $= 1$ ist.

14.

Wenden wir zu näherer Erläuterung des Ausdrucks (8) denselben auf die einfachsten Functionen von zwei Grössen an. Seien durch die Beobachtungen die Grösse a mit dem Gewicht p, und die Grösse a' mit dem Gewicht p' erhalten, man fragt zuerst nach dem Gewicht der Function

$$\tfrac{1}{2}(a \pm a')$$

Hiefür giebt der Ausdruck (8), da hier $\varepsilon' = \frac{1}{2}$, $\varepsilon'' = \pm\frac{1}{2}$ ist

$$P = \frac{4pp'}{p+p'}$$

oder wenn $p' = p$ ist,

$$P = 2p$$

mit dem 2. Satze übereinstimmend, wenn wir blos das obere Zeichen annehmen. Fragt man ausserdem nach dem Gewicht der Function

$$a \pm a'$$

wenn die Gewichte dieselben sind wie vorher, so giebt der Ausdruck (8), da nun $\varepsilon' = 1$, $\varepsilon'' = \pm 1$ ist,

$$P = \frac{pp'}{p+p'}$$

oder wenn man $p' = p$ macht

$$P = \tfrac{1}{2}p$$

Wenn man hier unter a und a' die bei einer Triangulation von einer und derselben Station aus eingeschnittenen Richtungen zweier Dreieckspunkte versteht, so ist $a - a'$ der durch die Beobachtungen erhaltene Winkel zwischen diesen beiden Punkten, und setzt man das Gewicht der Bestimmung einer jeden der beiden Richtungen $= 1$, so ist das Gewicht des Winkels nur $= \frac{1}{2}$, oder die Genauigkeit des Letzteren nur $= \sqrt{\frac{1}{2}}$.

15.

Nehmen wir jetzt wieder die Gleichung (1) vor, nemlich

$$x = \frac{mN + m'N' + m''N'' + \ldots}{m + m' + m'' + \ldots}$$

welche den wahrscheinlichsten Werth von x giebt, wenn die beobachteten Werthe N, N', N'', etc. bez. die Gewichte m, m', m'', etc. haben.

Wenn nun die Beobachtungen nicht unmittelbar $x = N, x = N'$, etc., sondern statt dessen $ax = n$, $a'x = n'$, etc. gegeben haben, wo a, a', etc. bestimmte, durch die Theorie der Aufgabe, welche auf die Bestimmung von x hinführt, gegebene numerische Coefficienten sind, dann ist in den aus diesen Gleichungen folgenden Werthen $x = \frac{n}{a}$, $x' = \frac{n'}{a'}$, etc. $\frac{n}{a}$ gewiss $a$mal genauer wie n, $\frac{n'}{a'}$ gewiss a'mal genauer wie n', u. s. w., weil die Fehler, womit n, n', etc. behaftet sind, durch die angeführten Divisionen gewiss a, a', etc. mal verkleinert worden. Wenn nun die Genauigkeit aller Beobachtungen, welche n, n', etc. gegeben haben, für dieselbe gehalten werden muss, so werden in Folge der Gleichung (8) die Gewichte der daraus hervorgehenden einzelnen Bestimmungen

$$x = \frac{n}{a},\; x = \frac{n'}{a'},\; x = \frac{n''}{a''}, \text{ etc.}$$

bez. a^2, a'^2, a''^2, etc. sein, wenn $p' = p'' = \text{etc.} = 1$ gesetzt wird. Es wird daher jetzt

$$m = a^2,\; m' = a'^2,\; m'' = a''^2, \text{ etc.}$$
$$N = \frac{n}{a},\; N' = \frac{n'}{a'},\; N'' = \frac{n''}{a''}, \text{ etc.}$$

und der durch die oben angeführte Gleichung ausgedrückte wahrscheinlichste Werth von x bekommt

$$x = \frac{an+a'n'+a''n''+\ldots}{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}$$

zum Ausdruck, und das Gewicht dieser Bestimmung ist $= a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots.$

16.

Wenn hingegen die Beobachtungen, welche n für ax, n' für $a'x$, n'' für $a''x$, u. s. w. gegeben haben, für ungleich genau gehalten werden müssen, und zwar die erste für so genau wie das arithmetische Mittel aus p, die zweite für so genau wie das aus p', die dritte für so genau wie das aus p'', u. s. w. Beobachtungen von gleicher als Einheit angenommener Genauigkeit, so werden die Gewichte der einzelnen Bestimmungen von ax, $a'x$, $a''x$, etc. zufolge der Gleichung (8) a^2p, a'^2p', a''^2p'', etc. zum Ausdruck haben, und es wird also jetzt

$$m = a^2p,\ m' = a'^2p',\ m'' = a''^2p'', \text{ etc.}$$

während wie vorher die Gleichungen

$$N = \frac{n}{a},\ N' = \frac{n'}{a'},\ N'' = \frac{n''}{a''}, \text{ etc.}$$

bleiben. Der allgemeine Ausdruck zu Anfang des vor. Art. giebt folglich jetzt für den wahrscheinlichsten Werth von x den Ausdruck

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad x = \frac{pan+p'a'n'+p''a''n''+\ldots}{pa^2+p'a'^2+p''a''^2+\ldots}$$

mit dem Gewicht $= pa^2+p'a'^2+p''a''^2+\ldots$

Man sieht, dass der am Ende des vor. Art. gefundene Ausdruck für x sich als einen speciellen Fall des vorstehenden ausweist, wie es auch sein muss, und dass der vorstehende in jenen übergeht, wenn man alle Gewichte p, p', p'', etc. einander gleich macht.

Der eben gefundene Ausdruck für x kann auf zweierlei Weise einfach durch Worte ausgedrückt werden.

1) Wenn man für die Bestimmung der Unbekannten x durch Beobachtungen, die von einander unabhängig sind, die Werthe n, n', n'', etc. erlangt hat, denen bez. die Gewichte p, p', p'', etc. beigelegt werden müssen, und die mit der Unbekannten durch die Gleichungen

$$ax = n,\ a'x = n',\ a''x = n'', \text{ etc.}$$

verbunden sind, dann erhält man den wahrscheinlichsten Werth von x, wenn man jede dieser Gleichungen mit dem Produkt des Gewichts derselben in den Coefficienten von x multiplicirt, die so abgeänderten Gleichungen addirt, und aus dieser Summe x auf gewöhnliche Art ableitet, nemlich das bekannte Glied mit dem Coefficienten von x dividirt. Das Gewicht dieser Bestimmung ist dem eben genannten Divisor gleich.

2) Man bringe die gegebenen Gleichungen auf Gleichungen, die gleiche Genauigkeit haben, welches dem Vorhergehenden zufolge dadurch bewirkt wird, dass man sie bez. mit $\sqrt{p}$, $\sqrt{p'}$, $\sqrt{p''}$, etc. multiplicirt, wodurch

$$\sqrt{p}.ax = \sqrt{p}.n\,, \quad \sqrt{p'}.a'x = \sqrt{p'}.n'\,, \quad \sqrt{p''}.a''x = \sqrt{p''}.n''\,, \text{ etc.}$$

erhalten wird. Hierauf multiplicire man jede dieser Gleichungen mit dem jetzt stattfindenden Coefficienten von x, bilde die Summe derselben, und dividire wieder das bekannte Glied mit dem nunmehrigen Coefficienten von x. Es ist klar, dass der obige Ausdruck für x auch aus diesem Verfahren hervorgeht.

17.

Wenn die Bedingung, die das Vorhergehende involvirt, nemlich dass die Unbekannte unmittelbar durch eine linearische Gleichung gegeben sei, nicht erfüllt ist, so erleiden die erhaltenen Ausdrücke durchaus keine Aenderung. Um dieses zu zeigen, sei überhaupt

$$fX = N$$

wo f ein Functionszeichen und X die Unbekannte ist, die Gleichung, welche die Lösung einer vorgegebenen Aufgabe bildet, und so beschaffen ist, dass der vollständige Werth von N nur durch Beobachtungen erlangt werden kann. Sei ξ ein genäherter Werth von X, und der wahrscheinlichste Werth dieser Unbekannten

$$X = \xi + x$$

wo ξ so nahe richtig angenommen wird, dass man mit der Berücksichtigung der ersten Potenz von x ausreicht. Setzt man hierauf

$$f\xi = \nu\,, \quad \frac{df\xi}{d\xi} = a\,, \quad N - \nu = n$$

so bekommt man

$$ax = n$$

Wendet man die Gleichung $fX = N'$ auf einen anderen Fall an, der aber so beschaffen sein muss, dass die Unbekannte X keine Aenderung erlei-

det, und nur in der Function f ausser N sich eine oder mehrere Constanten geändert haben, dann ergiebt sich eben so

$$a'x = n'$$

u. s. w. Durch dieses Verfahren kann man jedem Falle die der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu unterwerfenden Bestimmungen auf linearische Gleichungen von der Form hinführen, die im Vorhergehenden angenommen worden sind.

§. 2. Ausdehnung des Vorhergehenden auf den Fall, in welchem die Werthe mehrerer unabhängiger Unbekannten durch Beobachtungen zu bestimmen sind.

18.

Bis jetzt ist angenommen worden, dass die durch Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu lösende Aufgabe auf nur Eine Unbekannte hingeführt hat, während von nun an die Fälle betrachtet werden sollen, wo mehrere Unbekannten vorhanden sind. An den Inhalt des vor. Art. anknüpfend bemerke ich zuerst, dass auch in diesen Fällen die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten auf die Ermittelung derselben aus einem System von linearischen Gleichungen hingeführt werden kann. Seien die Gleichungen, die die Auflösung der Aufgabe bilden,

$$f(X, X', X'', \text{etc.}) = L$$
$$F(X, X', X'', \text{etc.}) = L'$$
$$\varphi(X, X', X'', \text{etc.}) = L''$$

u. s. w. wo f, F, φ etc. Functionszeichen, X, X', X'', etc. die Unbekannten, und L, L', L'', etc. durch Beobachtungen zu ermittelnde Grössen sind. Nachdem man sich die genäherten Werthe ξ, ξ', ξ'', etc. der Unbekannten verschafft hat; welches immer möglich ist, seien die wahrscheinlichsten Werthe derselben

$$X = \xi + x\,, \quad X' = \xi' + x'\,, \quad X'' = \xi'' + x''\,, \text{ etc.}$$

wo x, x', x'', etc. so klein angenommen werden, dass man mit den ersten Potenzen derselben ausreicht. Setzt man hierauf

$$f(\xi, \xi', \xi'', \text{etc.}) = \lambda$$
$$F(\xi, \xi', \xi'', \text{etc.}) = \lambda'$$
$$\varphi(\xi, \xi', \xi'', \text{etc.}) = \lambda''$$
$$\text{etc.}$$

$$\left(\frac{df}{d\xi}\right) = a\,,\quad \left(\frac{df}{d\xi'}\right) = b\,,\quad \left(\frac{df}{d\xi''}\right) = c\,,\ \text{etc.}$$
$$\left(\frac{dF}{d\xi}\right) = a'\,,\quad \left(\frac{dF}{d\xi'}\right) = b'\,,\quad \left(\frac{dF}{d\xi''}\right) = c'\,,\ \text{etc.}$$
$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right) = a''\,,\quad \left(\frac{d\varphi}{d\xi'}\right) = b''\,,\quad \left(\frac{d\varphi}{d\xi''}\right) = c''\,,\ \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

so werden

$$\begin{aligned} ax + bx' + cx'' + \text{etc.} + \lambda &= L \\ a'x + b'x' + c'x'' + \text{etc.} + \lambda' &= L' \\ a''x + b''x' + c''x'' + \text{etc.} + \lambda'' &= L'' \\ \text{etc} \qquad\qquad & \text{etc.} \end{aligned}$$

welche Gleichungen die verlangte Form haben, und zu welchen bemerkt werden kann, dass alle durch die Rechnung erhaltenen Grössen sich auf der einen, und die durch die Beobachtungen erhaltenen Grössen sich auf der anderen Seite der Gleichheitszeichen befinden, gleich wie dieses in den ähnlichen Gleichungen des vor. §. auch stattfand. Setzt man ferner

$$L - \lambda = l\,,\quad L' - \lambda' = l'\,,\quad L'' - \lambda'' = l''\,,\ \text{etc.}$$

so werden die vorstehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} ax + bx' + cx'' + \text{etc.} &= l \\ a'x + b'x' + c'x'' + \text{etc.} &= l' \\ a''x + b''x' + c''x'' + \text{etc.} &= l'' \\ \text{etc.} \qquad\qquad & \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ . \quad (10)$$

in welchen, wenn die Beobachtungen nur nicht gar zu ungenau sind, oder die genäherten Werthe ξ, ξ', ξ'', etc. der Unbekannten sich nicht allzuweit von den wahren oder wahrscheinlichsten Werthen entfernen, die völlig bekannten Glieder kleine Zahlenwerthe haben.

Sollte es sich nach der Durchführung der Auflösung dieser Gleichungen zeigen, dass die zu deren Erlangung angewandten genäherten Werthe ξ, ξ', ξ'', etc. nicht so genau gewesen sind, dass man mit den ersten Potenzen von x, x', x'', etc. ausreichte, so giebt die Auflösung wenigstens mehr genäherte Werthe der Unbekannten, durch deren Substitution und Wiederholung der Auflösung man genauere Werthe erhält, u. s. w. wenn nöthig.

Fassen wir vor allem Anderen die Zahl der Gleichungen (10) und die Zahl der darin vorkommenden Unbekannten in's Auge, so sind drei Fälle möglich, es kann

1) die Zahl dieser Gleichungen kleiner sein wie die der Unbekannten,

2) die Zahl der Gleichungen denen der Unbekannten gleich sein,
3) die Zahl der Gleichungen grösser sein, wie die der Unbekannten.

Im ersten Falle ist es hier, wie immer, unmöglich bestimmte Werthe der Unbekannten zu erhalten, im zweiten lässt sich nichts weiter thun, wie die Gleichungen auf gewöhnliche Weise aufzulösen, und nur im dritten Falle fällt die Auflösung derselben in den Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der dritte Fall soll daher im Folgenden stets als stattfindend angenommen werden, wobei der zweite Fall jedoch nicht unbedingt ausgeschlossen ist, da sich zeigen wird, dass die für den dritten Fall sich ergebende Auflösung auch auf den zweiten anwendbar ist, alsdann aber dieselben Werthe der Unbekannten giebt, die man durch die gewöhnliche Auflösung erhält.

19.

Die Gleichungen (10) lassen sich sofort auf die allgemeinsten der im Vorhergehenden betrachteten Gleichungen, nemlich auf

$$ax = n\,,\quad a'x = n'\,,\quad a''x = n''\text{, etc.}$$

hinführen, es braucht dafür nur

$$\begin{aligned} n &= l - bx' - cx'' - \dots \\ n' &= l' - b'x' - c'x'' - \dots \\ n'' &= l'' - b''x' - c''x'' - \dots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

gesetzt zu werden. Die Grössen n, n', n'', etc. haben zwar gegenwärtig keine bestimmten Werthe wie im Vorhergehenden der Fall war, sondern hängen mit von den noch unbestimmten Grössen x', x'', etc. ab. Aber die einzige Eigenschaft worauf es hier ankommt besitzen sie, sie sind Grössen, die durch Beobachtungen bestimmt werden, und die Functionen

$$\begin{aligned} &l - bx' - cx'' - \dots \\ &l' - b'x' - c'x'' - \dots \\ &l'' - b''x' - c''x'' - \dots \end{aligned}$$

u. s. w. sind jetzt eben sowohl die durch Beobachtungen erlangten Werthe von ax, $a'x$, $a''x$, etc. wie n, n', n'', etc. im Vorhergehenden. Der Ausdruck (9) ist daher immer noch der wahrscheinlichste Werth von x, wenn den Gleichungen (10), oder vielmehr den in denselben enthaltenen Grössen l, l', l'', etc. der Reihe nach die Gewichte p, p', p'', etc.

beigelegt werden. Substituirt man daher die vorstehenden Werthe von n, n', n'', etc. in die Gleichungen (9) und setzt zur Abkürzung

$$\begin{aligned}(aa) &= pa^2 + p'a'^2 + p''a''^2 + \ldots\\ (ab) &= pab + p'a'b' + p''a''b'' + \ldots\\ (ac) &= pac + p'a'c' + p''a''c'' + \ldots\\ &\vdots\\ (al) &= pal + p'a'l' + p''a''l'' + \ldots\end{aligned}$$

so wird der wahrscheinlichste Werth von x

$$x = \frac{(al) - (ab)x' - (ac)x'' - \ldots}{(aa)}$$

Wenn nun durch anderweitige Bestimmungen die wahrscheinlichsten Werthe von x', x'', etc. erlangt werden können, so giebt die Substitution dieser einen bestimmten wahrscheinlichen Werth von x. Solche anderweitigen Bestimmungen sind zu erhalten, denn dasselbe Verfahren, welches wir eben zur Bestimmung von x angewandt haben, kann auch zur Bestimmung der übrigen Unbekannten angewandt werden. Setzt man jetzt

$$\begin{aligned}n &= l - ax - cx'' - \ldots\\ n' &= l' - a'x - c'x'' - \ldots\\ n'' &= l'' - a''x - c''x'' - \ldots\end{aligned}$$

u. s. w. und substituirt diese in die (9), nachdem sie in die folgende abgeändert worden ist,

$$x' = \frac{pbn + p'b'n' + p''b''n'' + \ldots}{pb^2 + p'b'^2 + p''b''c''^2 \ldots}$$

so wird der wahrscheinlichste Werth von x'

$$x' = \frac{(bl) - (ab)x - (bc)x'' - \ldots}{(bb)}$$

wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned}(bb) &= pb^2 + p'b'^2 + p''b''^2 + \ldots\\ (bc) &= pbc + p'b'c' + p''b''c'' + \ldots\\ &\vdots\\ (bl) &= pbl + p'b'l' + p''b''l'' + \ldots\end{aligned}$$

gesetzt wird. Eben so erhält man für x'' den wahrscheinlichsten Werth

$$x'' = \frac{(cl) - (ac)x - (bc)x' - \ldots}{(cc)}$$

wo

$$\begin{aligned}(cc) &= pc^2 + p'c'^2 + p''c''^2 + \ldots\\ &\vdots\\ (cl) &= pcl + p'c'l' + p''c''l'' + \ldots\end{aligned}$$

ist, und so ferner, wenn die Zahl der Unbekannten grösser ist. Da die für x, x', x'', etc. eben entwickelten Gleichungen neben einander bestehen müssen, so erhält man die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten in bestimmten Ausdrücken durch wechselseitige Elimination derselben, aus den obigen Gleichungen, die auch wie folgt gestellt werden können

$$(11) \quad \ldots \quad \begin{cases} (aa)x + (ab)x' + (ac)x'' + \ldots = (al) \\ (ab)x + (bb)x' + (bc)x'' + \ldots = (bl) \\ (ac)x + (bc)x' + (cc)x'' + \ldots = (cl) \\ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

20.

Die im vor. Art. erhaltene Auflösung unserer Aufgabe kann erst dann als vollständig betrachtet werden, wenn nachgewiesen wird, dass das System von Gleichungen (11), auf welches wir gekommen sind, so beschaffen ist, dass in jedem Falle die Unbekannten daraus bestimmt werden können. Die erste Bedingung hiefür ist, dass die Zahl der Gleichungen der der Unbekannten gleich ist, und dass diese Bedingung erfüllt ist, lehrt der Augenschein. Die zweite Bedingung ist, dass von den gegebenen Gleichungen keine in den übrigen enthalten ist, oder ihnen widerspricht, und dieses ist hier zu untersuchen.

Bezeichnen wir die Gleichungen (11) zur Abkürzung mit $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$, etc., dann wird das Nichtvorhandensein der zweiten Bedingung zur Folge haben, dass sich eine Gleichung von der Form

$$v + \alpha v' + \beta v'' + \ldots. = 0 \text{ oder } = \text{constante.}$$

aufstellen lässt, die unabhängig von den Unbekannten erfüllt ist, und umgekehrt, wenn eine solche Gleichung nicht vorhanden ist, dann ist die obige zweite Bedingung erfüllt, und die Unbekannten x, x', x'', etc. sind durch die Gleichungen (11) bestimmbar. Substituirt man die Gleichungen (11) in die vorstehende, und setzt, wie für das Erfülltsein derselben nothwendig ist, die Coefficienten der Unbekannten, jeden für sich, gleich Null, so bekommt man

$$(12) \quad \ldots \quad \begin{cases} 0 = (aa) + \alpha(ab) + \beta(ac) + \ldots \\ 0 = (ab) + \alpha(bb) + \beta(bc) + \ldots \\ 0 = (ac) + \alpha(bc) + \beta(cc) + \ldots \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

deren Anzahl um Eine grösser ist, wie die der Unbekannten α, β, etc., und die also nur bedingungsweise erfüllt werden können. Seien

$$\begin{aligned}
\varrho \ &= pa + \alpha pb + \beta pc + \ldots, \\
\varrho' &= p'a' + \alpha p'b' + \beta p'c' + \ldots \\
\varrho'' &= p''a'' + \alpha p''b'' + \beta p''c'' + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

erhebt man diese ins Quadrat, dividirt darauf bez. mit p, p', p'', etc. und addirt, so wird in Folge der (12)

$$0 = \frac{\varrho^2}{p} + \frac{\varrho'^2}{p'} + \frac{\varrho''^2}{p''} + \ldots$$

woraus, da alle p positiv sind

$$\varrho = 0\,, \quad \varrho' = 0\,, \quad \varrho'' = 0\,, \text{ etc.}$$

folgt. Es wird also

$$\begin{aligned}
0 &= a + \alpha b + \beta c + \ldots \\
0 &= a' + \alpha b' + \beta c' + \ldots \\
0 &= a'' + \alpha b'' + \beta c'' + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Diese sind die Gleichungen (10), von welchen wir ausgegangen sind, mit dem Unterschiede, dass die völlig bekannten Glieder fehlen, und die Zahl der Unbekannten um Eine kleiner ist. Den vorstehenden Gleichungen kann aber nur in dem Falle Gnüge geleistet werden, wenn unter ihnen eine so grosse Anzahl in den übrigen enthalten ist, dass die Zahl der von einander unabhängigen $m-1$ ist, wenn m die Zahl der Unbekannten x, x', x'', etc. bezeichnet. In diesem Falle können aber aus den (10) die Unbekannten überhaupt nicht bestimmt werden. Sind im Gegentheil von den vorstehenden Gleichungen gar keine, oder eine geringere Zahl in den übrigen enthalten, so kann weder diesen noch den Gleichungen (12) Gnüge geleistet werden, und die Gleichungen (11) bestimmen die Unbekannten unzweideutig. Wir kommen daher auf den Schluss, dass wenn durch die Gleichungen (10) die Unbekannten entweder völlig bestimmt, oder mehr wie bestimmt sind, die (11) die Unbekannten völlig bestimmen, wenn aber im Gegentheil die (10) die Unbekannten unbestimmt lassen, so ist dasselbe mit den (11) der Fall.

Dieser Satz ergänzt die am Schlusse des Art. 18 aufgestellten Sätze.

21.

Da nun durch die Ermittelung der Unbekannten aus den (11) im Allgemeinen keine der (10) vollständig erfüllt wird, so kann man nach einer Relation zwischen den übrig bleibenden Fehlern fragen, und es zeigt sich leicht, dass eine solche vorhanden ist und darin besteht, dass die Summe der mit den bez. Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Minimum wird. Denn stellt man diese Bedingung auf, nemlich

$$\begin{aligned} & p(ax + bx' + cx'' + \ldots - l)^2 \\ & + p'(a'x + b'x' + c'x'' + \ldots - l')^2 \\ & + p''(a''x + b''x' + c''x'' + \ldots - l'')^2 + \text{etc.} = \text{Minimum} \end{aligned}$$

und entwickelt sie, so bekommt man die Gleichungen (11) wieder, gleichwie sich im Art. 3 zeigte, dass die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler bei der Bestimmung Einer Unbekannten aus gleich guten Beobachtungen ein Minimum wird, wenn man das arithmetische Mittel aus allen Bestimmungen als den wahrscheinlichsten Werth der Unbekannten betrachtet.

Den obigen Satz, den man sonst voran zu stellen pflegt, haben wir hier aus dem zu Anfang dieser Abhandlung aufgestellten Grundsatz abgeleitet, um zu zeigen, dass er eine nothwendige Folge desselben ist

22.

Zur vollständigen Auflösung der Aufgabe, die uns jetzt beschäftigt, gehört auch die Bestimmung der Gewichte der Unbekannten x, x', x'', etc. Da das Verfahren, durch welches diese Unbekannten im Vorhergehenden bestimmt worden sind, auf linearische Gleichungen geführt hat, so ist es klar, dass man jede derselben als linearische Function der bekannten Glieder (al), (bl), (cl), etc. der Gleichungen (11) darstellen kann, und da wiederum jedes dieser Glieder eine linearische Function der durch die Beobachtungen unabhängig von einander erhaltenen Grössen l, l', l'', etc. ist, so kann man auch die Unbekannten als linearische Functionen dieser letzt genannten Grössen darstellen. Seien daher

$$(13) \quad \ldots \quad \begin{cases} x = \lambda l + \lambda' l' + \lambda'' l'' + \ldots \\ x' = \varkappa l + \varkappa' l' + \varkappa'' l'' + \ldots \\ x'' = \mu l + \mu' l' + \mu'' l'' + \ldots \end{cases}$$

u. s. w. dann sind λ, λ', etc., $\varkappa$, $\varkappa'$, etc., μ, μ', etc. bestimmte numerische Coefficienten, deren Werthe jedenfalls zufolge des Vorhergehenden ermittelt werden können. Bezeichnet man nun die Gewichte dieser Bestimmungen von x, x', x'', etc. mit P, P', P'', etc. so wird sogleich in Folge der Gleichung (8)

$$\frac{1}{P} = \frac{\lambda^2}{p} + \frac{\lambda'^2}{p'} + \frac{\lambda''^2}{p''} + \ldots$$
$$\frac{1}{P'} = \frac{\varkappa^2}{p} + \frac{\varkappa'^2}{p'} + \frac{\varkappa''^2}{p''} + \ldots$$
$$\frac{1}{P''} = \frac{\mu^2}{p} + \frac{\mu'^2}{p'} + \frac{\mu''^2}{p''} + \ldots$$

u. s. w. Durch die unbestimmte Auflösung der Gleichungen (11) erhält man

$$\left.\begin{aligned} x &= (1,1)(al) + (1,2)(bl) + (1,3)(cl) + \ldots \\ x' &= (1,2)(al) + (2,2)(bl) + (2,3)(cl) + \ldots \\ x'' &= (1,3)(al) + (2,3)(bl) + (3,3)(cl) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (14)$$

u. s. w. wo (1,1), (1,2), etc. bestimmte numerische Werthe haben. Substituirt man die Ausdrücke des Art. 19 für (al), (bl), etc. in die vorstehenden Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} x = &\{(1,1)pa + (1,2)pb + (1,3)pc + \ldots\}l \\ &+ \{(1,1)p'a' + (1,2)p'b' + (1,3)p'c' + \ldots\}l' \\ &+ \text{etc.} \\ x' = &\{(1,2)pa + (2,2)pb + (2,3)pc + \ldots\}l \\ &+ \{(1,2)p'a' + (2,2)p'b' + (2,3)p'c' + \ldots\}l' \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

u. s. w. Vergleicht man diese mit den (13), so wird

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= (1,1)pa + (1,2)pb + (1,3)pc + \ldots \\ \lambda' &= (1,1)p'a' + (1,2)p'b' + (1,3)p'c' + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= (1,2)pa + (2,2)pb + (2,3)pc + \ldots \\ \varkappa' &= (1,2)p'a' + (2,2)p'b' + (2,3)p'c' + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (16)$$

u. s. w. Multiplicirt man aber die ursprünglichen Gleichungen (10) der Reihe nach erst mit λ, λ', λ'', etc. und addirt, dann mit $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, etc. und addirt, u. s. w., so ergiebt sich

$$(\lambda a)x + (\lambda b)x' + (\lambda c)x'' + \ldots = (\lambda l)$$
$$(\varkappa a)x + (\varkappa b)x' + (\varkappa c)x'' + \ldots = (\varkappa l)$$

u. s. w. wo

$$\begin{aligned}
(\lambda a) &= \lambda a + \lambda' a' + \lambda'' a'' + \ldots \\
(\lambda b) &= \lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'' + \ldots \\
\vdots \quad & \qquad\qquad \vdots \\
(\lambda l) &= \lambda l + \lambda' l' + \lambda'' l'' + \ldots \\
\hline
(\varkappa a) &= \varkappa a + \varkappa' a' + \varkappa'' a'' + \ldots \\
(\varkappa b) &= \varkappa b + \varkappa' b' + \varkappa'' b'' + \ldots \\
\vdots \quad & \qquad\qquad \vdots \\
(\varkappa l) &= \varkappa l + \varkappa' l' + \varkappa'' l'' + \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w. Aber in Folge dieser Bezeichnung geben die Gleichungen (13)

$$x = (\lambda l)\,, \quad x' = (\varkappa l)\,, \quad x'' = (\mu l)\,, \text{ etc.}$$

und folglich werden

$$(17) \quad \ldots \quad \begin{cases} (\lambda a) = 1\,, & (\lambda b) = 0\,, & (\lambda c) = 0 \\ (\varkappa a) = 0\,, & (\varkappa b) = 1\,, & (\varkappa c) = 0 \\ (\mu a) = 0\,, & (\mu b) = 0\,, & (\mu c) = 1 \end{cases}$$

u. s. w. Multiplicirt man hierauf die (15) der Reihe nach mit $\frac{\lambda}{p}$, $\frac{\lambda'}{p'}$, $\frac{\lambda''}{p''}$, etc. und addirt, so wird in Folge der vorstehenden Bedingungsgleichungen

$$\frac{\lambda^2}{p} + \frac{\lambda'^2}{p'} + \frac{\lambda''^2}{p''} + \ldots = (1,1)$$

die Gleichungen (16) geben auf ähnliche Art

$$\frac{\varkappa^2}{p} + \frac{\varkappa'^2}{p'} + \frac{\varkappa''^2}{p''} + \ldots = (2,2)$$

und auf dieselbe Weise bekommt man

$$\frac{\mu^2}{p} + \frac{\mu'^2}{p'} + \frac{\mu''^2}{p''} + \ldots = (3,3)$$

u. s. w. Es folgen hieraus für die Gewichte die folgenden einfachen Ausdrücke,

$$P = \frac{1}{(1,1)}\,, \quad P' = \frac{1}{(2,2)}\,, \quad P'' = \frac{1}{(3,3)}\,, \text{ etc.}$$

die auch wie folgt durch Worte beschrieben werden können. Um die Gewichte der Unbekannten x, x', x'', etc. zu erhalten, muss man die Gleichungen (11) unbestimmt auflösen, worauf das Reciproke des Coefficienten von (al) im Ausdruck von x, das Gewicht von x, das Reciproke des Coefficienten von (bl) im Ausdruck von x', das Gewicht von x', das Reciproke des Coefficienten von (cl) im Ausdruck von x'', das Gewicht von x'', u. s. w. ausdrückt. Das einfachste Verfahren um sowohl diese,

wie die übrigen Coefficienten der unbestimmten Elimination zu erhalten wird weiter unten angegeben werden.

23.

Da Fälle vorkommen können, in welchen nicht nur die Kenntniss von x, x', x'', etc., sondern auch die Kenntniss von Functionen derselben verlangt werden, so soll hier noch der wahrscheinlichste Werth einer linearischen Function dieser Grössen, nebst dem Gewicht dieser Bestimmung abgeleitet werden. Die Function sei die folgende,

$$K = k + \varepsilon x + \varepsilon' x' + \varepsilon'' x'' + \ldots$$

wo k, ε, ε', ε'', etc. gegebene numerische Grössen sind. Es ist nun ohne Weiteres klar, dass der wahrscheinlichste Werth von K durch die Substitution der im Vorhergehenden ermittelten wahrscheinlichsten Werthe von x, x', x'', etc. in den vorstehenden Ausdruck erhalten wird, und es wird sich daher hier nur um den Ausdruck des Gewichts dieser Bestimmung handeln können.

Eliminirt man x, x', x'', etc. im vorstehenden Ausdruck für K durch die Gleichungen (13), so wird

$$\begin{aligned} K = k &+ (\varepsilon\lambda + \varepsilon'\varkappa + \varepsilon''\mu + \ldots)l \\ &+ (\varepsilon\lambda' + \varepsilon'\varkappa' + \varepsilon''\mu' + \ldots)l' \\ &+ (\varepsilon\lambda'' + \varepsilon'\varkappa'' + \varepsilon''\mu'' + \ldots)l'' + \text{etc.} \quad . \quad . \quad (18) \end{aligned}$$

und da hier K durch die durch Beobachtungen erhaltenen Grössen l, l', l'', etc. ausgedrückt ist, so giebt die Gleichung (8) für das Gewicht von K, wenn wir es mit Q bezeichnen, sogleich den folgenden Ausdruck,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} = &\frac{(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\varkappa + \varepsilon''\mu + \ldots)^2}{p} \\ &+ \frac{(\varepsilon\lambda' + \varepsilon'\varkappa' + \varepsilon''\mu' + \ldots)^2}{p'} \\ &+ \frac{(\varepsilon\lambda'' + \varepsilon'\varkappa'' + \varepsilon''\mu'' + \ldots)^2}{p''} + \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19) \end{aligned}$$

Multiplicirt man aber die Gleichungen (15) der Reihe nach mit $\frac{\varkappa}{p}$, $\frac{\varkappa'}{p'}$, $\frac{\varkappa''}{p''}$, etc. und addirt, so ergiebt sich in Folge der Bedingungsgleichungen (17) sogleich

$$\frac{\lambda\varkappa}{p} + \frac{\lambda'\varkappa'}{p'} + \frac{\lambda''\varkappa''}{p''} + \ldots = (1,2)$$

und auf dieselbe Weise bekommt man

$$\frac{\lambda\mu}{p} + \frac{\lambda'\mu'}{p'} + \frac{\lambda''\mu''}{p''} + \ldots = (1,3)$$
$$\frac{\varkappa\mu}{p} + \frac{\varkappa'\mu'}{p'} + \frac{\varkappa''\mu''}{p''} + \ldots = (2,3)$$

u. s. w. Durch Anwendung dieser Gleichungen auf den Ausdruck für $\frac{1}{Q}$ erhält man, nachdem die darin vorkommenden Quadrate entwickelt worden sind,

$$\begin{aligned}\frac{1}{Q} = \varepsilon^2(1,1) + 2\varepsilon\varepsilon'(1,2) &+ 2\varepsilon\varepsilon''(1,3) + \ldots \\ + \varepsilon'^2(2,2) &+ 2\varepsilon'\varepsilon''(2,3) + \ldots \\ &+ \varepsilon''^2(3,3) + \ldots \\ &+ \ldots\end{aligned}$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Man erkennt leicht, dass die obigen Ausdrücke für die Gewichte P, P', P'', etc. specielle Fälle vom Vorstehenden sind, wie auch nicht anders sein kann.

24.

In Bezug auf die im Vorhergehenden abgeleiteten Ausdrücke für die Gewichte P, P', P'', etc. und Q sind noch ein Paar wichtige Bemerkungen zu machen. Die anfänglich erhaltenen Ausdrücke für diese Gewichte gelten nicht blos für den Fall, in welchem man die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten anwendet, sondern in jedem überhaupt möglichen Falle. Die Ausdrücke für x, x', x'', etc. können in jedem Falle auf die Form gebracht werden, die ihnen in den Gleichungen (13) gegeben worden ist, und wenn man nun blos die ursprünglichen Gleichungen (10) betrachtet, die die Unbekannten mit einander verbinden, so kann diesen auf unzählig viele Arten bis auf Weniges Gnüge geleistet werden. Jede verschiedene Art der Gnügeleistung derselben wird auf die Gleichungen (13) keine andere Wirkung äussern, als dass die darin enthaltenen Coefficienten λ, λ', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. μ, μ', etc. andere Werthe annehmen, und folglich die Unbekannten selbst auch. Wie aber nun auch die Werthe der eben genannten Coefficienten sein mögen, die Ausdrücke der Gewichte, die Functionen derselben Coefficienten sind, behalten ihre volle Geltung, und geben jedes Mal das Gewicht der ausgeführten Bestimmung der Unbekannten, und dieses gilt nicht nur für die genannten Ausdrücke für P, P', etc. sondern auch für den Ausdruck für Q, der ausdrücklich Function der oben genannten Coefficienten λ, λ', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. etc. ist.

Die Substitution derjenigen Werthe der eben genannten Coefficienten, die die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten geben, muss nun vor allen Substitutionen anderer Werthe derselben den Gewichten die Eigenschaft verleihen, dass sie Maxima werden. Denn gäbe es irgend andere Werthe dieser Coefficienten, die den Gewichten grössere Werthe verleihen könnten. so würden diese, und nicht jene die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten geben. Dass in der That die Werthe der genannten Coefficienten, die im Vorhergehenden als diejenigen ermittelt worden sind, die die Werthe der Unbekannten zu den wahrscheinlichsten machen, auch die Gewichte zu Maxima machen, soll jetzt bewiesen werden. Da P, P', etc. specielle Werthe von Q sind, so braucht der Beweis nur für Q durchgeführt zu werden.

25.

Denken wir uns jetzt unter den Coefficienten λ, λ', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. μ, μ', etc. etc. der Gleichungen (13) nicht diejenigen, die durch das oben abgeleitete Verfahren erhalten worden sind, sondern solche, die irgend eine beliebige Combination der Gleichungen (10) gegeben hat, so wird der daraus entspringende Werth der Function K immer noch durch die Gleichung (18), und das Gewicht dieser Bestimmung durch die Gleichung (19) gegeben sein. Untersuchen wir hierauf, wie die oft genannten Coefficienten bestimmt werden müssen, wenn der Gleichung (19) die Bedingung untergelegt wird, dass Q ein Maximum werde. Sei

$$\begin{aligned} \Delta &= \varepsilon\lambda + \varepsilon'\varkappa + \varepsilon''\mu + \dots \\ \Delta' &= \varepsilon\lambda' + \varepsilon'\varkappa' + \varepsilon''\varkappa' + \dots \\ \Delta'' &= \varepsilon\lambda'' + \varepsilon'\varkappa'' + \varepsilon''\mu'' + \dots \end{aligned}$$

u. s. w. dann muss

$$\frac{1}{Q} = \frac{\Delta^2}{p} + \frac{\Delta'^2}{p'} + \frac{\Delta''^2}{p''} + \dots \quad . \quad , \quad . \quad . \quad (20)$$

in Bezug auf die Functionen Δ, Δ', Δ'', etc. ein Minimum werden. Diese Functionen sind nicht von einander unabhängig, sondern unterliegen einer Anzahl von Bedingungen, die man leicht erhalten kann. Multiplicirt man die Gleichungen (10) der Reihe nach mit λ, λ', λ'', etc. und addirt, so bekommt man in Folge der (13)

$$\begin{aligned} a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' + \dots &= 1 \\ b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda'' + \dots &= 0 \\ c\lambda + c'\lambda' + c''\lambda'' + \dots &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. Multiplicirt man ferner die (10) mit $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, etc. und addirt, so ergiebt sich

$$a\varkappa + a'\varkappa' + a''\varkappa'' + \ldots = 0$$
$$b\varkappa + b'\varkappa' + b''\varkappa'' + \ldots = 1$$
$$c\varkappa + c'\varkappa' + c''\varkappa'' + \ldots = 0$$

u. s. w. und eben so bekommt man

$$a\mu + a'\mu' + a''\mu'' + \ldots = 0$$
$$b\mu + b'\mu' + b''\mu'' + \ldots = 0$$
$$c\mu + c'\mu' + c''\mu'' + \ldots = 1$$

u. s. w. Um diese Gleichungen zu Functionen der $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, etc. zu machen, multiplicire man die erste Gleichung einer jeden Gruppe der Reihe nach mit ε, ε', ε'', etc. und addire. Mit den zweiten, dritten, u. s. w. Gleichungen verfahre man eben so, worauf die folgenden erhalten werden

$$(21) \quad \ldots \quad \begin{cases} a\mathcal{A} + a'\mathcal{A}' + a''\mathcal{A}'' + \ldots = \varepsilon \\ b\mathcal{A} + b'\mathcal{A}' + b''\mathcal{A}'' + \ldots = \varepsilon' \\ c\mathcal{A} + c'\mathcal{A}' + c''\mathcal{A}'' + \ldots = \varepsilon'' \end{cases}$$

u. s. w. welche die Bedingungsgleichungen sind, auf die es hier ankommt.

26.

Um nun die Bedingungsgleichungen für das Minimum des Ausdrucks (20) zu erhalten müsste man erst durch die vorstehenden Gleichungen, deren Anzahl kleiner ist wie die der $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, etc., von der letzteren so viele wie möglich eliminiren. Allein es ist bekannt, dass man statt dessen die Bedingungsgleichungen, jede mit einem verschiedenen Factor multiplicirt, zur Function die ein Minimum werden soll addiren, und dann nach der Differentiation alle Differentiale von einander als unabhängig betrachten darf. Multiplicirt man daher die obigen Bedingungsgleichungen der Reihe nach mit den Factoren $-2A$, $-2B$, $-2C$, etc., und addirt sie zur rechten Seite des Ausdrucks (20), so wird

$$\begin{aligned} &\frac{\mathcal{A}^2}{p} + \frac{\mathcal{A}'^2}{p'} + \frac{\mathcal{A}''^2}{p''} + \ldots \\ &- 2a\mathcal{A}A - 2a'\mathcal{A}'A - 2a''\mathcal{A}''A - \ldots \\ &- 2b\mathcal{A}B - 2b'\mathcal{A}'B - 2b''\mathcal{A}''B - \ldots \\ &- 2c\mathcal{A}C - 2c'\mathcal{A}'C - 2c''\mathcal{A}''C - \ldots \\ &\quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

die Function, die ein absolutes Minimum werden muss. Differentiirt man, und setzt die Coefficienten eines jeden der Differentiale für sich gleich Null, so werden

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}}{p} - aA - bB - cC - \ldots &= 0 \\ \frac{\mathcal{A}'}{p'} - a'A - b'B - c'C - \ldots &= 0 \\ \frac{\mathcal{A}''}{p''} - a''A - b''B - c''C - \ldots &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22)$$

u. s. w. die Bedingungsgleichungen des Maximums von Q. Eliminirt man nun mittelst der vorstehenden Gleichungen die $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, etc. aus den (21), so bekommt man

$$\left.\begin{aligned} (aa)A + (ab)B + (ac)C + \ldots &= \varepsilon \\ (ab)A + (bb)B + (bc)C + \ldots &= \varepsilon' \\ (ac)A + (bc)B + (cc)C + \ldots &= \varepsilon'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (23)$$

u. s. w. wo die Coefficienten (aa), (ab), etc. dieselben sind wie im Art. 19. Diese Gleichungen, deren Anzahl der der Factoren A, B, C, etc. gleich ist, dienen zur Bestimmung dieser letzteren. Durch Einführung der Functionen $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, etc. in die (18) bekommt man

$$K = k + \mathcal{A}l + \mathcal{A}'l' + \mathcal{A}''l'' + \ldots$$

und die Elimination der $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, etc. hieraus, vermittelst der Gleichungen (22), giebt

$$K = k + A(al) + B(bl) + C(cl) + \ldots \quad \ldots \quad (24)$$

wo wieder die Coefficienten (al), (bl), etc. dieselben sind wie im Art. 19. Hiemit ist unsere Aufgabe gelöst, und es ist nur noch die Bedeutung dieser Auflösung zu untersuchen.

27.

Löst man die (23) unbestimmt auf, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} A &= (1,1)\varepsilon + (1,2)\varepsilon' + (1,3)\varepsilon'' + \ldots \\ B &= (1,2)\varepsilon + (2,2)\varepsilon' + (2,3)\varepsilon'' + \ldots \\ C &= (1,3)\varepsilon + (2,3)\varepsilon' + (3,3)\varepsilon'' + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. wo nothwendiger Weise die Coefficienten (1,1), (1,2), etc. dieselben sind wie in den Gleichungen (14), und eliminirt man hiemit A, B, etc. aus (24) so kommt

$$K = k + \{(1,1)(al) + (1,2)(bl) + (1,3)(cl) + \ldots\}\varepsilon$$
$$+ \{(1,2)(al) + (2,2)(bl) + (2,3)(cl) + \ldots\}\varepsilon'$$
$$+ \{(2,3)(al) + (2,3)(bl) + (3,3)(cl) + \ldots\}\varepsilon'' + \text{etc.}$$

Die Factoren von ε, ε', ε'', etc. sind zufolge der Gleichungen (14) die wahrscheinlichsten Werthe von x, x', x'', etc., und folglich ist der Ausdruck (24) von K mit dem, im Art. als den wahrscheinlichsten, Werth von K erkannten identisch.

Für die Grössen x, x', x'', etc. ergiebt sich dasselbe. Denn setzt man $k = 0$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = \varepsilon'' = \text{etc.} = 0$, so geht K in x über, setzt man $k = 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 1$, $\varepsilon'' = \text{etc.} = 0$, so geht K in x' über, u. s. w. Führt man aber diese Substitution im vorstehenden Ausdruck von K aus, so bekommt man die durch die (14) ausgedrückten wahrscheinlichsten Werthe von x, x', x'', etc. wieder. Es ist also hiemit der Satz bewiesen:

»Die durch Anwendung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten, oder irgend welchen Functionen der Unbekannten sich ergebenden Gewichte dieser Bestimmungen sind Maxima, und jede andere Bestimmung derselben führt auf Gewichte die kleiner sind.«

§. 3. Ausdehnung der bisher behandelten Aufgabe auf den Fall, in welchem die Unbekannten nicht von einander unabhängig sind.

28.

Bisher ist angenommen worden, dass die Unbekannten x, x', x'', etc. von einander unabhängig seien, da aber Fälle vorkommen, wo dieses nicht der Fall ist, so soll jetzt angenommen werden, dass zufolge der Aufgabe, auf welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandt werden soll, zwischen den Unbekannten Eine oder mehrere Bedingungsgleichungen stattfinden. Es ist an sich klar, dass die Zahl dieser Bedingungsgleichungen kleiner sein muss wie die Zahl der Unbekannten, denn wären diese beiden Zahlen einander gleich, so würden die Unbekannten daraus ohne Zuziehung von Beobachtungen bestimmt werden können, und wäre die Zahl der Bedingungsgleichungen grösser wie die der Unbekannten, so könnten letztere gar nicht bestimmt werden. Seien nun in grösster Allgemeinheit die Bedingungsgleichungen

$$\psi(X, X', X'', \ldots) = 0$$
$$\chi(X, X', X'', \ldots) = 0$$

u. s. w. wo ψ, χ, etc. Functionszeichen sind, so verfahre man zuerst wie im Art. 18 gezeigt worden ist. Man setze wieder

$$X = \xi + x\,, \quad X' = \xi' + x'\,, \quad X'' = \xi'' + x'', \text{ etc.}$$

$$\psi(\xi, \xi', \xi'', \ldots) = f$$
$$\chi(\xi, \xi', \xi'', \ldots) = g$$
$$\text{etc.}$$

$$\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right) = q\,, \quad \left(\frac{d\psi}{d\xi'}\right) = q', \quad \left(\frac{d\psi}{d\xi''}\right) = q'', \text{ etc.}$$
$$\left(\frac{d\chi}{d\xi}\right) = r\,, \quad \left(\frac{d\chi}{d\xi'}\right) = r', \quad \left(\frac{d\chi}{d\xi''}\right) = r'', \text{ etc.}$$

u. s. w. dann bekommt man die folgenden linearischen Gleichungen

$$0 = qx + q'x' + q''x'' + \ldots + f$$
$$0 = rx + r'x' + r''x'' + \ldots + g$$

u. s. w. Da diese Bedingungsgleichungen als solche betrachtet werden, die aus der Theorie der Aufgabe, die auf die Unbekannten x, x', x'', etc. hingeführt hat, entspringen, und von den Beobachtungen unabhängig sind, so müssen sie vollständig erfüllt werden, denn jedes System von Werthen der Unbekannten, welches diesen Gleichungen nicht vollständig gnügt, ist gewiss falsch, und kann daher unmöglich das wahrscheinlichste sein.

Die Auflösung unserer Aufgabe, die sich zunächst darbietet, ist die folgende. Wenn q die Anzahl der Bedingungsgleichungen bezeichnet, so kann man aus denselben durch die Elimination eine Anzahl q der Unbekannten in Function der übrigen darstellen, eliminirt man nun durch diese Gleichungen aus den (10) diese q Unbekannten, dann sind die übrigen Unbekannten von einander unabhängig, und die gegenwärtige Aufgabe ist auf die des Art. 18 u. f. hingeführt. Der weitere Verlauf der Auflösung ist also mit der im vor. § ausgeführten identisch.

29.

Ich nehme zu dem Ende an, dass in den Gleichungen (10) ausser den dort angeführten Unbekannten x, x', x'', etc. auch die Unbekannten $x_{,}$, $x_{,,}$, etc. vorkommen, und dass die letzteren es sind, die sich zur Elimination durch die Bedingungsgleichungen eignen. Es ist nemlich an sich klar, dass nicht in allen Fällen beliebige Unbekannte durch die Bedingungsgleichungen eliminirt werden können. Die Gleichungen (10) sind also jetzt die folgenden,

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} ax + bx' + cx'' + \ldots + b_{,}x_{,} + c_{,}x_{,,} + \ldots = l \\ a'x + b'x' + c'x'' + \ldots + b_{,}'x_{,} + c_{,}'x_{,,} + \ldots = l' \\ a''x + b''x' + c''x'' + \ldots + b_{,}''x_{,} + c_{,}''x_{,,} + \ldots = l'' \end{array}\right.$$

u. s. w. Auf gleiche Weise schreibe ich die Bedingungsgleichungen hin, indem ich zur besseren Uebersicht eine dritte Gleichung, so wie eine dritte Unbekannte der zweiten Gattung hinzufüge,

$$\begin{array}{l} 0 = qx + q'x' + q''x'' + \ldots + q_{,}x_{,} + q_{,,}x_{,,} + q_{,,,}x_{,,,} + \ldots + f \\ 0 = rx + r'x' + r''x'' + \ldots + r_{,}x_{,} + r_{,,}x_{,,} + r_{,,,}x_{,,,} + \ldots + g \\ 0 = sx + s'x' + s''x'' + \ldots + s_{,}x_{,} + s_{,,}x_{,,} + s_{,,,}x_{,,,} + \ldots + h \end{array}$$

u. s. w. Um hieraus $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc., jede für sich, in Function der x, x', x'', etc. darzustellen lehrt der Augenschein, dass die folgenden Gleichungen aufgelöst werden müssen,

$$\begin{array}{ll} 0 = q_{,}\zeta + q_{,,}\zeta' + q_{,,,}\zeta'' + \ldots + f\,; & 0 = q_{,}\mu + q_{,,}\mu' + q_{,,,}\mu'' + \ldots + q \\ 0 = r_{,}\zeta + r_{,,}\zeta' + r_{,,,}\zeta'' + \ldots + g\,; & 0 = r_{,}\mu + r_{,,}\mu' + r_{,,,}\mu'' + \ldots + r \\ 0 = s_{,}\zeta + s_{,,}\zeta' + s_{,,,}\zeta'' + \ldots + h\,; & 0 = s_{,}\mu + s_{,,}\mu' + s_{,,,}\mu'' + \ldots + s \\ \quad\text{etc.} & \quad\text{etc.} \\ 0 = q_{,}\nu + q_{,,}\nu' + q_{,,,}\nu'' + \ldots + q'\,; & 0 = q_{,}\varrho + q_{,,}\varrho' + q_{,,,}\varrho'' + \ldots + q'' \\ 0 = r_{,}\nu + r_{,,}\nu' + r_{,,,}\nu'' + \ldots + r'\,; & 0 = r_{,}\varrho + r_{,,}\varrho' + r_{,,,}\varrho'' + \ldots + r'' \\ 0 = s_{,}\nu + s_{,,}\nu' + s_{,,,}\nu'' + \ldots + s'\,; & 0 = s_{,}\varrho + s_{,,}\varrho' + s_{,,,}\varrho'' + \ldots + s'' \\ \quad\text{etc.} & \quad\text{etc.} \end{array}$$

etc. in welchen allen die Coefficienten der Unbekannten immer dieselben sind. Hat man hieraus ζ, ζ', etc. μ, μ', etc. ν, ν', etc. ϱ, ϱ', etc. etc. ermittelt, so werden

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l} x_{,} = \zeta + \mu x + \nu x' + \varrho x'' + \ldots \\ x_{,,} = \zeta' + \mu' x + \nu' x' + \varrho' x'' + \ldots \\ x_{,,,} = \zeta'' + \mu'' x + \nu'' x' + \varrho'' x'' + \ldots \end{array}\right.$$

u. s. w. Setzt man nun

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{a} = a + b_{,}\mu + c_{,}\mu' + \ldots\,; & \mathfrak{a}' = a' + b_{,}'\mu + c_{,}'\mu' + \ldots \\ \mathfrak{b} = b + b_{,}\nu + c_{,}\nu' + \ldots\,; & \mathfrak{b}' = b' + b_{,}'\nu + c_{,}'\nu' + \ldots \\ \mathfrak{c} = c + b_{,}\varrho + c_{,}\varrho' + \ldots\,; & \mathfrak{c}' = c' + b_{,}'\varrho + c_{,}'\varrho' + \ldots \\ \vdots & \vdots \\ \mathfrak{n} = l - b_{,}\zeta - c_{,}\zeta' + \ldots\,; & \mathfrak{n}' = l' - b_{,}'\zeta - c_{,}'\zeta' + \ldots \\ \mathfrak{a}'' = a'' + b_{,}''\mu + c_{,}''\mu' + & \\ \mathfrak{b}'' = b'' + b_{,}''\nu + c_{,}''\nu' + & \\ \mathfrak{c}'' = c'' + b_{,}''\varrho + c_{,}''\varrho' + & \quad\text{etc.} \\ \vdots & \\ \mathfrak{n}'' = l'' - b_{,}''\zeta - c_{,}''\zeta' + & \end{array}$$

dann gehen die (25) in die folgenden über, in welchen alle Unbekannten von einander unabhängig sind

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}x' + \mathfrak{c}x'' + \ldots &= \mathfrak{n} \\ \mathfrak{a}'x + \mathfrak{b}'x' + \mathfrak{c}'x'' + \ldots &= \mathfrak{n}' \\ \mathfrak{a}''x + \mathfrak{b}''x' + \mathfrak{c}''x'' + \ldots &= \mathfrak{n}'' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (27)$$

u. s. w. Diese Gleichungen müssen also demselben Verfahren unterworfen werden wie die (10), und die der (11) analogen, die daraus hervorgehen, geben die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten x, x', x'', etc. Man muss nemlich zuerst die folgenden Coefficienten bilden

$$\begin{aligned} (\mathfrak{aa}) &= p\mathfrak{a}^2 + p'\mathfrak{a}'^2 + p''\mathfrak{a}''^2 + \ldots \\ (\mathfrak{ab}) &= p\mathfrak{ab} + p'\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' + p''\mathfrak{a}''\mathfrak{b}'' + \ldots \\ &\vdots \\ (\mathfrak{an}) &= p\mathfrak{an} + p'\mathfrak{a}'\mathfrak{n}' + p''\mathfrak{a}''\mathfrak{n}'' + \ldots \\ \hline (\mathfrak{bb}) &= p\mathfrak{b}^2 + p'\mathfrak{b}'^2 + p''\mathfrak{b}''^2 + \ldots \\ &\vdots \\ (\mathfrak{bn}) &= p\mathfrak{bn} + p'\mathfrak{b}'\mathfrak{n}' + p''\mathfrak{b}''\mathfrak{n}'' + \ldots \\ \hline \end{aligned}$$

u. s. w. wenn wieder p, p', p'', etc. die Gewichte der Bestimmungen von l, l', l'', etc. bezeichnen. Sind die vorstehenden Grössen berechnet, so ergeben sich durch die Auflösung der folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{aa})x + (\mathfrak{ab})x' + (\mathfrak{ac})x'' + \ldots &= (\mathfrak{an}) \\ (\mathfrak{ab})x + (\mathfrak{bb})x' + (\mathfrak{bc})x'' + \ldots &= (\mathfrak{bn}) \\ (\mathfrak{ac})x + (\mathfrak{bc})x' + (\mathfrak{cc})x'' + \ldots &= (\mathfrak{cn}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (28)$$

u. s. w. die wahrscheinlichsten Werthe von x, x', x'', etc. und substituirt man die für diese erhaltenen Werthe in die (26), so ergeben sich die wahrscheinlichsten Werthe von $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, $x_{\prime\prime\prime}$, etc., womit alle Unbekannten erhalten sind.

30.

Die Gewichte dieser Bestimmungen von x, x', x'', etc. haben dieselben Ausdrücke wie in der vorhergehenden Aufgabe, da die Analyse des Art. 22, nachdem a, b, etc. l, a', etc. in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, etc. $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{a}'$, etc. verwandelt worden sind, ohne Abänderung wieder stattfindet. Sei also durch die unbestimmte Auflösung der Gleichungen (28)

$$x = (I,\ I)\,(\mathfrak{an}) + (I,\ II)\,(\mathfrak{bn}) + (I,\ III)\,(\mathfrak{cn}) + \dots$$
$$x' = (I,\ II)\,(\mathfrak{an}) + (II,\ II)\,(\mathfrak{bn}) + (II,\ III)\,(\mathfrak{cn}) + \dots$$
$$x'' = (I, III)\,(\mathfrak{an}) + (II, III)\,(\mathfrak{bn}) + (III, III)\,(\mathfrak{cn}) + \dots$$

u. s. w. erhalten worden, dann wird

$$P = \frac{1}{(I,\ I)}\,;\quad P' = \frac{1}{(II,\ II)}\,;\quad P'' = \frac{1}{(III,\ III)}\,;\ \text{etc.}$$

wenn wieder P, P', etc. die Gewichte der vorstehenden Bestimmungen von x, x', etc. bezeichnen. Da die $x_{,}$, $x_{,,}$, etc. zu Functionen der x, x', etc. gemacht worden sind, so werden ihre Gewichte eben so bestimmt, wie das der Function K des Art. 23, und der dort für dieses Gewicht erhaltene Ausdruck giebt nach Abänderung der Bezeichnungen die Gewichte der obigen Bestimmungen von $x_{,}$, $x_{,,}$, etc. Bezeichnet man diese Gewichte mit $P_{,}$, $P_{,,}$, etc., so ergiebt sich sogleich

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{,}} = \mu^2(I,I) &+ 2\mu\nu\,(I,\ II) + 2\mu\varrho\,(I,\ III) + \dots \\ &+ \nu^2(II,II) + 2\nu\varrho\,(II,III) + \dots \\ &\qquad\qquad + \varrho^2\,(III,\ III) + \dots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \dots \\ \frac{1}{P_{,,}} = \mu'^2(I,I) &+ 2\mu'\nu'(I,II) + 2\mu'\varrho'(I,III) + \dots \\ &+ \nu'^2(II,II) + 2\nu'\varrho'(II,III) + \dots \\ &\qquad\qquad + \varrho'^2\,(III,\ III) + \dots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \dots \end{aligned}$$

u. s. w. womit die Gewichte aller Unbekannten bestimmt sind.

31.

Von der eben gelösten Aufgabe lässt sich eine andere Auflösung geben, die auf elegante Relationen führt, aber statt genau dieselbe Aufgabe wieder vorzunehmen, will ich die folgende etwas allgemeinere aufstellen *).

Allgemeine Aufgabe.

Seien wie früher

$$\psi\,(X,\ X',\ X'',\dots) = 0$$
$$\chi\,(X,\ X',\ X'',\dots) = 0$$
$$\text{etc.}$$

*) S. Schum. Astr. Nachr. Bd. XVI. No. 361.

eine Anzahl von Gleichungen, die, durch irgend eine Theorie gegeben, zwischen den Unbekannten X, X', X'', etc. stattfinden, deren Anzahl aber kleiner ist wie die der Unbekannten, so dass letztere dadurch nicht völlig bestimmt sind. Es wird nun angenommen, dass es möglich wird alle Unbekannten zu bestimmen, wenn man die Werthe L, L', etc. gewisser Functionen

$$f\,(X, X', X'', \ldots) = L$$
$$F\,(X, X', X'', \ldots) = L'$$
$$\text{etc.}$$

durch Beobachtungen ermittelt, und man fragt in dem Falle, wo die Anzahl aller Functionen ψ, χ, etc. f, F, etc. grösser, oder wenigstens nicht kleiner ist wie die Anzahl der Unbekannten, nicht nur nach den wahrscheinlichsten Werthen dieser, und den Gewichten dieser Bestimmungen, sondern auch nach dem wahrscheinlichsten Werthe irgend einer Function Ω derselben Unbekannten und dem Gewicht dieser Bestimmung.

Auflösung.

Die Functionen bereitet man, wenn sie nicht ursprünglich linearisch sind, alle auf dieselbe Weise vor, wie in den Artt. 18 u. 28 gezeigt worden ist. Die dort eingeführten Bezeichnungen sollen hier beibehalten werden. In Bezug auf die Function Ω sei

$$\Omega\,(X, X', X'', \ldots) = \omega$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dX}\right) = k, \quad \left(\frac{d\Omega}{dX'}\right) = k', \quad \left(\frac{d\Omega}{dX''}\right) = k'', \quad \text{etc.}$$

und somit beruht die Aufgabe auf die Behandlung der folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} ax + bx' + cx'' + \ldots = l \\ a'x + b'x' + c'x'' + \ldots = l' \\ a''x + b''x' + c''x'' + \ldots = l'' \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (29)$$

$$\left.\begin{array}{l} qx + q'x' + q''x'' + \ldots + f = 0 \\ rx + r'x' + r''x'' + \ldots + g = 0 \\ sx + s'x' + s''x'' + \ldots + h = 0 \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (30)$$

$$\Omega = \omega + kx + k'x' + k''x'' + \ldots \quad \ldots \quad (31)$$

Die Anzahl der Gleichungen (29) sei m, die Anzahl der (30) sei q, und die der Unbekannten x, x', x'', etc. sei n. Es ist nun hier Bedingung, dass

$$q < n\,, \quad m + q > n$$

oder wenigstens nicht $m + q < n$ sei. Es folgt hieraus aber nicht, dass nothwendig $m > n$ sein muss, wenn gleich dieser Fall eintreten kann, in Bezug auf m und n sind vielmehr alle drei Fälle

$$m < n\,, \quad m = n\,, \quad m > n$$

möglich.

32.

Wie man nun auch die x, x', x'', etc. aus den obigen Gleichungen bestimmen mag, die Ausdrücke derselben können wieder nur linearische Functionen von l, l', l'', etc. f, g, h, etc. sein, und sie haben daher die folgende Form

$$(32)\quad \begin{cases} x = \zeta l + \zeta' l' + \zeta'' l'' + \ldots - \varphi f - \chi g - \psi h - \ldots \\ x' = \theta l + \theta' l' + \theta'' l'' + \ldots - \varphi' f - \chi' g - \psi' h - \ldots \\ x'' = \varrho l + \varrho' l' + \varrho'' l'' + \ldots - \varphi'' f - \chi'' g - \psi'' h - \ldots \end{cases}$$

u. s. w. wo ζ, ζ', etc. θ, θ', etc. ϱ, ϱ', etc. φ, φ', etc. χ, χ', etc. ψ, ψ', etc. numerische, jetzt noch unbekannte, Coefficienten sind. Die Anzahl dieser Gleichungen ist $= n$, und die Anzahl der eben genannten unbekannten Coefficienten ist $= n\,(m + q)$, aber diese Unbekannten sind nicht völlig von einander unabhängig, sondern hängen durch eine Anzahl $= n^2$ von Gleichungen gegenseitig von einander ab, so dass in der That nur eine Anzahl $= n\,(m + q - n)$ dieser Unbekannten von einander unabhängig sind. Um die Gleichungen, die zwischen diesen Unbekannten stattfinden, zu erhalten, multiplicire man die Gleichungen (29) der Reihe nach mit ζ, ζ', ζ'', etc. die (30) mit φ, χ, ψ, etc., und addire die Produkte, worauf die Vergleichung mit der ersten (32) die folgenden Gleichungen giebt,

$$\begin{aligned} \zeta a + \zeta' a' + \zeta'' a'' + \ldots + \varphi q + \chi r + \psi s + \ldots &= 1 \\ \zeta b + \zeta' b' + \zeta'' b'' + \ldots + \varphi q' + \chi r' + \psi s' + \ldots &= 0 \\ \zeta c + \zeta' c' + \zeta'' c'' + \ldots + \varphi q'' + \chi r'' + \psi s'' + \ldots &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. Multiplicirt man hierauf dieselben Gleichungen der Reihe nach mit θ, θ', θ'', etc. und φ', χ', ψ', etc. und addirt, so giebt die Vergleichung mit der zweiten (32)

$$\theta a + \theta' a' + \theta'' a'' + \ldots + \varphi' q + \chi' r + \psi' s + \ldots = 0$$
$$\theta b + \theta' b' + \theta'' b'' + \ldots + \varphi' q' + \chi' r' + \psi' s' + \ldots = 1$$
$$\theta c + \theta' c' + \theta'' c'' + \ldots + \varphi' q'' + \chi' r'' + \psi' s'' + \ldots = 0$$

u. s. w. und eben so ergiebt sich

$$\varrho a + \varrho' a' + \varrho'' a'' + \ldots + \varphi'' q + \chi'' r + \psi'' s + \ldots = 0$$
$$\varrho b + \varrho' b' + \varrho'' b'' + \ldots + \varphi'' q' + \chi'' r' + \psi'' s' + \ldots = 0$$
$$\varrho c + \varrho' c' + \varrho'' c'' + \ldots + \varphi'' q'' + \chi'' r'' + \psi'' s'' + \ldots = 1$$

u. s. w. u. s. w. Man erkennt leicht, dass die Anzahl aller dieser Gleichungen $= n^2$ ist, wie oben angeführt wurde.

33.

Wie man nun auch die Unbekannten x, x', etc. bestimmen mag, so folgt aus der (31), nachdem man x, x', etc. durch die (32) eliminirt hat, dass

$$\Omega = \omega + \Delta l + \Delta' l' + \Delta'' l'' + \ldots - \alpha f - \beta g - \gamma h - \ldots \quad (33)$$

wird, wenn man

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = k\zeta + k'\theta + k''\varrho + \ldots \\ \Delta' = k\zeta' + k'\theta' + k''\varrho' + \ldots \\ \Delta'' = k\zeta'' + k'\theta'' + k''\varrho'' + \ldots \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (34)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = k\varphi + k'\varphi' + k''\varphi'' + \ldots \\ \beta = k\chi + k'\chi' + k''\chi'' + \ldots \\ \gamma = k\psi + k'\psi' + k''\psi'' + \ldots \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (35)$$

setzt, und wenn man das Gewicht dieser Bestimmung von Ω mit P bezeichnet, so wird zufolge der Gleichung (8)

$$\frac{1}{P} = \frac{\Delta^2}{p} + \frac{\Delta'^2}{p'} + \frac{\Delta''^2}{p''} + \ldots \quad \ldots \quad (36)$$

wenn wieder p, p', p'', etc. die Gewichte der Bestimmungen von l, l', l'', etc. bezeichnen.

Wir wollen jetzt zur Lösung unserer Aufgabe den im Art. 27 bewiesenen Satz anwenden, zufolge dessen durch die wahrscheinlichste Bestimmung der Unbekannten die Gewichte Maxima werden. Es muss demzufolge die rechte Seite der Gleichung (36) zu einem Minimum gemacht werden, und dieses wird wieder ein sogenanntes relatives Minimum, da die Δ, Δ', Δ'', etc. nicht von einander unabhängig sind. Die

Bedingungsgleichungen zwischen den eben genannten Grössen erhält man aus den im vor. Art. erhaltenen Gleichungen, eben so wie am eben a. O. Man multiplicire die erste Gleichung einer jeden Gruppe dieser Gleichungen der Reihe nach mit k, k', k'', etc, und addire, und behandle die übrigen Gleichungen eben so, dann ergeben sich

$$(37) \begin{cases} \mathcal{A}a + \mathcal{A}'a' + \mathcal{A}''a'' + \ldots + \alpha q + \beta r + \gamma s + \ldots\ldots = k \\ \mathcal{A}b + \mathcal{A}'b' + \mathcal{A}''b'' + \ldots + \alpha q' + \beta r' + \gamma s' + \ldots\ldots = k' \\ \mathcal{A}c + \mathcal{A}'c' + \mathcal{A}''c'' + \ldots + \alpha q'' + \beta r'' + \gamma s'' + \ldots\ldots = k'' \end{cases}$$

u. s. w. welche die gesuchten Bedingungsgleichungen sind. Multiplicirt man nun diese Gleichungen mit den unbestimmten Factoren $-2A$, $-2B$, $-2C$, etc. und addirt sie zur rechten Seite der Gleichung (36), so wird der Ausdruck, welcher ein absolutes Minimum werden muss, der folgende

$$\begin{array}{llll} \frac{\mathcal{A}^2}{p} - 2A\mathcal{A}a & -2B\mathcal{A}b & -2C\mathcal{A}c & - \ldots \\ + \frac{\mathcal{A}'^2}{p'} - 2A\mathcal{A}'a' & -2B\mathcal{A}'b' & -2C\mathcal{A}'c' & - \ldots \\ + \frac{\mathcal{A}''^2}{p''} - 2A\mathcal{A}''a'' & -2B\mathcal{A}''b'' & -2C\mathcal{A}''c'' & - \ldots \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & \\ -2A\alpha q & -2B\alpha q' & -2C\alpha q'' & - \ldots \\ -2A\beta r & -2B\beta r' & -2C\beta r'' & - \ldots \\ -2A\gamma s & -2B\gamma s' & -2C\gamma s'' & - \ldots \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & \\ +2Ak & +2Bk' & +2Ck'' & + \ldots \end{array}$$

Differentiirt man diesen nach $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, etc. α, β, γ, etc. und betrachtet darauf die Differentiale aller dieser Veränderlichen als unabhängig von einander, so bekommt man die Gleichungen

$$(38) \quad \ldots \quad \begin{cases} \frac{\mathcal{A}}{p} = Aa + Bb + Cc + \ldots \\ \frac{\mathcal{A}'}{p'} = Aa' + Bb' + Cc' + \ldots \\ \frac{\mathcal{A}''}{p''} = Aa'' + Bb'' + Cc'' + \ldots, \\ \quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{cases}$$

$$(39) \quad \ldots \quad \begin{cases} 0 = Aq + Bq' + Cq'' + \ldots \\ 0 = Ar + Br' + Cr'' + \ldots \\ 0 = As + Bs' + Cs'' + \ldots \\ \quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{cases}$$

die in Verbindung mit den (37) die Auflösung der Aufgabe in sich enthalten. Diese ist durch die Zuziehung der Bedingung des Maximums von P wieder eine bestimmte geworden, denn die Zahl der aufzulösenden Gleichungen ist der Zahl der darin befindlichen Unbekannten gleich. Die Zahl der $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, etc. ist $= m$, die der A, B, etc. $= n$, und die der α, β, etc. $= q$, folglich ist die Zahl aller Unbekannten $= m + n + q$. Die Anzahl der Gleichungen (37) ist $= n$, die der (38) $= m$, und die der (39) $= q$, folglich ist die Anzahl aller Gleichungen auch $= n + m + q$.

34.

Die Unbekannten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, etc. können wieder sogleich eliminirt werden. Zieht man die Werthe derselben aus (38), und substituirt sie in die (37), so erhält man

$$\begin{aligned}
[aa]A + [ab]B + [ac]C + \dots &= k - \alpha q - \beta r - \gamma s - \dots \\
[ab]A + [bb]B + [bc]C + \dots &= k' - \alpha q' - \beta r' - \gamma s' - \dots \\
[ac]A + [bc]B + [cc]C + \dots &= k'' - \alpha q'' - \beta r'' - \gamma s'' - \dots
\end{aligned}$$

u. s. w. worin

$$\begin{aligned}
[aa] &= pa^2 + p'a'^2 + p''a''^2 + \dots \\
[ab] &= pab + p'a'b' + p''a''b'' + \dots \\
[ac] &= pac + p'a'c' + p''a''c'' + \dots \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
[bb] &= pb^2 + p'b'^2 + p''b''^2 + \dots \\
[bc] &= pbc + p'b'c' + p''b''c'' + \dots \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
[cc] &= pc^2 + p'c'^2 + p''c''^2 + \dots \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

gesetzt sind. Es ist nun für den ferneren Verlauf der Auflösung von Vortheil die eben erhaltenen Gleichungen dergestalt in zwei Theile zu zerlegen, dass der eine Theil

$$[aa]A' + [ab]B' + [ac]C' + \dots = k$$

u. s. w. wird, aber ohne angemessene Abänderung der Coefficienten dieser Gleichungen ist dieses nicht immer möglich. Die Anzahl der Unbekannten A', B', C', etc. ist freilich immer der der Gleichungen gleich, und somit scheint es als könnten diese Unbekannten immer aus diesen Gleichungen bestimmt werden, von welchen ich die erste hier angesetzt

habe. Es ist aber zu bemerken, dass diese Gleichungen aus den einzigen (29) hervor gehen, deren Anzahl m ist, während die Anzahl der A', B', etc. $= n$ ist. In allen Fällen nun, wo $m = n$ oder $m > n$ ist, ist die Bestimmung der A', B', etc. aus den obigen Gleichungen zwar möglich, aber in den Fällen in welchen $m < n$ ist, trifft dieses nicht mehr ein, denn alsdann sind nothwendiger Weise $n - m$ dieser Gleichungen in den übrigen enthalten.

Man kann demohngeachtet die in Rede stehenden Gleichungen so vorbereiten, dass sie in jedem Falle alle wesentlich von einander verschieden werden, und zwar kann dieses durch angemessene Zuziehung der Gleichungen (39) bewirkt werden. Aus diesen bekommt man leicht

$$\begin{aligned}
0 &= [qq]A + [qq']B + [qq'']C + \ldots \\
0 &= [qq']A + [q'q']B + [q'q'']C + \ldots \\
0 &= [qq'']A + [q'q'']B + [q''q'']C + \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w. wenn man

$$\begin{aligned}
[qq] &= q^2 + r^2 + s^2 + \ldots \\
[qq'] &= qq' + rr' + ss' + \ldots \\
[qq''] &= qq'' + rr'' + ss'' + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
[q'q'] &= q'^2 + r'^2 + s'^2 + \ldots \\
[q'q''] &= q'q'' + r'r'' + s's'' + \ldots \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
[q''q''] &= q''^2 + r''^2 + s''^2 + \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w. setzt. Macht man nun

$$\begin{aligned}
(aa) &= [aa] + [qq] \\
(ab) &= [ab] + [qq'] \\
(ac) &= [ac] + [qq''] \\
&\text{etc.} \\
(bb) &= [bb] + [q'q'] \\
(bc) &= [bc] + [q'q''] \\
&\text{etc.} \\
(cc) &= [cc] + [q''q'']
\end{aligned}$$

u. s. w. so wird auch

$$\begin{aligned}
(aa)A + (ab)B + (ac)C + \ldots &= k - \alpha q - \beta r - \gamma s - \ldots \\
(ab)A + (bb)B + (bc)C + \ldots &= k' - \alpha q' - \beta r' - \gamma s' - \ldots \\
(ac)A + (bc)B + (cc)C + \ldots &= k'' - \alpha q'' - \beta r'' - \gamma s'' - \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w. aus welchen man immer, auch nachdem die mit α, β, γ, etc. multiplicirten Glieder abgeschnitten worden sind, die übrigen Unbekannten bestimmen kann. Ja es ist, um die Möglichkeit dieser Bestimmung herbei zu führen, nicht einmal nöthig alle Gleichungen (39) auf die eben erklärte Art mit den obigen Gleichungen zu verbinden, sondern die Anwendung einer Anzahl von $n-m$ der Gleichungen (39), die man beliebig unter diesen auswählen kann, reicht schon dazu aus.

35.

Setzt man jetzt

$$\left.\begin{aligned}(aa)A' + (ab)B' + (ac)C' + \ldots &= k\\ (ab)A' + (bb)B' + (bc)C' + \ldots &= k'\\ (ac)A' + (bc)B' + (cc)C' + \ldots &= k''\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (40)$$

u. s. w. und löst diese unbestimmt auf, so wird man erhalten

$$\left.\begin{aligned}A' &= (1,1)k + (1,2)k' + (1,3)k'' + \ldots\\ B' &= (1,2)k + (2,2)k' + (2,3)k'' + \ldots\\ C' &= (1,3)k + (2,3)k' + (3,3)k'' + \ldots\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (41)$$

u. s. w. und hieraus ergiebt sich in Folge der Gleichungen des vor. Art.

$$\left.\begin{aligned}A &= A' - (\alpha\eta)\alpha - (\alpha\varkappa)\beta - (\alpha\lambda)\gamma - \ldots\\ B &= B' - (\beta\eta)\alpha - (\beta\varkappa)\beta - (\beta\lambda)\gamma - \ldots\\ C &= C' - (\gamma\eta)\alpha - (\gamma\varkappa)\beta - (\gamma\lambda)\gamma - \ldots\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (42)$$

u. s. w. nachdem zur Abkürzung

$$\begin{aligned}(\alpha\eta) &= (1,1)q + (1,2)q' + (1,3)q'' + \ldots\\ (\alpha\varkappa) &= (1,1)r + (1,2)r' + (1,3)r'' + \ldots\\ (\alpha\lambda) &= (1,1)s + (1,2)s' + (1,3)s'' + \ldots\\ &\text{etc.}\\ (\beta\eta) &= (1,2)q + (2,2)q' + (2,3)q'' + \ldots\\ (\beta\varkappa) &= (1,2)r + (2,2)r' + (2,3)r'' + \ldots\\ (\beta\lambda) &= (1,2)s + (2,2)s' + (2,3)s'' + \ldots\\ &\text{etc.}\\ (\gamma\eta) &= (1,3)q + (2,3)q' + (3,3)q'' + \ldots\\ (\gamma\varkappa) &= (1,3)r + (2,3)r' + (3,3)r'' + \ldots\\ (\gamma\lambda) &= (1,3)s + (2,3)s' + (3,3)s'' + \ldots\end{aligned}$$

u. s. w. gesetzt worden ist. Multiplicirt man nun die (42) der Reihe nach erst mit q, q', q'', etc. dann mit r, r', r'', etc. dann mit s, s', s'', etc. etc.

und addirt jedes Mal, so ergeben sich in Folge der Gleichungen (39) und (41) die folgenden

$$(43) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} (\eta\eta)\alpha + (\eta\varkappa)\beta + (\eta\lambda)\gamma + \ldots = (\eta M) \\ (\eta\varkappa)\alpha + (\varkappa\varkappa)\beta + (\varkappa\lambda)\gamma + \ldots = (\varkappa M) \\ (\eta\lambda)\alpha + (\varkappa\lambda)\beta + (\lambda\lambda)\gamma + \ldots = (\lambda M) \end{cases}$$

u. s. w. wo

$$\begin{aligned} (\eta\eta) &= (\alpha\eta)q + (\beta\eta)q' + (\gamma\eta)q'' + \ldots \\ (\eta\varkappa) &= (\alpha\varkappa)q + (\beta\varkappa)q' + (\gamma\varkappa)q'' + \ldots \\ &= (\alpha\eta)r + (\beta\eta)r' + (\gamma\eta)r'' + \ldots \\ (\eta\lambda) &= (\alpha\lambda)q + (\beta\lambda)q' + (\gamma\lambda)q'' + \ldots \\ &= (\alpha\eta)s + (\beta\eta)s' + (\gamma\eta)s'' + \ldots \\ &\text{etc.} \\ (\eta M) &= (\alpha\eta)k + (\beta\eta)k' + (\gamma\varkappa)k'' + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varkappa\varkappa) &= (\alpha\varkappa)r + (\beta\varkappa)r' + (\gamma\varkappa)r'' + \ldots \\ (\varkappa\lambda) &= (\alpha\lambda)r + (\beta\lambda)r' + (\gamma\lambda)r'' + \ldots \\ &= (\alpha\varkappa)s + (\beta\varkappa)s' + (\gamma\varkappa)s'' + \ldots \\ &\text{etc.} \\ (\varkappa M) &= (\alpha\varkappa)k + (\beta\varkappa)k' + (\gamma\varkappa)k'' + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda\lambda) &= (\alpha\lambda)s + (\beta\lambda)s' + (\gamma\lambda)s'' + \ldots \\ &\text{etc.} \\ (\lambda M) &= (\alpha\lambda)k + (\beta\lambda)k' + (\gamma\lambda)k'' + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. Durch die Auflösung der Gleichungen (43) bekommt man nun immer die Werthe der Unbekannten α, β, γ, etc., und substituirt man diese nebst den Werthen von A', B', C', etc. in die (42), so ergeben sich auch die A, B, C, etc. durch bekannte Grössen ausgedrückt. Geht man hierauf zur Gleichung (33) zurück, und substituirt in diese die aus den (38) zu entnehmenden Werthe von $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, etc. so bekommt man, nachdem

$$\begin{aligned} (al) &= pal + p'a'l' + p''a''l'' + \ldots \\ (bl) &= pbl + p'b'l' + p''b''l'' + \ldots \\ (cl) &= pcl + p'c'l' + p''c''l'' + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. gesetzt worden sind,

$$\begin{aligned} \Omega = \omega + A(al) + B(bl) + C(cl) + \ldots \\ - \alpha f - \beta g - \gamma h - \ldots \end{aligned}$$

welches der wahrscheinlichste Werth von Ω ist. Multiplicirt man ferner die Gleichungen (38)mit A, A', A'', und addirt, so wird in Folge der Gleichungen (37), (39), (36) das Gewicht dieser Bestimmung

$$P = \frac{1}{Ak + Bk' + Ck'' + \ldots}$$

Hiemit ist unsere Aufgabe schon vollständig gelöst, denn nicht nur der wahrscheinlichste Werth von Ω und das Gewicht dieser Bestimmung, sondern auch die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten x, x', x'', etc. nebst ihren Gewichten sind durch die im Vorhergehenden abgeleiteten Ausdrücke gegeben, wie man weiter unten sehen wird.

36.

Man kann in Bezug auf die eben erhaltenen Ausdrücke für Ω und P noch einen Schritt weiter gehen. Eliminirt man die A, B, C, etc. durch die Gleichungen (42), und setzt

$$\begin{aligned} F &= f + (\alpha\eta)(al) + (\beta\eta)(bl) + (\gamma\eta)(cl) + \ldots \\ G &= g + (\alpha\varkappa)(al) + (\beta\varkappa)(bl) + (\gamma\varkappa)(cl) + \ldots \\ H &= h + (\alpha\lambda)(al) + (\beta\lambda)(bl) + (\gamma\lambda)(cl) + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. und hierauf

$$\begin{aligned} Y &= A'(al) + B'(bl) + C'(cl) + \ldots \\ Z &= F\alpha + G\beta + H\gamma + \ldots \end{aligned}$$

so wird

$$\Omega = \omega + Y - Z$$

Setzt man ferner

$$\begin{aligned} R &= A'k + B'k' + C'k'' + \ldots \\ S &= \alpha(\eta M) + \beta(\varkappa M) + \gamma(\lambda M) + \ldots \end{aligned}$$

so ergiebt sich

$$P = \frac{1}{R - S}$$

Für Z lässt sich noch ein anderer Ausdruck geben, der wenigstens in dem Falle, wo man die Gewichte entweder gar nicht oder doch nur wenige derselben kennen lernen will, auf eine einfachere Rechnung führt. Durch die unbestimmte Auflösung der Gleichungen (43) habe man erhalten

$$\alpha = \{1,1\}(\eta M) + \{1,2\}(\varkappa M) + \{1,3\}(\lambda M) + \ldots$$
$$\beta = \{1,2\}(\eta M) + \{2,2\}(\varkappa M) + \{2,3\}(\lambda M) + \ldots$$
$$\gamma = \{1,3\}(\eta M) + \{2,3\}(\varkappa M) + \{3,3\}(\lambda M) + \ldots$$

u. s. w. Eliminirt man hiemit α, β, γ, etc. aus dem obigen Ausdruck für Z, so wird

$$\begin{aligned} Z = & \big\{\{1,1\}F + \{1,2\}G + \{1,3\}H + \ldots\big\}(\eta M) \\ & + \big\{\{1,2\}F + \{2,2\}G + \{2,3\}H + \ldots\big\}(\varkappa M) \\ & + \big\{\{1,3\}F + \{2,3\}G + \{3,3\}H + \ldots\big\}(\lambda M) \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$(44) \quad \ldots \quad \begin{cases} (\eta\eta)\alpha_{,} + (\eta\varkappa)\beta_{,} + (\eta\lambda)\gamma_{,} + \ldots = F \\ (\eta\varkappa)\alpha_{,} + (\varkappa\varkappa)\beta_{,} + (\varkappa\lambda)\gamma_{,} + \ldots = G \\ (\eta\lambda)\alpha_{,} + (\varkappa\lambda)\beta_{,} + (\lambda\lambda)\gamma_{,} + \ldots = H \end{cases}$$

u. s. w. so bekommt man

$$Z = \alpha_{,}(\eta M) + \beta_{,}(\varkappa M) + \gamma_{,}(\lambda M) + \ldots$$

Dieser Ausdruck führt namentlich in der Anwendung unserer Aufgabe auf die Geodäsie, wie man weiter unten sehen wird, auf eine kürzere Rechnung wie jener.

37.

Zur weiteren Ausarbeitung der im Vorhergehenden enthaltenen Auflösung unserer Aufgabe ist zuerst die Auflösung der Gleichungen (40) auszuführen. Man multiplicire die erste (40) mit dem unbestimmten Factor α' und addire sie zur zweiten; man multiplicire ferner die erste mit α'', die zweite mit β'', und addire beide zur dritten; ferner die erste mit α''', die zweite mit β''', die dritte mit γ''', und addire alle diese zur vierten, u. s. w. Bestimmt man nun diese Factoren so, dass nach einander A', A' und B', A', B' und C', u. s. w. verschwinden, dann sind die (40) auf die folgende Form gebracht worden,

$$\begin{aligned} (aa)A' + (ab)B' + (ac)C' + (ad)D' + \ldots &= M = k \\ (bb,1)B' + (bc,1)C' + (bd,1)D' + \ldots &= M' \\ (cc,2)C' + (cd,2)D' + \ldots &= M'' \\ (dd,3)D' + \ldots &= M''' \\ + \ldots \quad & \quad \ldots \end{aligned}$$

und für die eingeführten Hülfsgrössen ergeben sich die folgenden Gleichungen, die zur Bestimmung derselben dienen. Die eingeführten Factoren α', α'', β'', etc. werden durch die folgenden Gleichungen bestimmt,

$$\begin{aligned}
(aa)\alpha' + (ab) &= 0 \\
\hline
(aa)\alpha'' + (ab)\beta'' + (ac) &= 0 \\
(ab)\alpha'' + (bb)\beta'' + (bc) &= 0 \\
\hline
(aa)\alpha''' + (ab)\beta''' + (ac)\gamma''' + (ad) &= 0 \\
(ab)\alpha''' + (bb)\beta''' + (bc)\gamma''' + (bd) &= 0 \\
(ac)\alpha''' + (bc)\beta''' + (cc)\gamma''' + (cd) &= 0
\end{aligned}$$

u. s. w. worauf $(bb,1)$, $(bc,1)$, etc. etc. sich durch die folgenden ergeben,

$$\begin{aligned}
(ab)\alpha' + (bb) &= (bb,1) \\
(ac)\alpha' + (bc) &= (bc,1) \\
(ad)\alpha' + (bd) &= (bd,1) \\
&\text{etc.} \\
k\alpha' + k' &= M' \\
\hline
(ac)\alpha'' + (bc)\beta'' + (cc) &= (cc,2) \\
(ad)\alpha'' + (bd)\beta'' + (cd) &= (cd,2) \\
&\text{etc.} \\
k\alpha'' + k'\beta'' + k'' &= M'' \\
\hline
(ad)\alpha''' + (bd)\beta''' + (cd)\gamma''' + (dd) &= (dd,3) \\
&\text{etc.} \\
k\alpha''' + k'\beta''' + k''\gamma''' + k''' &= M'''
\end{aligned}$$

u. s. w. Vergleicht man aber die Gleichungen zur Bestimmung von α', β'', etc. mit den (40), so wird man sogleich gewahr, dass sie sich auch auf die folgende Form bringen lassen müssen,

$$\begin{aligned}
(aa)\alpha' + (ab) &= 0 \\
\hline
(aa)\alpha'' + (ab)\beta'' + (ac) &= 0 \\
(bb,1)\beta'' + (bc,1) &= 0 \\
\hline
(aa)\alpha''' + (ab)\beta''' + (ac)\gamma''' + (ad) &= 0 \\
(bb,1)\beta''' + (bc,1)\gamma''' + (bd,1) &= 0 \\
(cc,2)\gamma''' + (cd,2) &= 0
\end{aligned}$$

u. s. w. Setzt man für einen Augenblick

$$
\begin{array}{llllll}
-y & = \chi' + \chi''\alpha' & + \chi'''\alpha'' & + \chi^{IV}\alpha''' & + \ldots \\
-y' & = \chi'' & + \chi'''\beta'' & + \chi^{IV}\beta''' & + \ldots \\
-y'' & = & \chi''' & + \chi^{IV}\gamma''' & + \ldots \\
-y''' & = & & \chi^{IV} & + \ldots \\
\text{etc.} & & & \text{etc.} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\pi & = \frac{1}{(aa)} + \frac{\alpha'^2}{(bb,1)} & + \frac{\alpha''^2}{(cc,2)} & + \frac{\alpha'''^2}{(dd,3)} & + \ldots \\
\pi' & = \phantom{\frac{1}{(aa)} +} \frac{1}{(bb,1)} & + \frac{\beta''^2}{(cc,2)} & + \frac{\beta'''^2}{(dd,3)} & + \ldots \\
\pi'' & = & \frac{1}{(cc,2)} & + \frac{\gamma'''^2}{(dd,3)} & + \ldots \\
\pi''' & = & & \frac{1}{(dd,3)} & + \ldots \\
\text{etc.} & & & \text{etc.} &
\end{array}
$$

Ich mache darauf aufmerksam, dass hierin schon die Auflösung der Aufgabe des Art. 18 u. f. vollständig enthalten ist, denn die für die allgemeine, im Art. 31 aufgestellte Aufgabe noch hinzukommenden Ausdrücke hängen alle so von den Bedingungsgleichungen ab, dass sie zugleich mit diesen wegfallen. In Betreff der Aufgabe des Art. 18 wird also

$$x = y\,, \quad x' = y'\,, \quad x'' = y''\,, \text{ etc.}$$

und die Gewichte dieser Bestimmungen werden bez.

$$\frac{1}{\pi}\,, \quad \frac{1}{\pi'}\,, \quad \frac{1}{\pi''}\,, \text{ etc.}$$

In Bezug auf die allgemeine Aufgabe können die bis jetzt zusammengestellten Ausdrücke als den ersten Theil der Auflösung betrachtet werden, und dieser Theil wird, wenn nicht $m < n$ ist, genau so ausgeführt, als wären gar keine Bedingungsgleichungen vorhanden. Wenn aber der eben erwähnte Fall eintritt, so müssen zur Bildung der Coefficienten (aa), (ab), etc. auf die eben erklärte Art wenigstens $n - m$ der Bedingungsgleichungen mit Weglassung ihrer völlig bekannten Glieder zu diesem ersten Theil der Rechnung hinzugezogen werden.

45.

Der zweite Theil der Auflösung unserer allgemeinen Aufgabe fängt mit der Berechnung der mit η, η', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. etc. bezeichneten Hülfsgrössen an, die durch die folgenden Ausdrücke erhalten werden,

u. s. w. durch welche die Unbekannten jede für sich gegeben sind. Diese Gleichungen geben ausserdem Anlass zu anderen Ausdrücken für α', β'', etc. Vergleicht man nemlich die Gleichungen, aus welchen die vorstehenden erhalten worden sind, mit denen für α', β'', etc., so lehrt der Augenschein, dass diese auch auf die folgende Form gebracht werden können,

$$\begin{aligned}
-\alpha' &= \frac{(ab)}{(aa)} \\[2ex]
-\alpha'' &= \frac{(ac)}{(aa)} + \frac{(bc,1)}{(bb,1)}\alpha' \\
-\beta'' &= \frac{(bc,1)}{(bb,1)} \\[2ex]
-\alpha''' &= \frac{(ad)}{(aa)} + \frac{(bd,1)}{(bb,1)}\alpha' + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\alpha'' \\
-\beta''' &= \frac{(bd,1)}{(bb,1)} + \frac{(cd,2)}{(cc,2)}\beta'' \\
-\gamma''' &= \frac{(cd,2)}{(cc,2)}
\end{aligned}$$

u. s. w. Endlich bekommt man aus den letzten Ausdrücken für A', B', etc. sehr leicht die Coefficienten der unbestimmten Auflösung der Gleichungen (40), denn aus der Substitution der Ausdrücke für M, M', etc. folgt sogleich

$$\begin{aligned}
(1,1) &= \frac{1}{(aa)} + \frac{\alpha'^2}{(bb,1)} + \frac{\alpha''^2}{(cc,2)} + \frac{\alpha'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
(1,2) &= \frac{\alpha'}{(bb,1)} + \frac{\alpha''\beta''}{(cc,2)} + \frac{\alpha'''\beta'''}{(dd,3)} + \ldots \\
(1,3) &= \frac{\alpha''}{(cc,2)} + \frac{\alpha'''\gamma'''}{(dd,3)} + \ldots \\
(1,4) &= \frac{\alpha'''}{(dd,3)} + \ldots \\
&\text{etc.} \\
(2,2) &= \frac{1}{(bb,1)} + \frac{\beta''^2}{(cc,2)} + \frac{\beta'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
(2,3) &= \frac{\beta''}{(cc,2)} + \frac{\beta'''\gamma'''}{(dd,3)} + \ldots \\
(2,4) &= \frac{\beta'''}{(dd,3)} + \ldots \\
&\text{etc.} \\
(3,3) &= \frac{1}{(cc,2)} + \frac{\gamma'''^2}{(dd,3)} + \ldots \\
(3,4) &= \frac{\gamma'''}{(dd,3)} + \ldots \\
&\text{etc.} \\
(4,4) &= \frac{1}{(dd,3)} + \ldots
\end{aligned}$$

u. s. w.

38.

Durch Hülfe des Inhalts des vor. Art. kann man sogleich die Auflösung der Gleichungen (43) hinschreiben. Es wird

$$\alpha = \frac{(\eta M)}{(\eta\eta)} + \frac{(\varkappa M,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}\mathfrak{a}' + \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)}\mathfrak{a}'' + \ldots$$

$$\beta = \frac{(\varkappa M,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)}\mathfrak{b}'' + \ldots$$

$$\gamma = \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

u. s. w. wo

$$-\mathfrak{a}' = \frac{(\eta\varkappa)}{(\eta\eta)}$$

$$-\mathfrak{a}'' = \frac{(\eta\lambda)}{(\eta\eta)} + \frac{(\varkappa\lambda,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}\mathfrak{a}'$$

$$-\mathfrak{b}'' = \frac{(\varkappa\lambda,1)}{(\varkappa\varkappa,1)}$$

etc.

$$(\eta\varkappa)\mathfrak{a}' + (\varkappa\varkappa) = (\varkappa\varkappa,1)$$

$$(\eta\lambda)\mathfrak{a}' + (\varkappa\lambda) = (\varkappa\lambda,1)$$

etc.

$$(\eta M)\mathfrak{a}' + (\varkappa M) = (\varkappa M,1)$$

$$(\eta\lambda)\mathfrak{a}'' + (\varkappa\lambda)\mathfrak{b}'' + (\lambda\lambda) = (\lambda\lambda,2)$$

etc.

$$(\eta M)\mathfrak{a}'' + (\varkappa M)\mathfrak{b}'' + (\lambda M) = (\lambda M,2)$$

etc.

39.

Nun lassen sich schon die Ausdrücke des Art. 36 für Ω und P auf ihre einfachste Form hinführen. Substituirt man die Ausdrücke des Art. 37 für A', B', etc. in den Ausdruck für Y, und setzt den vorstehenden Ausdrücken analog

$$(al)\alpha' + (bl) = (bl,1)$$

$$(al)\alpha'' + (bl)\beta'' + (cl) = (cl,2)$$

$$(al)\alpha''' + (bl)\beta''' + (cl)\gamma''' + (dl) = (dl,3)$$

u. s. w. so wird

$$Y = \frac{(al)}{(aa)}M + \frac{(bl,1)}{(bb,1)}M' + \frac{(cl,2)}{(cc,2)}M'' + \frac{(dl,3)}{(dd,3)}M''' + \ldots$$

und substituirt man dieselben Ausdrücke in den Ausdruck für R, so wird

$$R = \frac{M^2}{(aa)} + \frac{M'^2}{(bb,1)} + \frac{M''^2}{(cc,2)} + \frac{M'''^2}{(dd,3)} + \ldots$$

Substituirt man ferner die Ausdrücke des vor. Art. in den Ausdruck für Z, und setzt

$$Fa' + G = G'$$
$$Fa'' + Gb'' + H = H''$$

u. s. w. so bekommt man

$$Z = \frac{(\eta M)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\varkappa M,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} G' + \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \ldots$$

und die Substitution derselben in den Ausdruck für S giebt

$$S = \frac{(\eta M)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\varkappa M,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\lambda M,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

Will man den zweiten Ausdruck des Art. 36 für Z anwenden, so sind in Folge der Gleichungen (44) die folgenden Ausdrücke zu berechnen,

$$\begin{aligned} \alpha_, &= \frac{F}{(\eta\eta)} + \frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)} a' + \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)} a'' + \ldots \\ \beta_, &= \frac{G'}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)} b'' + \ldots \\ \gamma_, &= \frac{H''}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. worauf sogleich

$$Z = \alpha_,(\eta M) + \beta_,(\varkappa M) + \gamma_,(\lambda M) + \ldots$$

berechnet werden kann. Dem Vorhergehenden zufolge wird darauf

$$\Omega = \omega + Y - Z, \quad P = \frac{1}{R - S}.$$

40.

Zur Reduction der Ausdrücke der Grössen $(\alpha\eta)$, $(\beta\eta)$, etc. setze man

$$\begin{aligned} \eta &= q & \varkappa &= r \\ \eta' &= \alpha'q + q' & \varkappa' &= \alpha'r + r' \\ \eta'' &= \alpha''q + \beta''q' + q'' & \varkappa'' &= \alpha''r + \beta''r' + r'' \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

u. s. w. worauf die Substitution der Ausdrücke für (1,1), (1,2), etc. des Art. 37 in die Ausdrücke für $(\alpha\eta)$, $(\beta\eta)$, etc. des Art. 35 sogleich

$$z = \frac{(\alpha\eta)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\alpha\varkappa,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} G' + \frac{(\alpha\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \ldots$$

$$z' = \frac{(\beta\eta)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\beta\varkappa,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} G' + \frac{(\beta\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \ldots$$

$$z'' = \frac{(\gamma\eta)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\gamma\varkappa,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} G' + \frac{(\gamma\lambda,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \ldots$$

etc. etc.

$$\mu = \frac{(\alpha\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\alpha\varkappa,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\alpha\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

$$\mu' = \frac{(\beta\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\beta\varkappa,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\beta\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

$$\mu'' = \frac{(\gamma\eta)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\gamma\varkappa,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\gamma\lambda,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

etc. etc.

wodurch in Verbindung mit den Werthen des Art. 44 für y, y', etc. und π, π', etc. alle Unbekannten nebst deren Gewichte gegeben sind.

49.

Will man hingegen auf die Kenntniss der Gewichte der Unbekannten Verzicht leisten, so lässt sich die Berechnung der Werthe der Unbekannten abkürzen, indem die im vor. Art. angegebenen Rechnungen wegfallen, und die folgenden kürzeren an ihre Stelle treten. Man rechne in diesem Falle die Grössen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}''$, etc. $\mathfrak{A}''$, etc. etc. nach den folgenden Formeln, die ich für fünf Bedingungsgleichungen vollständig hinschreiben will,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}' &= \mathfrak{x}' + \mathfrak{x}^{v}\mathfrak{d}' \\
\mathfrak{B}' &= \mathfrak{x}'' + \mathfrak{x}^{v}\mathfrak{d}'' \\
\mathfrak{C}' &= \mathfrak{x}''' + \mathfrak{x}^{v}\mathfrak{d}''' \\
\mathfrak{D}' &= \mathfrak{x}^{iv} + \mathfrak{x}^{v}\mathfrak{d}^{iv} \\
\hline
\mathfrak{A}'' &= \mathfrak{A}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{c}' \\
\mathfrak{B}'' &= \mathfrak{B}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{c}'' \\
\mathfrak{C}'' &= \mathfrak{C}' + \mathfrak{D}'\mathfrak{c}''' \\
\hline
\mathfrak{A}''' &= \mathfrak{A}'' + \mathfrak{C}''\mathfrak{b}' \\
\mathfrak{B}''' &= \mathfrak{B}'' + \mathfrak{C}''\mathfrak{b}'' \\
\hline
\mathfrak{A}^{iv} &= \mathfrak{A}''' + \mathfrak{B}'''\mathfrak{a}' \\
\hline
\end{aligned}$$

und die man leicht auf jede beliebige Anzahl von Gleichungen ausdehnen kann, wenn man erwägt, dass hier $\mathfrak{x}^{v}$ für die letzte aller vorhandenen $\mathfrak{x}$, und $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$, $\mathfrak{d}'''$, $\mathfrak{d}^{iv}$ für die letzten aller vorhandenen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, etc. stehen. Da hierauf

$$\alpha_{,} = \mathfrak{A}^{IV}$$
$$\beta_{,} = \mathfrak{B}'''$$
$$\gamma_{,} = \mathfrak{C}''$$
$$\delta_{,} = \mathfrak{D}'$$
$$\varepsilon_{,} = \mathfrak{E}^{V}$$

werden, so kann man ohne weitere Hülfsgrössen schon

$$\begin{aligned} z &= (\alpha\eta)\alpha_{,} + (\alpha\varkappa)\beta_{,} + (\alpha\lambda)\gamma_{,} + \ldots \\ z' &= (\beta\eta)\alpha_{,} + (\beta\varkappa)\beta_{,} + (\beta\lambda)\gamma_{,} + \ldots \\ z'' &= (\gamma\eta)\alpha_{,} + (\gamma\varkappa)\beta_{,} + (\gamma\lambda)\gamma_{,} + \ldots \\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

berechnen.

50.

Wenn man der Kenntniss der Unbekannten nicht bedarf, sondern blos eine Function Ω derselben nebst deren Gewicht zu ermitteln hat, so erleidet das Verfahren die folgenden Abänderungen. Die Ausdrücke der Artt. 42 und 43 nebst den Ausdrücken des Art. 44 für die α'', β'', β''', etc. müssen berechnet werden. Hierauf setze man

$$\left.\begin{aligned} M &= k \\ M' &= \alpha' k + k' \\ M'' &= \alpha'' k + \beta'' k' + k'' \\ M''' &= \alpha''' k + \beta''' k' + \gamma''' k'' + k''' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (46)$$

u. s. w. worauf

$$-Y = \chi' M + \chi'' M' + \chi''' M'' + \chi^{IV} M''' + \ldots$$

und

$$R = \frac{M^2}{(aa)} + \frac{M'^2}{(bb,1)} + \frac{M''^2}{(cc,2)} + \frac{M'''^2}{(dd,3)} + \ldots \Big\} \quad . \quad (47)$$

werden, und der erste Theil der Auflösung ausgeführt ist. Es sind darauf die Ausdrücke der Artt. 45 u. 46 zu berechnen, während die der Artt. 47 u. 48 wegfallen. Statt der letzteren berechne man

$$\left.\begin{aligned} (\eta M) &= \frac{\eta M}{(aa)} + \frac{\eta' M'}{(bb,1)} + \frac{\eta'' M''}{(cc,2)} + \ldots \\ (\varkappa M) &= \frac{\varkappa M}{(aa)} + \frac{\varkappa' M'}{(bb,1)} + \frac{\varkappa'' M''}{(cc,2)} + \ldots \\ (\lambda M) &= \frac{\lambda M}{(aa)} + \frac{\lambda' M'}{(bb,1)} + \frac{\lambda'' M''}{(cc,2)} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (48)$$

u. s. w. und

$$(49) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} (\varkappa M,1) = (\varkappa M) + (\eta M)\mathfrak{a}' \\ (\lambda M,1) = (\lambda M) + (\eta M)\mathfrak{b}' \\ (\mu M,1) = (\mu M) + (\eta M)\mathfrak{c}' \\ \quad\quad \text{etc.} \\ \hline (\lambda M,2) = (\lambda M,1) + (\varkappa M,1)\mathfrak{b}'' \\ (\mu M,2) = (\mu M,1) + (\varkappa M,1)\mathfrak{c}'' \\ \quad\quad \text{etc.} \\ \hline (\mu M,3) = (\mu M,2) + (\lambda M,2)\mathfrak{c}''' \\ \quad\quad \text{etc.} \\ \hline \end{array} \right.$$

u. s. w. worauf man

$$Z = \frac{(\eta M)}{(\eta\eta)} F + \frac{(\varkappa M,1)}{(\varkappa\varkappa,1)} G' + \frac{(\lambda M,2)}{(\lambda\lambda,2)} H'' + \ldots$$

und

$$(50) \quad \ldots \quad S = \frac{(\eta M)^2}{(\eta\eta)} + \frac{(\varkappa M,1)^2}{(\varkappa\varkappa,1)} + \frac{(\lambda M,2)^2}{(\lambda\lambda,2)} + \ldots$$

erhält, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Hat man aber ausserdem auch die Werthe der Unbekannten x, x', etc. nach den obigen Ausdrücken berechnet, so ist es klar, dass man den wahrscheinlichsten Werth von Ω schon durch die Substitution dieser Werthe von x, x', etc. erhält, und in diesem Falle braucht man die vorstehenden Ausdrücke für Y und Z nicht zu berechnen. Sind die Werthe und Gewichte von mehreren Functionen zu berechnen, so müssen die in diesem Art. erklärten Rechnungen für jede dieser Functionen besonders ausgeführt werden.

51.

In Bezug auf die Ausdrücke (45) für F, G, H, etc. ist eine Bemerkung zu machen, wodurch ihre Bedeutung erklärt, und die Beweise der beiden am Ende des Art. 45 angeführten Sätze erhalten werden. Substituirt man die Ausdrücke für η, η', etc. $\varkappa$, $\varkappa'$, etc. etc. in die (45), so ergiebt sich sogleich in Folge der Ausdrücke für y, y', etc. des Art. 44 dass auch

$$\begin{aligned} F &= f + qy + q'y' + q''y'' + \ldots \\ G &= g + ry + r'y' + r''y'' + \ldots \\ H &= h + sy + s'y' + s''y'' + \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. sind, und diese Ausdrücke geben zu erkennen, dass F, G, H, etc. das Resultat der Substitution der Grössen $\xi + y$, $\xi' + y'$, etc. in die

ursprünglichen Bedingungsgleichungen sind, wenn ξ, ξ', etc. im Sinne des Art. 28 wieder aufgenommen werden. Es wird mit anderen Worten in den Bezeichnungen des Art. 28

$$\begin{aligned} \psi(\xi+y,\ \xi'+y',\ \xi''+y'',\ \text{etc.}) &= F \\ \chi(\xi+y,\ \xi'+y',\ \xi''+y'',\ \text{etc.}) &= G \\ \text{etc.} \qquad\qquad & \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Wenn man nun die Coefficienten der veränderlichen Glieder von $n-m$ Bedingungsgleichungen mit zur Berechnung der Hülfsgrössen (aa), (ab), etc. benutzt hat, so sind die Werthe von y, y', etc., die man erhält, aus einer gleichen Anzahl von linearischen Gleichungen bestimmt worden, die folglich alle durch diese Werthe von y, y', etc. vollständig erfüllt sind. Es müssen daher die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= qy + q'y' + q''y'' + \dots \\ 0 &= ry + r'y' + r''y'' + \dots \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

wenn hierunter die $n-m$ mit angewandten Bedingungsgleichungen verstanden werden, vollständig durch die erhaltenen Werthe von y, y', etc. erfüllt sein. Hiemit geben aber die obigen Gleichungen für F, G, etc. in Bezug auf diese $n-m$ Gleichungen

$$F = f, \quad G = g, \text{ etc.}$$

w. z. b. w. In jedem Falle ergeben sich aber durch die Substitution der Summen der anfänglich angenommenen Werthe der Unbekannten und der y, y', etc. in die Bedingungsgleichungen sofort die Werthe der F, G, etc. und die Berechnung der Ausdrücke (45) wird überflüssig w. z. b. w.

52.

Die vorhergehende Auflösung unserer Aufgabe zeigt schon zur Gnüge, dass den Bedingungsgleichungen (30) vollständig Gnüge geleistet worden ist, aber demungeachtet scheint es mir nicht überflüssig dieses a posteriori durch Anwendung der Function Ω auf eine derselben nachzuweisen. Da ferner diese Bedingungsgleichungen ohne Hülfe von Beobachtungen erlangt worden sind, und demzufolge gewiss sind, so muss sich dieses auch durch das Gewicht P derselben nachweisen lassen, welches in Bezug auf diese Bedingungsgleichungen unendlich gross werden muss. Sei zu dem Ende

$$\omega = f,\quad k = q,\quad k' = q',\quad k'' = q'',\ \text{etc.}$$

dann wird

$$\Omega = qx + q'x' + q''x'' + \ldots + f$$

und $\Omega = 0$ ist mit der ersten Bedingungsgleichung (30) identisch. Durch die vorstehenden Annahmen ergiebt sich

$$\begin{array}{lll} M = \eta, & M' = \eta', & M'' = \eta'',\ \text{etc.} \\ (\eta M) = (\eta\eta), & (\varkappa M) = (\eta\varkappa), & (\lambda M) = (\eta\lambda),\ \text{etc.} \\ (\varkappa M,1) = 0, & (\lambda M,2) = 0,\ \text{etc.} & \end{array}$$

womit, nach Substitution der Ausdrücke für χ', χ'', etc.

$$Y = \frac{(ab)}{(aa)}\eta + \frac{(bb,1)}{(bb,1)}\eta' + \frac{(cb,2)}{(cc,2)}\eta'' + \ldots$$
$$= F - f$$

und $Z = F$ folglich

$$\Omega = 0$$

wird, w. z. b. w. Substituirt man auch die obigen Ausdrücke für M, M', etc. in die für R und Z, so erhält man

$$R = (\eta\eta),\quad S = (\eta\eta)$$

folglich

$$P = \infty$$

w. z. b. w. Auf dieselbe Art beweist man das Erfülltsein der übrigen Gleichungen (30).

53.

Für die Summe der mit den bez. Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler lässt sich mit Benutzung des Vorhergehenden ein einfacher Ausdruck geben. Da den Gleichungen (30) vollständig Gnüge geleistet worden ist, so ist die genannte Summe, wenn sie mit W bezeichnet wird,

$$\begin{aligned} W = {} & p\{ax + bx' + cx'' + \ldots - l\}^2 \\ & + p'\{a'x + b'x' + c'x'' + \ldots - l'\}^2 \\ & + p''\{a''x + b''x' + c''x'' + \ldots - l''\}^2 \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

oder wenn man die Quadrate entwickelt,

$$\begin{aligned} W = {} & \{[aa]x + [ab]x' + [ac]x'' + \ldots - (al)\}x \\ & + \{[ab]x + [bb]x' + [bc]x'' + \ldots - (bl)\}x' \\ & + \{[ac]x + [bc]x' + [cc]x'' + \ldots - (cl)\}x'' \\ & + \text{etc.} \\ & - \{(al)x + (bl)x' + (cl)x'' + \ldots - (ll)\} \end{aligned}$$

wo die Bezeichnungen $[aa]$, $[ab]$, etc. dem Art. 34 und (al), (bl), etc. dem Art. 42 gemäss zu verstehen sind. Eliminirt man hier $[aa]$, $[ab]$, etc. vermittelst der Gleichungen

$$(aa) = [aa] + [qq]$$
$$(ab) = [ab] + [qq']$$
$$\text{etc.}$$

die im Art. 34 erklärt worden sind, und setzt

$$\begin{aligned}
W' = & \{(aa)x + (ab)x' + (ac)x'' + \ldots - (al)\}x \\
& + \{(ab)x + (bb)x' + (bc)x'' + \ldots - (bl)\}x' \\
& + \{(ac)x + (bc)x' + (cc)x'' + \ldots - (cl)\}x'' \\
& + \text{etc.} \\
& - \{(al)x + (bl)x' + (cl)x'' + \ldots - (ll)\} \\
W'' = & \{[qq]x + [qq']x' + [qq'']x'' + \ldots\}x \\
& + \{[qq']x + [q'q']x' + [q'q'']x'' + \ldots\}x' \\
& + \{[qq'']x + [q'q'']x' + [q''q'']x'' + \ldots\}x'' \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

so wird

$$W = W' - W''$$

Wenden wir uns nun zunächst zur Reduction der Function W'', so geben die Gleichungen (30) zuerst

$$\begin{aligned}
[qq]x + [qq']x' + [qq'']x'' + \ldots &= -qf - rg - sh - \ldots \\
[qq']x + [q'q']x' + [q'q'']x'' + \ldots &= -q'f - r'g - s'h - \ldots \\
[qq'']x + [q'q'']x' + [q''q'']x'' + \ldots &= -q''f - r''g - s''h - \ldots \\
\text{etc.} \qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

deren Substitution

$$\begin{aligned}
W'' = & -(qx + q'x' + q''x'' + \ldots)f \\
& -(rx + r'x' + r''x'' + \ldots)g \\
& -(sx + s'x' + s''x'' + \ldots)h \\
& - \text{etc.}
\end{aligned}$$

und in Folge der (30)

$$W'' = f^2 + g^2 + h^2 \ldots$$

giebt.

54.

Zur Reduction des Ausdrucks für W' setze man zuerst

$$k = (aa), \quad k' = (ab), \quad k'' = (ac), \text{ etc. } \omega = -(al)$$

wodurch

mit welchem man eine Anzahl von Veränderungen vornehmen kann. Seien die Gleichungen, die den (29) entsprechen, die folgenden,

$$\begin{array}{l} x + x' + x'' + x''' + x^{\text{IV}} + x^{\text{V}} = 1 \\ 2x - 3x' = 1 \\ x'' - x''' + x^{\text{IV}} - x^{\text{V}} = 2 \end{array}$$

also $a = 1$, $b = 1$, etc. $a' = 2$, $b' = -3$, etc. etc. Seien ferner die Gleichungen (30) die folgenden

$$\begin{array}{l} x + x' + x'' + 1 = 0 \\ x' - x'' + 2x''' - 3 = 0 \\ x^{\text{IV}} - x^{\text{V}} - 1 = 0 \end{array}$$

also $q = 1$, $q' = 1$, etc. $r = 0$, $r' = -1$, etc. etc. Ich habe hier die Anzahl aller Gleichungen absichtlich der Anzahl der Unbekannten gleich angenommen, um die Relationen, die daraus hervor gehen, am Beispiel zu zeigen.

Man muss nun hier bei der Berechnung der Hülfsgrössen (aa), (ab), etc. alle drei Bedingungsgleichungen auf die oben erklärte Art mit berücksichtigen, denn es ist hier $n = 6$, $m = 3$, folglich $n - m = 3$. Setzt man der Einfachheit wegen das Gewicht einer jeden der drei ersten Gleichungen $= 1$, so bekommt man durch die Ausdrücke des Art. 42

$(aa) = 6$,	$(ab) = -4$,	$(ac) = 2$,	$(ad) = 1$,	$(ae) = 1$,	$(af) = 1$,	$(al) = 3$
	$(bb) = 12$,	$(bc) = 1$,	$(bd) = 3$,	$(be) = 1$,	$(bf) = 1$,	$(bl) = -2$
		$(cc) = 4$,	$(cd) = -2$,	$(ce) = 2$,	$(cf) = 0$,	$(cl) = 3$
			$(dd) = 6$,	$(de) = 0$,	$(df) = 2$,	$(dl) = -1$
				$(ee) = 3$,	$(ef) = -1$,	$(el) = 3$
					$(ff) = 3$,	$(fl) = -1$
						$(ll) = 6$

und hiemit durch Art. 43

$(bb,1)$ 9.3333,	$(bc,1)$ 2.3333,	$(bd,1)$ 3.6667,	$(be,1)$ 1.1667,	$(bf,1)$ 1.1667,	$(bl,1)$ 0
	$(cc,2)$ 2.7500,	$(cd,2)$ −3.2500,	$(ce,2)$ 1.2500,	$(cf,2)$ −0.7500,	$(cl,2)$ 2
		$(dd,3)$ 0.55195,	$(de,3)$ 0.65585,	$(df,3)$ 0.29221,	$(dl,3)$ 0.86364
			$(ee,4)$ 1.18822,	$(ef,4)$ −1.47060,	$(el,4)$ 0.56470
				$(ff,5)$ 0.35638,	$(fl,5)$ −0.71287
					$(ll,6)$ −0.0002

Es muss hier strenge $(ll,6) = 0$ werden, die nicht vollständige Erfüllung dieser Gleichung durch die vorstehende Rechnung rührt blos von den Fehlern der letzten angewandten Decimale her. Diese Gleichung würde vollständig erfüllt werden, wenn man sich erlauben wollte $(ff,5) = 0.35644$ statt $= 0.35638$ zu setzen. Da diese Rechnung zugleich gegeben hat

α'	β'	γ'	δ'	ε'	χ'
9.82391,	9.52288n,	9.22185n,	9.22185n,	9.22185n,	9.69897n
	β''	γ''	δ''	ε''	χ''
	9.39793n,	9.59423n,	9.25181n,	9.25181n,	$-\infty$
		γ'''	δ'''	ε'''	χ'''
		0.07255,	9.65758n,	9.43573n,	9.86170n
			δ^{IV}	ε^{IV}	χ^{IV}
			0.07491n,	9.72380n,	0.19443n
				ε^{V}	χ^{V}
				0.09260,	9.67694n
					χ^{VI}
					0.30108

wo die Logarithmen statt der Zahlen angesetzt worden sind, so giebt der Art. 44 zuerst

α''	α'''	α^{IV}	α^{V}
9.69897n,	0.00838n,	0.06191,	0.18890
	β'''	β^{IV}	β^{V}
	9.83778n,	9.87684,	0.02107
		γ^{IV}	γ^{V}
		0.26930n,	0.42388n
			δ^{V}
			0.30110n

und hierauf

$$\begin{aligned} y &= -4.0001 & \pi &= 10.0045 \\ y' &= -3.0000 & \pi' &= 4.5573 \\ y'' &= +7.0000 & \pi'' &= 25.5651 \\ y''' &= +5.0000 & \pi''' &= 14.2278 \\ y^{IV} &= -2.0000 & \pi^{IV} &= 5.1406 \\ y^{V} &= -2.0000 & \pi^{V} &= 2.8058 \end{aligned}$$

mit welchem man eine Anzahl von V
Seien die Gleichungen, die den (29) ent

$$x + x' + x'' + x''' +$$
$$2x - 3x'$$
$$x'' - x''' +$$

also $a = 1$, $b = 1$, etc. $a' = 2$, $b' =$
Gleichungen (30) die folgenden

$$x + x' + x''$$
$$x' - x'' + 2x'''$$
$$x$$

also $q = 1$, $q' = 1$, etc. $r = 0$, $r' = -1$,
aller Gleichungen absichtlich der Anzah
nommen, um die Relationen, die daraus he

Man muss nun hier bei der Berech
etc. alle drei Bedingungsgleichungen a
rücksichtigen, denn es ist hier $n =$
Setzt man der Einfachheit wegen das
Gleichungen $= 1$, so bekommt man

$(aa) = 6$, $(ab) = -4$, $(ac) = 2$, $(ad) =$
$(bb) = 12$, $(bc) = 1$, $(bd) =$
$(cc) = 4$, $(cd) =$
$(dd) =$

und hiemit durch Art. 43

$(bb,1)$	$(bc,1)$	$(bd,1)$
9.3333,	2.3333,	3.666
	$(cc,2)$	$(cd,2)$
	2.7500,	—3.25
		$(dd,$
		0.5

und wenn man die letzte Decimale ausgleicht

$$
\begin{array}{llll}
z = 2.0000 & \mu = 6.0000 \\
z' = 1.3333 & \mu' = 2.6667 \\
z'' = -2.3333 & \mu'' = 14.3333 \\
z''' = -3.3333 & \mu''' = 8.6667 \\
z^{IV} = +0.6667 & \mu^{IV} = 3.5000 \\
z^{V} = +1.6667 & \mu^{V} = 1.1667
\end{array}
$$

Es wird daher schliesslich

$$
\begin{array}{lll}
x = -6 & \text{mit dem Gewicht} & = 0.250 \\
x' = -4.3333 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & = 0.529 \\
x'' = +9.3333 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & = 0.089 \\
x''' = +8.3333 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & = 0.180 \\
x^{IV} = -2.6667 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & = 0.610 \\
x^{V} = -3.6667 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} & = 0.610
\end{array}
$$

Löst man die gegebenen sechs Gleichungen auf gewöhnliche Art auf, welches wegen der einfachen Coefficienten in diesem Falle leicht zu bewirken ist, so bekommt man dieselben Werthe der Unbekannten wieder. Die Gewichte habe ich mit berechnet, weil sie in der That im gegenwärtigen Falle dieselbe Bedeutung haben, wie in dem Falle, wo die Anzahl der Gleichungen grösser ist wie die der Unbekannten. Giebt man den ursprünglichen Gleichungen andere Gewichte, wie die, welche oben angenommen wurden, so wird man im gegenwärtigen Falle zwar immer dieselben Werthe der Unbekannten wieder erhalten, aber die Gewichte werden andere Werthe bekommen. Wenn man im Gegentheil in den Fällen, wo die Anzahl der Gleichungen grösser ist wie die der Unbekannten, die Gewichte der Gleichungen ändert, so werden sich nicht nur die Gewichte der Unbekannten, sondern auch die Werthe derselben ändern.

Da im gegenwärtigen Falle die Summe der Fehlerquadrate $= 0$ werden muss, so muss sich dieses auch durch die Werthe von W' und W'' des Art. 54 aussprechen. Man findet in der That durch die dortigen Ausdrücke

$$W' = W'' = 11$$

folglich $W = 0$.

57.

Es soll nun das vorhergehende Beispiel in soweit abgeändert werden, dass wir die letzte Unbekannte uns wegdenken, und daher die folgenden Gleichungen aufzulösen haben,

$$\begin{array}{ll} x + x' + x'' + x''' + x^{IV} & = 1 \\ 2x - 3x' & = 1 \\ x'' - x''' + x^{IV} & = 2 \\ \hline x + x' + x'' \quad +1 & = 0 \\ x' - x'' + 2x''' \quad -3 & = 0 \\ x^{IV} \quad -1 & = 0 \end{array}$$

Hier ist also die Zahl der Gleichungen um Eins grösser wie die der Unbekannten, und dieses Beispiel hat das Eigenthümliche, dass man aus den Gleichungen sogleich erkennt, dass der Werth $x^{IV} = 1$ mit unendlich grossem Gewicht daraus hervorgehen muss. Man könnte x^{IV} sogleich eliminiren, allein um zu zeigen, dass die allgemeine Auflösung die genannten Werthe für x^{IV} und dessen Gewicht giebt, werde ich diese Elimination nicht ausführen. Setzen wir nun wieder das Gewicht einer jeden der drei ersten Gleichungen $= 1$, so ist die Auflösung durch Hülfe der im vorhergehenden Beispiel erhaltenen Werthe der Hülfsgrössen leicht auszuführen. Die (aa), (ab), etc. $(bb,1)$, etc. behalten dieselben Werthe, nur müssen von denselben alle, die in ihrer Bezeichnung den Buchstaben f enthalten, weggelassen werden. Die Grösse $(ll,6)$ fällt auch weg, und an deren Stelle tritt

$$(ll,5) = 1.4257$$

ein. Von den mit α, β, etc. bezeichneten Hülfsgrössen fallen sowohl die ε, wie die welche den Index fünf haben, mit Ausnahme von χ^{V} weg, endlich fällt auch χ^{IV} weg. Man erhält daher sogleich

$$\begin{array}{llll} y = -0.9107 & \pi = 3.3078 \\ y' = -0.9009 & \pi' = 1.4656 \\ y'' = +1.6930 & \pi'' = 5.8036 \\ y''' = +1.0000 & \pi''' = 3.0008 \\ y^{IV} = +0.4752 & \pi^{IV} = 0.8417 \end{array}$$

Für den zweiten Theil der Auflösung bleiben nun die η, $\varkappa$, λ dieselben mit der Ausnahme, dass wieder η^{V}, $\varkappa^{V}$, λ^{V} wegfallen, und es werden daher hier

$$F = +0.88113\,,\quad G = -3{,}59404\,,\quad H = -0.52476\,\text{*)}$$

$$(\eta\eta) = +0.99014\,,\quad (\varkappa\varkappa) = 0.75248\,,\quad (\lambda\lambda) = 0.84174$$
$$(\eta\varkappa) = -0.04952\,,\quad (\varkappa\lambda) = +0.19802\,,$$
$$(\eta\lambda) = +0.03971\,,$$

woraus durch die Ausdrücke des Art. 46 die folgenden hervor gehen,

$$(\varkappa\varkappa,1) = 0.75000\,,\quad (\lambda\lambda,2) = 0.78681\,,\quad R''' = 17.778$$
$$(\varkappa\lambda,1) = +0.20001\,,\quad H'' = +0.38660\,,$$
$$G' = -3.54997\,,$$
$$\mathfrak{a}' = (8.69908)\,,\quad \mathfrak{b}' = -(8.60320)\,,\quad \mathfrak{c}' = (9.94934)$$
$$\mathfrak{b}'' = -(9.42599)\,,\quad \mathfrak{c}'' = -(0.67517)$$
$$\mathfrak{c}''' = (9.69141)$$

wo die Logarithmen statt der Zahlen angesetzt sind. Man bekommt ferner

$$(\alpha\eta) = +1.25763\,,\quad (\alpha\varkappa) = +0.28711\,,\quad (\alpha\lambda) = +0.97068$$
$$(\beta\eta) = +0.84172\,,\quad (\beta\varkappa) = +0{,}20790\,,\quad (\beta\lambda) = +0.63390$$
$$(\gamma\eta) = -1.10921\,,\quad (\gamma\varkappa) = -0.54455\,,\quad (\gamma\lambda) = -1.56490$$
$$(\delta\eta) = -1.00022\,,\quad (\delta\varkappa) = 0\,,\quad (\delta\lambda) = -1.00015$$
$$(\varepsilon\eta) = +0.03971\,,\quad (\varepsilon\varkappa) = +0.19802\,,\quad (\varepsilon\lambda) = +0.84174$$

$$(\alpha\varkappa,1) = +0.35001\,,\quad (\alpha\lambda,2) = +0.82690$$
$$(\beta\varkappa,1) = +0.25000\,,\quad (\beta\lambda,2) = +0.53347$$
$$(\gamma\varkappa,1) = -0.60002\,,\quad (\gamma\lambda,2) = -1.36041$$
$$(\delta\varkappa,1) = -0.05002\,,\quad (\delta\lambda,2) = -0.94669$$
$$(\varepsilon\varkappa,1) = +0.20001\,,\quad (\varepsilon\lambda,2) = +0.78681$$

und hiemit

$$z = -0.1313 \qquad \mu = 2.6296$$
$$z' = -0.1721 \qquad \mu' = 1.1605$$
$$z'' = +1.1845 \qquad \mu'' = 4.0748$$
$$z''' = -1.1185 \qquad \mu''' = 2.1527$$
$$z^{IV} = -0.5248 \qquad \mu^{IV} = 0.8417$$

woraus

$x = -0.7794$ mit dem Gewicht $= 1.475$
$x' = -0.7288$ » » » $= 3.278$
$x'' = +0.5085$ » » » $= 0.578$
$x''' = +2.1185$ » » » $= 1.179$
$x^{IV} = +1.0000$ » » » $= \infty$

---

*) Da hier $n - m = 2$, aber demungeachtet alle drei Bedingungsgleichungen mit zur Berechnung von (aa), (ab), etc. gezogen worden sind, so können nicht mehr $F = f$, etc. werden. Auf die Werthe der Unbekannten und ihrer Gewichte ist dieses ganz ohne Einfluss.

hervorgehen. Es ist also, wie voraus gesehen wurde, $x^{iv} = 1$ mit unendlich grossem Gewicht aus der Rechnung hervorgegangen.

Die Ausdrücke des Art. 54 geben jetzt für die Summe der Fehlerquadrate

$$W' = 19{,}204\,, \quad W'' = 11$$

womit

$$W = 8{,}204$$

wird.

58.

Man kann dieses Beispiel auch durch das Verfahren des Art. 29 behandeln, und muss dieselben Resultate erhalten. Die gegebenen Gleichungen führe ich zu diesem Zwecke wieder an

$$\begin{array}{l}
x + x' + x'' + x''' + x^{iv} = 1 \\
2x - 3x' = 1 \\
x'' - x''' + x^{iv} = 2 \\
\hline
x + x' + x'' + 1 = 0 \\
x' - x'' + 2x''' - 3 = 0 \\
x^{iv} - 1 = 0
\end{array}$$

Zur Elimination eignen sich hier x, x', x^{iv}, und diese sind es daher, die man unter den a. a. O. mit $x_{\prime}$, $x_{\prime\prime}$, $x_{\prime\prime\prime}$ bezeichneten Unbekannten verstehen muss. Die vorstehenden Bedingungsgleichungen geben nun

$$\begin{aligned}
x &= -2x'' + 2x''' - 4 \\
x' &= x'' - 2x''' + 3 \\
x^{iv} &= 1
\end{aligned}$$

und die drei ersten Gleichungen werden nach der Elimination dieser

$$\begin{aligned}
x''' &= 1 \\
-7x'' + 10x''' &= 18 \\
x'' - x''' &= 1
\end{aligned}$$

Zufolge der Bezeichnungen des Art. 29 ist also jetzt

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{a} = 0\,, & \mathfrak{b} = 1\,, & \mathfrak{n} = 1 \\
\mathfrak{a}' = -7\,, & \mathfrak{b}' = 10\,, & \mathfrak{n}' = 18 \\
\mathfrak{a}'' = 1\,, & \mathfrak{b}'' = -1\,, & \mathfrak{n}'' = 1
\end{array}$$

und hiemit werden, da fortwährend $p = p' = p'' = 1$ sind,

$$(\mathfrak{aa}) = 50\,,\quad (\mathfrak{ab}) = -71\,,\quad (\mathfrak{an}) = -125$$
$$(\mathfrak{bb}) = 102\,,\quad (\mathfrak{bn}) = 180$$

weshalb die aufzulösenden Gleichungen

$$50x'' - 71x''' = -125$$
$$-71x'' + 102x''' = 180$$

sind. Löst man diese unbestimmt auf, indem man die rechten Seiten derselben bez. mit α und β bezeichnet, so bekommt man

$$x'' = \frac{102}{59}\alpha + \frac{71}{59}\beta$$
$$x''' = \frac{71}{59}\alpha + \frac{50}{59}\beta$$

und es wird also in der Bezeichnung des Art. 30

$$(I,I) = \frac{102}{59}\,,\quad (I,II) = \frac{71}{59}$$
$$(II,II) = \frac{50}{59}$$

Die vorstehenden Gleichungen geben nun

$$x'' = \frac{80}{59} \text{ mit dem Gewicht } = \frac{59}{102}$$
$$x''' = \frac{125}{59} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = \frac{59}{50}$$

und substituirt man diese Werthe von x'' und x''' in die obigen Gleichungen für x, x', x^{IV}, so ergiebt sich

$$x = -\frac{46}{59}\,,\quad x' = -\frac{48}{59}\,,\quad x^{IV} = 1$$

Für die Gewichte dieser drei Bestimmungen erhält man durch Vergleichung der Gleichungen (26) mit den obigen für x, x', x^{IV} zuerst

$$\mu = -2\,,\quad \nu = +2$$
$$\mu' = +1\,,\quad \nu' = -2$$
$$\mu'' = 0\,,\quad \nu'' = 0$$

es wird also zufolge des Art. 30

$$\frac{1}{P} = 4(I,I) - 8(I,II) + 4(II,II)$$
$$\frac{1}{P'} = (I,I) - 4(I,II) + 4(II,II)$$
$$\frac{1}{P^{IV}} = 0$$

und nach der Substitution

$$P = \frac{59}{40}\,,\quad P' = \frac{59}{48}\,,\quad P^{IV} = \infty$$

Verwandelt man die hier in rationalen Brüchen gefundenen Resultate in Decimalbrüche, so wird man mit den Resultaten des vor. Art. vollständige Uebereinstimmung finden.

Substituirt man die hier erhaltenen Werthe der Unbekannten in die drei ersten der gegebenen Gleichungen, so sind die übrig bleibenden Fehler

$$+\frac{66}{59}, \quad -\frac{22}{59}, \quad -\frac{154}{59}$$

und folglich die Summe ihrer Ausdrücke, oder

$$W = \frac{28556}{(59)^2} = 8.203$$

auch mit dem vor. Art. übereinstimmend.

59.

Das Beispiel soll noch so geändert werden, dass ausser x^{v} auch x^{iv} und x''' weggelassen werden. Die gegebenen Gleichungen sind also jetzt

$$\begin{aligned} x + x' + x'' &= 1 \\ 2x - 3x' &= 1 \\ x'' &= 2 \\ \hline x + x' + x'' + 1 &= 0 \\ x' - x'' - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Da hier $m = n$ ist, so können die Hülfsgrössen (aa), (ab), etc. ohne Zuziehung der Coefficienten der Bedingungsgleichungen berechnet werden, aber die Zuziehung dieser letzteren kann das Resultat nicht im Geringsten ändern, und um dieses zu zeigen soll hier die Auflösung auf beide Arten durchgeführt werden. Ziehen wir nun zuerst die Coefficienten der Bedingungsgleichungen hinzu, so bleiben die ersten Hülfsgrössen dieselben wie vorher, und können aus dem Vorhergehenden entnommen werden; sie sollen zu mehrerer Deutlichkeit hier wiederholt werden.

$$\begin{array}{llll} (aa) = 6\,, & (ab) = -4\,, & (ac) = 2\,, & (al) = 3 \\ & (bb) = 12\,, & (bc) = 1\,, & (bl) = -2 \\ & & (cc) = 4\,, & (cl) = 3 \\ & & & (ll) = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (bb,1) = 9.3333\,, & (bc,1) = 2.3333\,, & (bl,1) = 0 \\ & (cc,2) = 2.7500\,, & (cl,2) = 2 \\ & & (ll,3) = 3.0454 \end{array}$$

$$\alpha' = (9.82391)\,,\quad \beta' = -(9.52288)\,,\quad \gamma' = -(9.69897)$$
$$\beta'' = -(9.39793)\,,\quad \gamma'' = 0$$
$$\gamma''' = -(9.68170)$$
$$\alpha'' = -(9.69897)$$

woraus

$$\eta = +0.1364 \qquad \pi = 0.3052$$
$$\eta' = -0.1818 \qquad \pi' = 0.1299$$
$$\eta'' = +0.7273 \qquad \pi'' = 0.3637$$

folgen. Ferner werden

$$y = 1\;, \qquad \varkappa = 0$$
$$y' = 1.6667\;, \qquad \varkappa' = 1$$
$$y'' = 0.2500\;, \qquad \varkappa'' = -1.2500$$
$$F = +1.6818\;, \qquad G = -3.9091$$

$$(\eta\eta) = 0.48701\;, \quad (\eta\varkappa) = 0.06493$$
$$(\varkappa\varkappa) = 0.67533$$
$$(\varkappa\varkappa,1) = 0.66667\;, \quad R' = +5.808$$
$$R'' = 31.435$$
$$\mathfrak{a}' = -(9.12491)\;, \quad \mathfrak{x}' = (0.53824)$$
$$\mathfrak{x}'' = -(0.79239)$$

$$(\alpha\eta) = 0.24025\;, \quad (\alpha\varkappa) = 0.29870$$
$$(\beta\eta) = 0.15584\;, \quad (\beta\varkappa) = 0.22077$$
$$(\gamma\eta) = 0.09091\;, \quad (\gamma\varkappa) = -0.45455$$

$$(\alpha\varkappa,1) = 0.26667$$
$$(\beta\varkappa,1) = 0.20000$$
$$(\gamma\varkappa,1) = -0.46667$$

woraus

$$z = -0.8237 \qquad \mu = 0.2252$$
$$z' = -0.7018 \qquad \mu' = 0.1099$$
$$z'' = 3.2073 \qquad \mu'' = 0.3437$$

und

$x = 0.9601$ mit dem Gewicht $= 12.50$

$x' = 0.5200$ » » » $= 50.00$

$x'' = -2.4800$ » » » $= 50.00$

hervor gehen. Es wird ausserdem

$$W' = 34.480\;, \quad W'' = 10$$

woraus man

$$W' = 24.480$$

bekommt.

60.

Nehmen wir nun wieder dieselben Gleichungen vor, nemlich

$$\begin{aligned} x + x' + x'' &= 1 \\ 2x - 3x' &= 1 \\ x'' &= 2 \\ \hline x + x' + x'' + 1 &= 0 \\ x' - x'' - 3 &= 0 \end{aligned}$$

und lassen bei der Berechnung der Hülfsgrössen (aa), (ab), etc. die Coefficienten der Bedingungsgleichungen weg. Hiemit werden

$$\begin{array}{llll} (aa) = 5\,, & (ab) = -5\,, & (ac) = 1\,, & (al) = 3 \\ & (bb) = 10\,, & (bc) = 1\,, & (bl) = -2 \\ & & (cc) = 2\,, & (cl) = 3 \\ & & & (ll) = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} (bb,1) = 5\,, & (bc,1) = 2\,, & (bl,1) = 1 \\ & (cc,2) = 1\,, & (cl,2) = 2 \\ & & (ll,3) = 0 \end{array}$$

$$\alpha' = 1\,, \quad \beta' = -\frac{1}{5}\,, \quad \alpha'' = -\frac{3}{5}\,, \quad \beta'' = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{array}{ll} y = -\frac{2}{5} & \pi = \frac{19}{25} \\ y' = -\frac{3}{5} & \pi' = \frac{9}{25} \\ y'' = 2 & \pi'' = 1 \end{array}$$

ferner

$$\begin{array}{ll} \eta = 1\,, & \varkappa = 0 \\ \eta' = 2\,, & \varkappa' = 1 \\ \eta'' = 0\,, & \varkappa'' = -\frac{7}{5} \end{array}$$

$$(\eta\eta) = 1\,, \quad (\eta\varkappa) = \frac{2}{5}\,, \quad F = 2$$

$$(\varkappa\varkappa) = \frac{54}{25}\,, \quad G = -\frac{28}{5}$$

$$(\varkappa\varkappa,1) = 2\,, \quad G' = -\frac{32}{5}$$

$$R'' = \frac{612}{25}$$

$$\mathfrak{a}' = -\frac{2}{5}\,, \quad \mathfrak{x}' = 2\,, \quad \mathfrak{x}'' = -\frac{16}{5}$$

Ferner

$$(\alpha\eta) = \frac{2}{5}, \ (\alpha\varkappa) = \frac{26}{25}, \ (\alpha\varkappa,1) = \frac{4}{5}$$
$$(\beta\eta) = \frac{2}{5}, \ (\beta\varkappa) = \frac{19}{25}, \ (\beta\varkappa,1) = \frac{2}{5}$$
$$(\gamma\eta) = 0, \ (\gamma\varkappa) = -\frac{7}{5}, \ (\gamma\varkappa,1) = -\frac{7}{5}$$

$$z = -\frac{34}{25}, \quad \mu = \frac{17}{25}$$
$$z' = -\frac{28}{25}, \quad \mu' = \frac{17}{50}$$
$$z'' = \frac{112}{25}, \quad \mu'' = \frac{49}{50}$$

also

$$x = \frac{24}{25} \text{ mit dem Gewicht } = \frac{25}{2}$$
$$x' = \frac{12}{25} \quad » \quad » \quad » \quad = 50$$
$$x'' = -\frac{62}{25} \quad » \quad » \quad » \quad = 50$$
$$W = W' = \frac{612}{25}$$

mit den im vor. Art. erhaltenen Resultaten völlig übereinstimmend.

61.

In dem eben behandelten Beispiel findet noch ein Umstand statt, welcher Beachtung verdient. Die erste durch Beobachtungen gegebene Gleichung ist, abgesehen vom völlig bekannten Gliede, mit der ersten Bedingungsgleichung identisch, so dass in der That von den fünf gegebenen Gleichungen nur vier von einander wesentlich verschieden sind. Es ist von Interesse, zu erfahren welchen Einfluss dieser Umstand auf das Resultat hat, und diesen zeigt die Methode des Art. 29 am Einfachsten, weshalb ich dasselbe Beispiel auch nach dieser Methode behandeln werde. Die Gleichungen sind wieder

$$\begin{aligned} x + x' + x'' &= 1 \\ 2x - 3x' &= 1 \\ x'' &= 2 \\ \hline x + x' + x'' + 1 &= 0 \\ x' - x'' - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichungen geben

$$x = -2x'' - 4$$
$$x' = x'' + 3$$

Eliminirt man hiemit x und x' aus den drei ersten, so bekommt man

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \\ -7x'' &= 18 \\ x'' &= 2 \end{aligned}$$

folglich nachdem man mit den Coefficienten von x'' multiplicirt, und addirt hat,

$$x'' = -\frac{62}{25}$$

und durch die Substitution dieses Werthes in die Gleichungen für x und x'

$$x = \frac{24}{25}, \quad x' = \frac{12}{25}$$

mit den vorher erhaltenen Werthen identisch, und dasselbe findet man auch in Bezug auf die Gewichte. Man erkennt aus dieser Auflösung, dass die Methode von selbst die Gleichung, die in den übrigen enthalten ist, ausschliesst und unberücksichtigt lässt, und so wird es in allen ähnlichen Fällen stattfinden. Nehmen wir um einen zusammengesetzteren Fall herbei zu führen

$$x + 3x' - x'' = 5$$

statt der vorherigen ersten Gleichung an, so findet sich durch die Elimination

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ -7x'' &= 18 \\ x'' &= 2 \end{aligned}$$

woraus wieder für die Unbekannten und deren Gewichte dieselben Werthe hervorgehen wie vorher. Die obige Gleichung, deren Wirkung durch die Methode annullirt worden ist, ist wieder in den beiden Bedingungsgleichungen enthalten, und entsteht, wenn man das Doppelte der zweiten zur ersten addirt.

62.

Dass auch die zweite Methode dieselbe Eigenschaft besitzt, lässt sich leicht dadurch zeigen, dass man sie mit Weglassung der ersten gegebenen Gleichung auf die übrigen anwendet. Seien daher jetzt

$$\begin{aligned} 2x - 3x' \qquad &= 1 \\ x'' &= 2 \\ \hline x + x' + x'' + 1 &= 0 \\ x' - x'' - 3 &= 0 \end{aligned}$$

durch diese Methode zu behandeln. Hier wird, wenn man die erste Bedingungsgleichung zur Bildung der ersten Hülfsgrössen zuzieht, da jetzt $n - m = 1$ ist,

$$\begin{array}{llll}
(aa) = 5\,, & (ab) = -5\,, & (ac) = 1\,, & (al) = 2 \\
 & (bb) = 10\,, & (bc) = 1\,, & (bl) = -2 \\
 & & (cc) = 2\,, & (cl) = 2 \\
 & & & (ll) = 5
\end{array}$$

wo blos die Grössen die l enthalten von denen des Art. 60 verschieden sind. Ferner

$$\begin{array}{lll}
(bb,1) = 5\,, & (bc,1) = 2\,, & (bl,1) = -1 \\
 & (cc,2) = 1\,, & (cl,2) = 2 \\
 & & (ll,3) = 0
\end{array}$$

$$\alpha' = 1\,,\quad \beta' = -\frac{1}{5}\,,\quad \beta'' = -\frac{2}{5}\,,\quad \alpha'' = -\frac{3}{5}$$

wo alle Grössen mit denen des Art. 60 übereinstimmen. Hieraus folgt

$$\begin{array}{ll}
y = -1 & \pi = \frac{19}{25} \\
y' = -1 & \pi' = \frac{9}{25}. \\
y'' = 2 & \pi'' = 1
\end{array}$$

wo wieder die π mit dem Art. 60 übereinstimmen. Ferner

$$\begin{array}{ll}
\eta = 1 & \varkappa = 0 \\
\eta' = 2 & \varkappa' = 1 \\
\eta'' = 0 & \varkappa'' = -\frac{7}{5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
(\eta\eta) = 1\,, & (\eta\varkappa) = \frac{2}{5}\,, & F = 1 \\
 & (\varkappa\varkappa) = \frac{54}{25}\,, & G = -6 \\
(\varkappa\varkappa,1) = 2\,, & G' = -\frac{32}{5} & \\
 & R'' = \frac{587}{25} &
\end{array}$$

$$\mathfrak{a}' = -\frac{2}{5}\,,\quad \mathfrak{c}' = 1\,,\quad \mathfrak{c}'' = -\frac{16}{5}$$

ferner

$$\begin{array}{lll}
(\alpha\eta) = \frac{3}{5}\,, & (\alpha\varkappa) = \frac{26}{25}\,, & (\alpha\varkappa,1) = \frac{4}{5} \\
(\beta\eta) = \frac{2}{5}\,, & (\beta\varkappa) = \frac{19}{25}\,, & (\beta\varkappa,1) = \frac{3}{5} \\
(\gamma\eta) = 0\,, & (\gamma\varkappa) = -\frac{7}{5}\,, & (\gamma\varkappa,1) = -\frac{7}{5}
\end{array}$$

wie im Art. 60, mit Ausnahme von F, G, und den davon abhängigen Grössen. Hiemit werden

$$z = -\frac{49}{25} \qquad \mu = \frac{47}{25}$$
$$z' = -\frac{88}{25} \qquad \mu' = \frac{47}{50}$$
$$z'' = \frac{112}{25} \qquad \mu'' = \frac{49}{50}$$

woraus wieder dieselben Werthe der Unbekannten und der Gewichte derselben hervorgehen wie vorher. Die Summe der Fehlerquadrate wird jetzt etwas anders, weil die weggelassene erste Gleichung nicht mehr mitzählt. Man bekommt

$$W' = \frac{587}{25}\,, \quad W'' = 1$$

woraus

$$W = \frac{612}{25}$$

folgt.

63.

Um das Beispiel möglichst zu erschöpfen will ich schliesslich dieselben Gleichungen wieder mit der Veränderung vornehmen, dass die zweite Bedingungsgleichung mit zur Berechnung der (aa), (ab), etc. gezogen werden soll. Hiemit wird

$$(aa) = 4\,,\quad (ab) = -6\,,\quad (ac) = 0\,,\quad (al) = 2$$
$$(bb) = 10\,,\quad (bc) = -1\,,\quad (bl) = -3$$
$$(cc) = 2\,,\quad (cl) = 2$$
$$(ll) = 5$$
$$(bb,1) = 1\,,\quad (bc,1) = -1\,,\quad (bl,1) = 0$$
$$(cc,2) = 1\,,\quad (cl,2) = 2$$
$$(ll,3) = 0$$
$$\alpha' = \frac{3}{2}\,,\quad \beta' = 0\,,\quad \beta'' = 1\,,\quad \alpha'' = \frac{3}{2}$$

woraus

$$y = \frac{7}{2} \qquad \pi = \frac{19}{4}$$
$$y' = 2 \qquad \pi' = 2$$
$$y'' = 2 \qquad \pi'' = 1$$

folgen. Ferner

$$\eta = 1 \qquad \varkappa = 0$$
$$\eta' = \frac{5}{2} \qquad \varkappa' = 1$$
$$\eta'' = \frac{7}{2} \qquad \varkappa'' = 0$$

$$(\eta\eta) = \frac{75}{4}, \quad (\eta\varkappa) = \frac{5}{2}, \quad F = \frac{17}{2}$$
$$(\varkappa\varkappa) = 1, \quad G = -3$$
$$(\varkappa\varkappa,1) = \frac{2}{3}, \quad G' = -\frac{62}{15}$$
$$R'' = \frac{287}{25}$$
$$\mathfrak{a}' = -\frac{2}{15}, \quad \mathfrak{z}' = \frac{34}{75}, \quad \mathfrak{z}'' = -\frac{31}{5}$$
$$(\alpha\eta) = \frac{37}{4}, \quad (\alpha\varkappa) = \frac{3}{2}, \quad (\alpha\varkappa,1) = \frac{4}{15}$$
$$(\beta\eta) = 6, \quad (\beta\varkappa) = 1, \quad (\beta\varkappa,1) = \frac{1}{5}$$
$$(\gamma\eta) = \frac{7}{2}, \quad (\gamma\varkappa) = 0, \quad (\gamma\varkappa,1) = -\frac{7}{15}$$
$$z = \frac{127}{50} \qquad \mu = \frac{467}{100}$$
$$z' = \frac{37}{25} \qquad \mu' = \frac{99}{50}$$
$$z'' = \frac{112}{25} \qquad \mu'' = \frac{49}{50}$$

woraus wieder dieselben Werthe der Unbekannten und der Gewichte hervorgehen wie vorher. Für die Summe der Fehlerquadrate wird jetzt

$$W' = \frac{287}{25}, \quad W'' = 9$$

also

$$W = \frac{512}{25}$$

wie im vor. Art.

Ich habe ehe ich weiter gehe hier noch eine Bemerkung einzuschalten. Wenn man die zwei Verfahrungsarten, die für die Auflösung der allgemeinen Aufgabe in dieser Abhandlung entwickelt worden sind, in ihrer Anwendung auf das eben behandelte Beispiel betrachtet, so scheint es, dass die Auflösung des Art. 29 auf geringere Arbeit führt, wie die später entwickelte. In der That hat im vorstehenden Beispiel jene Auflösung auf eine kürzere Rechnung geführt wie diese. Aber dieses findet nur in so einfachen Fällen, wie der, den dieses Beispiel darbietet, statt. In der Anwendung auf Fälle, in welchen die Zahl der Unbekannten und der Bedingungsgleichungen grösser ist, und die Coefficienten keine so einfache Zahlen sind wie hier, sondern aus Decimalbrüchen ohne Ende bestehen, ist die Sache eine andere. In solchen Fällen ist die zweite Auflösung im Allgemeinen diejenige, welche geringere Arbeit verursacht, und nur in besonderen Fällen, namentlich in solchen, wo die Elimination der mit $x_{,}$, $x_{,,}$, etc. bezeichneten Grössen leicht bewerkstelligt werden kann, die erste Auflösung vorzuziehen.

§. 4. Anwendung der eben gelösten Aufgabe auf die Geodäsie, unter der Bedingung, dass nur Eine Grundlinie gemessen worden ist.

a) Erstes Verfahren.

64.

Wir kommen jetzt zur Anwendung der im Vorhergehenden ausgeführten Auflösung auf die Geodäsie. Zwar ist von derselben schon im Art. 55 durch ihre Hinführung auf die Gaussische Aufgabe des »Supplementum theoriae combinationis etc.« eine geodätische Anwendung gegeben worden, allein diese ist nicht immer anwendbar, indem Umstände eintreten können, die einer allgemeineren Aufgabe angehören.

Es wird jetzt angenommen, dass in einem Dreiecksnetze eine grössere Anzahl von Winkeln gemessen worden seien, wie diejenige, die mit der Zuziehung Einer Dreiecksseite hinreichend und nöthig ist um dieses Dreiecksnetz zu bestimmen, und nach der Ausgleichung der Messungen gefragt, durch welche die wahrscheinlichsten Werthe derselben hervorgehen. In Bezug auf die Messungen selbst soll zuerst angenommen werden, dass man nicht die Winkel für sich, sondern die Richtungen, die die Schenkel der Winkel bilden, unmittelbar eingeschnitten habe *). Man wird weiter unten sehen, dass jener Fall sich mit Vortheil für die Abkürzung der Rechnungen auf diesen hinführen lässt. Das Verfahren bei den Messungen, welches der nun zu entwickelnden Anwendung der allgemeinen Aufgabe zu Grunde liegend gedacht wird, ist daher das folgende.

Nachdem auf irgend einer Station, die zugleich einen Dreieckspunkt bildet, der Theodolit aufgestellt und nivellirt worden ist, stelle man bei unverändert gelassenem Kreise desselben die übrigen Dreieckspunkte, in so weit sie sichtbar sind, durch blose Bewegung der Alhidade in das Fernrohr ein, lese nach jeder Einstellung die Mikroscope oder die Nonien des Theodoliten ab, und notire die Ablesungen. Hierauf drehe man den Kreis des Theodoliten um einen beliebigen Bogen, und wiederhole dasselbe Verfahren, welches fortzusetzen ist, bis die vor-

---

*) Die Messung der Richtungen statt der Winkel selbst ist, so viel ich weiss, zuerst von W. Strube angegeben und angewandt worden. S. Schum. Astr. Nachr. B. II. p. 431 u. f.

bestimmte Anzahl von Einstellungen eines jeden Dreieckspunkts erlangt ist. Eine jede solche Reihe von Einstellungen nenne ich einen Gyrus (gyrus horizontis). Die zufällige Beschaffenheit der Atmosphäre und auch andere Umstände können bewirken, dass nicht jeder Gyrus alle einzuschneidenden Punkte enthält, und wenn deren viele vorhanden sind, so wird man jedenfalls nicht Alle in jeden Gyrus aufnehmen, weil dadurch bewirkt werden würde, dass man sich zu lange auf den unveränderten Stand des Theodoliten verlassen müsste. Man wird im letztgenannten Falle für jeden Gyrus ein Maximum von Einstellungen festsetzen, und die in jedem Gyrus einzuschneidenden Punkte so auswählen, dass möglichst viele verschiedene Combinationen derselben vorkommen. Man wird ferner die verschiedenen Gruppen, in die man zu diesem Zwecke alle einzuschneidenden Punkte getheilt hat, mehrmals einschneiden, so dass von jeder derselben eine zweckmässige Anzahl von Gyris erhalten wird.

65.

Indem wir nun zur Anwendung unserer Aufgabe auf diese Messungen übergehen, ist zuerst zu erwägen, dass jeder Gyrus einen verschiedenen, beliebigen Anfangspunkt hat, und dass daher allen Einstellungen eines jeden Gyrus eine beliebige Zahl zugefügt, oder eine solche von denselben abgezogen werden darf. Die zweckmässigste Wahl dieser Zahlen ist die, welche bewirkt, dass alle in den verschiedenen Gyris erhaltenen Werthe der Richtungen eines und desselben Gegenstandes einander nahe gleich werden, und zugleich nahe die Azimuthe aller Punkte repräsentiren. Man kann hierauf noch einen Schritt weiter gehen, und für jede Richtung, oder jedes Azimuth, einen beliebigen genäherten Werth, der sich von selbst durch die erhaltenen Beobachtungen darbietet, abziehen, so dass hierauf alle der weiteren Berechnung zu unterwerfenden, durch die Beobachtungen erhaltenen Zahlenwerthe kleine Grössen werden, ja man kann durch dieses Verfahren bewirken, dass in einer Anzahl von Gyris alle diese Zahlenwerthe Null werden. Bezeichnen wir nun die auf diese Art durch die Beobachtungen erlangten Zahlenwerthe des ersten Gyrus mit l, l', l'', etc., die mit Uebergehung der Bedingungsgleichungen den angenommenen Werthen der Richtungen zuzufügenden, wahrscheinlichsten Verbesserungen mit

x, x', x'', etc., und die wahrscheinlichste Verbesserung des angenommenen gemeinschaftlichen Anfangspunkts dieses Gyrus mit u, so giebt dieser erste Gyrus die folgenden Gleichungen

(53) . $x + u = l$, $x' + u = l'$, $x'' + u = l''$, etc.

Seien die Gewichte dieser Beobachtungen

$$p\,,\quad p'\,,\quad p''\,,\ \text{etc.}$$

Im zweiten Gyrus habe man auf gleiche Weise die Zahlenwerthe derselben Richtungen $l_{,}$, $l'_{,}$, $l''_{,}$, etc. erhalten, bezeichnet man hierauf mit $u_{,}$ die wahrscheinlichste Verbesserung des angenommenen gemeinschaftlichen Anfangspunkts dieses Gyrus, so giebt derselbe die Gleichungen

(54) . $x + u_{,} = l_{,}$, $x' + u_{,} = l'_{,}$, $x'' + u_{,} = l''_{,}$, etc.

Seien die Gewichte dieser Beobachtungen

$$p_{,}\,,\quad p'_{,}\,,\quad p''_{,}\,,\ \text{etc.}$$

Durch einen dritten Gyrus bekommt man ebenso

(55) . $x + u_{,,} = l_{,,}$, $x' + u_{,,} = l'_{,,}$, $x'' + u_{,,} = l''_{,,}$, etc.

mit den Gewichten

$$p_{,,}\,,\quad p'_{,,}\,,\quad p''_{,,}\,,\ \text{etc.}$$

und jeder folgende Gyrus giebt ähnliche Gleichungen. Diese sind die Gleichungen (29) unserer gegenwärtigen Aufgabe, in so weit nur Eine Station betrachtet wird. Jede andere Station, auf welcher beobachtet worden ist, liefert ähnliche Gleichungen, in welchen aber andere Unbekannten vorkommen, die in so ferne man nur zuerst den ersten Theil der Auflösung betrachtet, von jenen unabhängig sind. In Bezug auf den ersten Theil der Auflösung können also die Beobachtungen einer jeden Station unabhängig von denen aller übrigen Stationen berechnet werden. Es zerfallen, mit anderen Worten, in der gegenwärtigen Aufgabe die allgemeinen Gleichungen (29) in so viele von einander abgesonderte Systeme wie Stationen vorhanden sind.

66.

Die vorstehenden Gleichungen, in welchen x, x', x'', etc. und u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. die Unbekannten sind, wären jetzt nach den Vorschriften der Artt. 42, 43, 44 zu behandeln, und da ihre Anzahl immer wenigstens eben so gross ist, wie die der Unbekannten, so brauchen in der gegenwärtigen Aufgabe zur Berechnung der Grössen (aa), (ab), etc. die Coeffi-

cienten der Bedingungsgleichungen, die sich aus dem Dreiecksnetz im Ganzen betrachtet ergeben, nie hinzugezogen zu werden. Es tritt jedoch hier ein Umstand ein, der eine Abweichung vom allgemeinen Verfahren bedingt, und dieser besteht darin, dass aus den eben aufgestellten Gleichungen, in wie grosser Anzahl sie auch vorhanden sein mögen, nie alle Unbekannten bestimmt werden können, sondern immer Eine derselben unbestimmt bleibt. Dieses hat seinen Grund darin, dass der Anfangspunkt der Richtungen willkührlich ist, und folglich x, x', x'', etc. an sich unbestimmte Grössen sind, von welchen nur die Unterschiede (die Winkel, die daraus hervorgehen) bestimmte Werthe bekommen.

Da eine der Unbekannten willkührlich ist, so kann man zwischen allen Unbekannten, oder einem Theil derselben eine beliebige Bedingungsgleichung aufstellen*), und diese so einrichten, dass man geschmeidige Endformeln bekommt. Sei diese Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned} \theta = Hu + Ju_{,} + Ku_{,,} + \dots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56) \\ + H'x + J'x' + K'x'' + \dots \end{aligned}$$

wo vorläufig θ, H, J, K, etc. H', J', K', etc. unbestimmte Grössen sind.

67.

Wir könnten nun die allgemeine Auflösung unmittelbar auf die im Vorhergehenden aufgestellten Gleichungen anwenden, müssten aber dabei auch auf den zweiten Theil derselben Rücksicht nehmen, weil eine Bedingungsgleichung eingeführt worden ist. Theils um letzteres zu vermeiden, und theils um die Unbekannten u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. zu eliminiren, die weiter nicht gebraucht werden, ziehe ich vor den ersten Theil der Auflösung a priori in Bezug auf die aufgestellten Gleichungen durchzuführen. Es ist aus dem Vorhergehenden klar, dass dieser darin besteht, die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten in der Annahme zu suchen, dass in der Aufgabe die zu lösen ist, nur die Bedingungsgleichung (56) vorhanden sei, die Werthe der Unbekannten, die man dadurch erhält, sind die, welche im Art. 44 mit y, y', y'', etc. bezeichnet wurden; der zweite Theil der Auflösung bleibt hierauf derselbe wie im Vorhergehenden.

*) S. Schum. Astr. Nachr. B. XVI. Nr. 362.

Das leitende Princip, welches wir hier anzuwenden haben, besteht wieder darin, dass die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der übrigbleibenden Fehler ein Minimum werden muss, während die Gleichung (56) vollständig erfüllt wird. Bezeichnet nun ψ einen unbestimmten Factor, so muss in Folge der Gleichungen (53) bis (56) die folgende Function

$$\begin{aligned}
&p(x+u-l)^2 + p'(x'+u-l')^2 + p''(x''+u-l'')^2 + \ldots \\
&+ p_,(x+u_,-l_,)^2 + p_,'(x'+u_,-l_,')^2 + p_,''(x''+u_,-l_,'')^2 + \ldots \\
&+ p_{,,}(x+u_{,,}-l_{,,})^2 + p_{,,}'(x'+u_{,,}-l_{,,}')^2 + p_{,,}''(x''+u_{,,}-l_{,,}'')^2 + \ldots \\
&+ \text{etc.} \\
&- 2\psi(Hu + Ju_, + Ku_{,,} + \ldots + H'x + J'x' + K'x'' + \ldots - \theta)
\end{aligned}$$

ein absolutes Minimum werden und diese Bedingung giebt sogleich die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
px + p'x' + p''x'' + \ldots + Pu &= (lu) + H\psi \\
p_,x + p_,'x' + p_,''x'' + \ldots + P_,u_, &= (lu_,) + J\psi \\
p_{,,}x + p_{,,}'x' + p_{,,}''x'' + \ldots + P_{,,}u_{,,} &= (lu_{,,}) + K\psi \\
\text{etc.} \qquad\qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Qx + pu + p_,u_, + p_{,,}u_{,,} + \ldots\ldots &= (lx) + H'\psi \\
Q'x' + p'u + p_,'u_, + p_{,,}'u_{,,} + \ldots\ldots &= (lx') + J'\psi \\
Q''x'' + p''u + p_,''u_, + p_{,,}''u_{,,} + \ldots\ldots &= (lx'') + K'\psi \\
\text{etc.} \qquad\qquad & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

in welchen zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
P &= p + p' + p'' + \ldots \\
P_, &= p_, + p_,' + p_,'' + \ldots \\
P_{,,} &= p_{,,} + p_{,,}' + p_{,,}'' + \ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= p + p_, + p_{,,} + \ldots \\
Q' &= p' + p_,' + p_{,,}' + \ldots \\
Q'' &= p'' + p_,'' + p_{,,}'' + \ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(lu) &= pl + p'l' + p''l'' + \ldots \\
(lu_,) &= p_,l_, + p_,'l_,' + p_,''l_,'' + \ldots \\
(lu_{,,}) &= p_{,,}l_{,,} + p_{,,}'l_{,,}' + p_{,,}''l_{,,}'' + \ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(lx) &= pl + p_,l_, + p_{,,}l_{,,} + \ldots \\
(lx') &= p'l' + p_,'l_,' + p_{,,}'l_{,,}' + \ldots \\
(lx'') &= p''l'' + p_,''l_,'' + p_{,,}''l_{,,}'' + \ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

gesetzt worden sind. Die Bedeutung dieser Summen kann einfach mit Worten ausgedrückt werden.

P ist die Summe der Gewichte aller Beobachtungen des ersten Gyrus,
$P_{\prime}$ . . . . zweiten Gyrus,
$P_{\prime\prime}$ . . . . dritten Gyrus,
u. s. w.

Q ist die Summe der Gewichte aller für die Richtung x vorhandenen Beobachtungen,
Q' . . . . x' . . . .
Q'' . . . . x'' . . . .
u. s. w.

(lu) ist die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten, beobachteten Werthe im ersten Gyrus,
$(lu_{\prime})$ . . . . im zweiten Gyrus,
$(lu_{\prime\prime})$ . . . . im dritten Gyrus,
u. s. w.

(lx) ist die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten, für x erhaltenen Werthe,
(lx') . . . . x' . .
(lx'') . . . . x'' . .

u. s. w. Diesen Bedeutungen zufolge können diese Summen leicht, und ohne Irrthum befürchten zu müssen, berechnet werden.

68.

Ehe ich weiter gehe will ich auf eine wesentliche Vereinfachung aufmerksam machen, deren die Ausdrücke des vor. Art. fähig sind, und diese einführen.

»Man kann immer auf einfache Weise bewirken, dass alle mit (lu), $(lu_{\prime})$, $(lu_{\prime\prime})$, etc. bezeichneten Summen Null werden.«

Dem Vorhergehenden zufolge ist der gemeinschaftliche Anfangspunkt aller Richtungen eines jeden Gyrus völlig willkührlich, bezeichnet man daher mit m irgend eine beliebige Zahl, dann ist z. B. der Ausdruck für (lu) nicht nur der im vor. Art. angegebene, sondern es ist auch

$$(lu) = p(l-m) + p'(l'-m) + p''(l''-m) + \dots$$

bestimmt man aber nun m so dass

$$m = \frac{p}{P}\,l + \frac{p'}{P}\,l' + \frac{p''}{P}\,l'' + \ldots$$

wird, so ergiebt sich sogleich

$$(lu) = 0$$

und da man dieses Verfahren auf die Beobachtungen eines jeden Gyrus anwenden kann, so kann man auch $(lu_{,})$, $(lu_{,,})$, etc. gleich Null machen. W. z. b. w.

Wenn, wie am häufigsten der Fall ist, die Gewichte der Beobachtungen des betreffenden Gyrus einander gleich gesetzt werden können, so wird m gleich dem arithmetischen Mittel aller l dieses Gyrus.

Führen wir nun die obige Bestimmung in die Gleichungen des vor. Art. ein, dann sind zuerst auf die eben erklärte Art

$$\begin{array}{lll} p(l-m)\,, & p'(l'-m)\,, & p''(l''-m)\,, \\ p_{,}(l_{,}-m_{,})\,, & p_{,}'(l_{,}'-m_{,})\,, & p_{,}''(l_{,}''-m_{,})\,, \\ p_{,,}(l_{,,}-m_{,,})\,, & p_{,,}'(l_{,,}'-m_{,,})\,, & p_{,,}''(l_{,,}''-m_{,,})\,, \end{array}$$

etc. zu berechnen, und diese statt pl, $p'l'$, etc. $p_{,}l_{,}$, etc. etc. anzusetzen, worauf die Gleichungen

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} px + p'x' + p''x'' + \ldots + Pu = H\psi \\ p_{,}x + p_{,}'x' + p_{,}''x'' + \ldots + P_{,}u_{,} = J\psi \\ p_{,,}x + p_{,,}'x' + p_{,,}''x'' + \ldots + P_{,,}u_{,,} = K\psi \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} Qx + pu + p_{,}u_{,} + p_{,,}u_{,,} + \ldots . = (lx) + H'\psi \\ Q'x' + p'u + p_{,}'u_{,} + p_{,,}'u_{,,} + \ldots . = (lx') + J'\psi \\ Q''x'' + p''u + p_{,}''u_{,} + p_{,,}''u_{,,} + \ldots . = (lx'') + K'\psi \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

zur Bestimmung der Unbekannten u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. x, x', x'', etc. dienen. Es kann noch bemerkt werden, dass jetzt die Bedingungsgleichungen

$$P + P_{,} + P_{,,} + \ldots = Q + Q' + Q'' + \ldots$$

$$(lx) + (lx') + (lx'') + \ldots = 0$$

stattfinden, die zur Prüfung der numerischen Rechnungen dienen können.

69.

Aus den Gleichungen (57) und (58) kann man ohne Mühe sowohl ψ wie u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. eliminiren. Seien

$$N = \frac{p}{P}H + \frac{p_{,}}{P_{,}}J + \frac{p_{,,}}{P_{,,}}K + \ldots - H'$$

$$N' = \frac{p'}{P}H + \frac{p_{,}'}{P_{,}}J + \frac{p_{,,}'}{P_{,,}}K + \ldots - J'$$

$$N'' = \frac{p''}{P}H + \frac{p_{,}''}{P_{,}}J + \frac{p_{,,}''}{P_{,,}}K + \ldots - K'$$

etc.

$$S = \frac{H^2}{P} + \frac{J^2}{P_{,}} + \frac{K^2}{P_{,,}} + \ldots$$

Multiplicirt man nun die erste Gleichung (57) mit $\frac{H}{P}$, die zweite mit $\frac{J}{P_{,}}$, die dritte mit $\frac{K}{P_{,,}}$, u. s. w. und addirt die Produkte, so erhält man in Folge der Bedingungsgleichung (56)

$$\psi = \frac{N}{S}x + \frac{N'}{S}x' + \frac{N''}{S}x'' + \ldots + \frac{\theta}{S} \quad . \quad . \quad (59)$$

und die Elimination von ψ aus den (57) giebt hierauf

$$\left.\begin{aligned}
u &= \left(\frac{NH}{SP} - \frac{p}{P}\right)x + \left(\frac{N'H}{SP} - \frac{p'}{P}\right)x' + \left(\frac{N''H}{SP} - \frac{p''}{P}\right)x'' \\
&\qquad + \ldots + \frac{H\theta}{SP} \\
u_{,} &= \left(\frac{NJ}{SP_{,}} - \frac{p_{,}}{P_{,}}\right)x + \left(\frac{N'J}{SP_{,}} - \frac{p_{,}'}{P_{,}}\right)x' + \left(\frac{N''J}{SP_{,}} - \frac{p_{,}''}{P_{,}}\right)x'' \\
&\qquad + \ldots + \frac{J\theta}{SP_{,}} \\
u_{,,} &= \left(\frac{NK}{SP_{,,}} - \frac{p_{,,}}{P_{,,}}\right)x + \left(\frac{N'K}{SP_{,,}} - \frac{p_{,,}'}{P_{,,}}\right)x' + \left(\frac{N''K}{SP_{,,}} - \frac{p_{,,}''}{P_{,,}}\right)x'' \\
&\qquad + \ldots + \frac{K\theta}{SP_{,,}}
\end{aligned}\right\} \quad (60)$$

u. s. w. Setzt man diese Werthe von u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. und ψ in die (58), so ergiebt sich das folgende System von Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
(aa)x + (ab)x' + (ac)x'' + \ldots &= (al) \\
(ab)x + (bb)x' + (bc)x'' + \ldots &= (bl) \\
(ac)x + (bc)x' + (cc)x'' + \ldots &= (cl)
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (61)$$

u. s. w. in welchen die Coefficienten die folgenden Ausdrücke erhalten,

$$(aa) = Q + \frac{N^2}{S} - (pp)$$

$$(ab) = \frac{NN'}{S} - (pp')$$

$$(ac) = \frac{NN''}{S} - (pp'')$$

etc.

$$(al) = (lx) - \frac{N\theta}{S}$$

$$(bb) = Q' + \frac{N'^2}{S} - (p'p')$$
$$(bc) = \qquad \frac{N'N''}{S} - (p'p'')$$
etc.
$$(bl) = (lx') - \frac{N'\theta}{S}$$

$$(cc) = Q'' + \frac{N''^2}{S} (p''p'')$$
etc.
$$(cl) = (lx'') - \frac{N''\theta}{S}$$

---

u. s. w. nachdem die folgenden Abkürzungen eingeführt worden sind,

$$(pp) = \frac{p^2}{P} + \frac{p_,^2}{P_,} + \frac{p_{,,}^2}{P_{,,}} + \ldots$$
$$(pp') = \frac{pp'}{P} + \frac{p_,p_,'}{P_,} + \frac{p_{,,}p_{,,}'}{P_{,,}} + \ldots$$
$$(pp'') = \frac{pp''}{P} + \frac{p_,p_,''}{P_,} + \frac{p_{,,}p_{,,}''}{P_{,,}} + \ldots$$
etc.

$$(p'p') = \frac{p'^2}{P} + \frac{p_,'^2}{P_,} + \frac{p_{,,}'^2}{P_{,,}} + \ldots$$
$$(p'p'') = \frac{p'p''}{P} + \frac{p_,'p_,''}{P_,} + \frac{p_{,,}'p_{,,}''}{P_{,,}} + \ldots$$
etc.

$$(p''p'') = \frac{p''^2}{P} + \frac{p_,''^2}{P_,} + \frac{p_{,,}''^2}{P_{,,}} + \ldots$$
etc.

---

u. s. w. womit die Elimination der Unbekannten u, $u_,$, etc. ausgeführt ist.

70.

Suchen wir jetzt den einfachsten Ausdruck für die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate, die wie oben mit W bezeichnet werden soll. Die erste Entwickelung des für diese Summe im Art. 67 aufgestellten Ausdrucks giebt

$$\begin{aligned} W = & \{Qx + pu + p_,u_, + p_{,,}u_{,,} + \ldots - (lx)\}\,x \\ & + \{Q'x' + p'u + p'_,u_, + p'_{,,}u_{,,} + \ldots - (lx')\}\,x' \\ & + \{Q''x'' + p''u + p''_,u_, + p''_{,,}u_{,,} + \ldots - (lx'')\}\,x'' \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \{px + p'x' + p''x'' + \ldots + Pu\}u \\
&+ \{p_,x + p'_,x' + p''_,x'' + \ldots + P_,u_,\}u_, \\
&+ \{p_{,,}x + p'_{,,}x' + p''_{,,}x'' + \ldots + P_{,,}u_{,,}\}u_{,,} \\
&+ \text{etc.} \\
&+ (ll) - \{(lx)x + (lx')x' + (lx'')x'' + \ldots\}
\end{aligned}
$$

wo

$$
\begin{aligned}
(ll) = {} & pl^2 + p'l'^2 + p''l''^2 + \ldots \\
& + p_,l_,^2 + p'_,l'^2_, + p''_,l''^2_, + \ldots \\
& + p_{,,}l_{,,}^2 + p'_{,,}l'^2_{,,} + p''_{,,}l''^2_{,,} + \ldots \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

gesetzt ist. Zufolge der Gleichungen (57) und (58) geht dieser Ausdruck zuerst in den folgenden über

$$
\begin{aligned}
W = {} & \psi\{Hu + Ju_, + Ku_{,,} + \ldots + H'x + J'x' + K'x'' + \ldots\} \\
& + (ll) - (lx)x - (lx')x' - (lx'')x'' - \ldots
\end{aligned}
$$

und dieser verwandelt sich zufolge der Gleichungen

$$
\begin{aligned}
(lx) &= (al) + \frac{N}{S}\theta \\
(lx') &= (bl) + \frac{N'}{S}\theta \\
(lx'') &= (cl) + \frac{N''}{S}\theta \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

und der (56) und (59) in den folgenden

$$
W = \frac{\theta^2}{S} + (ll) - (al)x - (bl)x' - (cl)x'' - \ldots
$$

Wenden wir uns jetzt zum Inhalt des Art. 54, so finden wir, dass die rechte Seite dieses Ausdrucks für W, mit Ausnahme des ersten Gliedes, mit der dort mit $\Omega_,$ bezeichneten Function identisch ist. Da nun aber hier alles was sich a. a. O. auf die Bedingungsgleichungen bezieht weggelassen werden muss, weil die einzige hier vorhandene Bedingungsgleichung in den vorstehenden Ausdrücken schon vollständig berücksichtigt worden ist, so ergiebt sich sogleich

$$
W = (ll,n) + \frac{\theta^2}{S}
$$

welches der einfachste Ausdruck dieser Function ist. Die Grösse (ll,n) wird hier bei der numerischen Auflösung der Gleichungen (61) auf dieselbe Art erhalten, wie im Art. 43 allgemein gezeigt wurde.

71.

In der Bedingungsgleichung (56) sind alle Coefficienten unbestimmt gelassen worden, aber es ist von Wichtigkeit zu untersuchen, welche Wirkung die eine oder andere Bestimmung derselben auf die Werthe der Unbekannten, die aus den (61) hervorgehen, so wie auf den Betrag der Function W ausüben. Diese Untersuchung soll jetzt vorgenommen werden. Nehmen wir an, dass die (61) unbestimmt aufgelöst worden sind, und setzen demzufolge

$$(62) \quad . \; . \quad \begin{cases} x = (1,1)(al) + (1,2)(bl) + (1,3)(cl) + \ldots \\ x' = (1,2)(al) + (2,2)(bl) + (2,3)(cl) + \ldots \\ x'' = (1,3)(al) + (2,3)(bl) + (3,3)(cl) + \ldots \end{cases}$$

u. s. w. Man bekommt nun durch die Verbindung dieser mit den (61) auf bekannte Art die folgenden Gleichungen

$$\begin{array}{l} (1,1)(aa) + (1,2)(ab) + (1,3)(ac) + \ldots = 1 \\ (1,1)(ab) + (1,2)(bb) + (1,3)(bc) + \ldots = 0 \\ (1,1)(ac) + (1,2)(bc) + (1,3)(cc) + \ldots = 0 \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\ (1,2)(aa) + (2,2)(ab) + (2,3)(ac) + \ldots = 0 \\ (1,2)(ab) + (2,2)(bb) + (2,3)(bc) + \ldots = 1 \\ (1,2)(ac) + (2,2)(bc) + (2,3)(cc) + \ldots = 0 \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\ (1,3)(aa) + (2,3)(ab) + (3,3)(ac) + \ldots = 0 \\ (1,3)(ab) + (2,3)(bb) + (3,3)(bc) + \ldots = 0 \\ (1,3)(ac) + (2,3)(bc) + (3,3)(cc) + \ldots = 1 \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

Die Ausdrücke der Coefficienten (aa), (ab), etc. etc. des Art. 69 geben aber durch die Addition, mit Berücksichtigung der Ausdrücke für P, $P_{,}$ etc. und Q, Q', etc. die ihrer Seits

$$\begin{array}{l} Q = (pp) + (pp') + (pp'') + \ldots \\ Q' = (pp') + (p'p') + (p'p'') + \ldots \\ Q'' = (pp'') + (p'p'') + (p''p'') + \ldots \\ \quad \text{etc.} \end{array}$$

geben, die folgenden

$$(aa) + (ab) + (ac) + \ldots = \frac{N\Sigma N}{S}$$
$$(ab) + (bb) + (bc) + \ldots = \frac{N'\Sigma N}{S}$$
$$(ac) + (bc) + (cc) + \ldots = \frac{N''\Sigma N}{S}$$
etc.

wenn man

$$\Sigma N = N + N' + N'' + \ldots$$

setzt, und vermittelst dieser erhält man aus den vorstehenden Gleichungen, wenn man jede Gruppe derselben summirt,

$$\left.\begin{array}{l} (1,1)N + (1,2)N' + (1,3)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N} \\ (1,2)N + (2,2)N' + (2,3)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N} \\ (1,3)N + (2,3)N' + (3,3)N'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N} \\ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \quad . \quad (63)$$

Berücksichtigt man nun in den Ausdrücken für (al), (bl), etc. nur die von θ abhängigen Glieder, setzt demzufolge

$$(al) = -\frac{N}{S}\theta$$
$$(bl) = -\frac{N'}{S}\theta$$
$$(cl) = -\frac{N''}{S}\theta$$
etc.

und substituirt diese Werthe in die (62), so ergiebt sich in Folge der (63)

$$x = x' = x'' = \text{etc.} = -\frac{\theta}{\Sigma N}$$

Die Einführung des Coefficienten θ der Bedingungsgleichung (56) fügt also allen beobachteten Richtungen eine und dieselbe Grösse hinzu, und hat folglich auf die Unterschiede derselben, das ist auf die aus den Beobachtungen hervorgehenden Winkel zwischen den eingeschnittenen Punkten, gar keinen Einfluss.

72.

Man multiplicire die erste der Gleichungen (63) mit (al), die zweite mit (bl), die dritte mit (cl), u. s. w. und addire die Produkte, so ergiebt sich in Folge der (62)

$$Nx + N'x' + N''x'' + \ldots = \frac{S}{\Sigma N}\{(al) + (bl) + (cl) + \ldots\}$$

Aber die Ausdrücke des Art. 69 für (al), (bl), etc. geben in Verbindung mit der Gleichung

$$(lx) + (lx') + (lx'') + \ldots = 0$$

des Art. 68

$$(al) + (bl) + (cl) + \ldots = -\frac{\Sigma N}{S}\,\theta$$

und folglich wird

$$(64) \quad \ldots \quad Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta = 0$$

Hiemit giebt die (59)

$$\psi = 0$$

und die (60) gehen über in

$$(65) \quad \ldots \quad \begin{cases} u = -\frac{p}{P}x - \frac{p'}{P}x' - \frac{p''}{P}x'' - \ldots \\ u_{,} = -\frac{p_{,}}{P_{,}}x - \frac{p_{,}'}{P_{,}}x' - \frac{p_{,}''}{P_{,}}x'' - \ldots \\ u_{,,} = -\frac{p_{,,}}{P_{,,}}x - \frac{p_{,,}'}{P_{,,}}x' - \frac{p_{,,}''}{P_{,,}}x'' - \ldots \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Substituirt man hierin den im vor. Art. für die x erhaltenen gemeinschaftlichen Werth, so ergiebt sich

$$u = u_{,} = u_{,,} = \text{etc.} = \frac{\theta}{\Sigma N}$$

woraus hervorgeht, dass die Einführung der Grösse θ allen u dieselbe Grösse hinzufügt, die sie von den x abzieht. Es bekommen also nicht blos die Winkel zwischen den beobachteten Richtungen, sondern auch die Summen $x + u$, $x' + u$, etc. $x + u_{,}$, $x' + u_{,}$, etc. etc. dieselben bestimmten Werthe, wie auch θ angenommen wird.

73.

Aus dem zunächst Vorhergehenden folgt schon, dass die Summe der mit den Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate von θ unabhängig sein muss, da sie blos Function von den Summen $x + u$, $x' + u$, etc. $x + u_{,}$, $x' + u_{,}$, etc. etc. ist, es soll aber diese Eigenschaft direct bewiesen werden. Nehmen wir zu dem Ende den Ausdruck

$$W = \frac{\theta^2}{S} + (ll) - (al)x - (bl)x' - (cl)x'' - \ldots$$

des Art. 70 vor, und erwägen dass (ll) von θ unabhängig ist, und mit bloser Rücksicht auf die von θ abhängigen Glieder

$$x = x' = x'' = \text{etc.} = -\frac{\theta}{\Sigma N}$$

und

$$(al) = -\frac{N}{S}\theta\,, \quad (bl) = -\frac{N'}{S}\theta\,, \quad (cl) = -\frac{N''}{S}\theta\,, \quad \text{etc.}$$

sind, so erhält man, wieder mit bloser Rücksicht auf die Glieder, die θ enthalten,

$$W = \frac{\theta^2}{S} - \frac{\theta^2}{S} = 0$$

also W von θ unabhängig, w. z. b. w.

74.

Es kommt jetzt die Untersuchung an die Reihe, welchen Einfluss die Coefficienten H, J, K, etc. unserer Bedingungsgleichung (56) auf die Werthe der Unbekannten ausüben. Aus dem Umstande dass $\psi = 0$ ist, wie im vorvor. Art. bewiesen wurde, könnten wir schon den Schluss ziehen, dass diese Coefficienten, gleichwie θ, willkührlich bleiben, allein diese Sache verdient direct untersucht zu werden.

Wie man gesehen hat, treten diese Coefficienten nicht unmittelbar in die Coefficienten der Gleichungen (61) ein, sondern die mit N, N', N'', etc. und S bezeichneten Functionen derselben, aber wenn wir mit den H, J, K, etc. H', J', K', etc. irgend welche beliebige Aenderungen vornehmen, so können wir nicht nur die daraus hervorgehenden Aenderungen von N, N', etc. S mit ΔN, $\Delta N'$, $\Delta N''$, etc. ΔS, sondern auch die daraus folgenden Aenderungen der Coefficienten der (61) mit $\Delta(aa)$, $\Delta(ab)$, etc. etc. und die der Unbekannten mit Δx, $\Delta x'$, $\Delta x''$, etc. bezeichnen. Die Gleichungen (61) gehen daher nach diesen Aenderungen strenge in die folgenden

$$\left.\begin{aligned}
&[(aa)+\Delta(aa)]\Delta x+[(ab)+\Delta(ab)]\Delta x'+[(ac)+\Delta(ac)]\Delta x''+\ldots+F=0\\
&[(ab)+\Delta(ab)]\Delta x+[(bb)+\Delta(bb)]\Delta x'+[(bc)+\Delta(bc)]\Delta x''+\ldots+F'=0\\
&[(ac)+\Delta(ac)]\Delta x+[(bc)+\Delta(bc)]\Delta x'+[(cc)+\Delta(cc)]\Delta x''+\ldots+F''=0
\end{aligned}\right\}(66)$$

u. s. w. über, in welchen die völlig bekannten Glieder die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
F &= x\Delta(aa) + x'\Delta(ab) + x''\Delta(ac) + \ldots - \Delta(al)\\
F' &= x\Delta(ab) + x'\Delta(bb) + x''\Delta(bc) + \ldots - \Delta(bl)\\
F'' &= x\Delta(ac) + x'\Delta(bc) + x''\Delta(cc) + \ldots - \Delta(cl)\\
&\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

haben. Wir dürfen jetzt, ohne dass die Strenge des Resultats dadurch verletzt würde, die Veränderung ΔS für sich betrachten. Setzt man zu dem Ende

$$r = \frac{1}{S+\Delta S} - \frac{1}{S}$$

so bekommt man

$$\Delta(aa) = N^2 r,\quad \Delta(ab) = NN'r,\quad (\Delta(ac) = NN''r, \text{ etc. } \Delta(al) = -N\theta r$$
$$\Delta(bb) = N'^2 r,\quad \Delta(bc) = N'N''r, \text{ etc. } \Delta(bl) = -N'\theta r$$
$$\Delta(cc) = N''^2 r, \text{ etc. } \Delta(cl) = -N''\theta r$$

u. s. w. und es werden

$$F = Nr(Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta)$$
$$F' = N'r(Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta)$$
$$F'' = N''r(Nx + N'x' + N''x'' + \ldots + \theta)$$

u. s. w. also in Folge der (64)

$$F = F' = F'' = \text{etc.} = 0$$

Hiemit werden vermöge der (66) auch

$$\Delta x = \Delta x' = \Delta x'' = \text{etc.} = 0$$

oder irgend eine Aenderung von S, sei sie auch noch so gross, bringt keine Aenderung in den Werthen der Unbekannten hervor.

Untersuchen wir jetzt die Wirkung der gleichzeitigen Aenderungen ΔN und $\Delta N'$. Die Annahme dieser giebt strenge

$$\Delta(aa) = 2N\frac{\Delta N}{S} + \frac{\Delta N^2}{S},\quad \Delta(bb) = 2N'\frac{\Delta N'}{S} + \frac{\Delta N'^2}{S},\quad \Delta(cc) = 0$$
$$\Delta(ab) = N'\frac{\Delta N}{S} + N\frac{\Delta N'}{S} + \frac{\Delta N\,\Delta N'}{S},\quad \Delta(bc) = N''\frac{\Delta N'}{S}\quad \Delta(cd) = 0$$
$$\Delta(ac) = N''\frac{\Delta N}{S}\quad \Delta(bd) = N'''\frac{\Delta N'}{S}\quad \text{etc.}$$
$$\Delta(ad) = N'''\frac{\Delta N}{S}\quad \text{etc.}\quad \Delta(cl) = 0$$
$$\text{etc.}\quad \Delta(bl) = -\frac{\Delta N'}{S}\theta\quad \text{etc. etc.}$$
$$\Delta(al) = -\frac{\Delta N}{S}\theta$$

und setzt man jetzt zur Abkürzung

$$\varrho = \frac{x\Delta N + x'\Delta N'}{S}$$

so findet man mit Zuziehung der Gleichung (64)

$$F = (N + \Delta N)\varrho$$
$$F' = (N' + \Delta N')\varrho$$
$$F'' = N''\varrho$$
$$F''' = N'''\varrho$$

u. s. w. die in die (66) zu setzen sind. Setzt man hiemit zugleich

$$\varDelta x' = \varDelta x + z\,, \quad \varDelta x'' = \varDelta x + z'\,, \text{ etc.}$$

wo z, z', etc. unbestimmte Grössen sind, so erhält man nach einer leichten Reduction

$$\begin{aligned}
&(N + \varDelta N)\,\frac{\Sigma N+\varDelta N+\varDelta N'}{S}\,\varDelta x \\
&\quad + [(ab) + \varDelta(ab)]z + [(ac) + \varDelta(ac)]z' + \ldots + (N + \varDelta N)\varrho = 0 \\
&(N' + \varDelta N')\,\frac{\Sigma N+\varDelta N+\varDelta N'}{S}\,\varDelta x \\
&\quad + [(bb) + \varDelta(bb)]z + [(bc) + \varDelta(bc)]z' + \ldots + (N' + \varDelta N')\varrho = 0 \\
&N''\,\frac{\Sigma N+\varDelta N+\varDelta N'}{S}\,\varDelta x + [(bc) + \varDelta(bc)]z + (cc)z' + \ldots + N''\varrho = 0 \\
&\quad\text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

die auf den ersten Blick zeigen, dass ihnen nur durch

$$z = z' = \text{etc.} = 0$$

Gnüge geleistet werden kann, und dass sie

$$\varDelta x = \varDelta x' = \varDelta x'' = \text{etc.} = -\,\frac{x\varDelta N+x'\varDelta N'}{\Sigma N+\varDelta N+\varDelta N'}$$

geben. Man sieht leicht ein, dass je zwei Aenderungen $\varDelta N$ ein analoges Resultat geben müssen, und da in den Ausdrücken der Coefficienten der Gleichungen (61) die N nur in zwei Dimensionen vorkommen, so muss die Betrachtung der gleichzeitigen Aenderungen aller N auch ein analoges Resultat geben. Ferner ist in Folge des Vorhergehenden leicht einzusehen, dass die Hinzufügung einer Aenderung von S dieses Resultat nicht ändern kann.

Die vorhergehenden Entwickelungen geben daher zu erkennen, dass irgend welche Aenderungen, die man mit N, N', N'', etc. und S vornimmt, höchstens die Werthe der x, x', x'', etc. um eine und dieselbe Grösse ändern können, und folglich ohne Einfluss auf die Winkel sind. Auch findet man durch die (65), gleichwie oben, dass immer diese gemeinschaftliche Aenderung der x, x', etc. die nemliche Aenderung im entgegengesetzten Sinne in den Werthen der u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. hervorbringt.

Da demzufolge die Aggregate $x + u$, $x' + u$, etc. $x + u_{,}$, $x' + u_{,}$, etc. etc. unverändert bleiben, so folgt aus dem Ausdruck für W, dass diese Grösse stets unverändert bleibt, und also ein absolutes Minimum ist.

Es ist aber hiebei zu bedenken, dass man die N nicht alle gleich Null, und S nicht unendlich gross machen darf, weil dadurch bewirkt

werden würde, dass von den Gleichungen (61) jede in den übrigen enthalten wäre.

75.

Da dem Vorhergehenden zufolge die N, N', N'', etc. und S mit der eben angegebenen Ausnahme völlig willkührlich sind, so kann man sie anwenden, um aus den Gleichungen (61) möglichst viele Glieder fortzuschaffen, wodurch die Rechnung vereinfacht wird. Dass man von den mit denselben zwei Buchstaben bezeichneten Coefficienten keinen fortschaffen darf, zeigt schon die vorhergehende Auflösung der allgemeinen Aufgabe dadurch, dass diese Coefficienten in den Nennern der verschiedenen Ausdrücke eintreten, auch würden dadurch die N imaginäre Werthe bekommen. Aber von den anderen Coefficienten der (61) darf man so viele fortschaffen wie überhaupt möglich ist, und da die Anzahl der N der Anzahl der x gleich ist, so kann man im Allgemeinen, wenn man wieder die Anzahl der x mit n bezeichnet, n Coefficienten, oder Glieder, gleich Null machen, und zwar kann dieses auf vielerlei Arten geschehen.

Eine Art n Glieder fortzuschaffen besteht darin, dass man im Voraus annimmt, dass der Werth irgend einer der x gleich Null werden soll. Sei z. B.

$$x = 0$$

dann giebt die erste Gleichung (58) die Bedingungsgleichung

$$pu + p_{,}u'_{,} + p_{,,}u_{,,} + \ldots = (lx)$$

und vergleicht man diese mit der (56), so werden

$$H = p,\ J = p_{,},\ K = p_{,,},\ \text{etc.}\ H' = J' = K' = \text{etc.} = 0,\ \theta = (lx)$$

Die Substitution dieser in die Ausdrücke für N, N', etc. des Art. 69 giebt

$$N = (pp),\quad N' = (pp'),\quad N'' = (pp''),\ \text{etc.}\quad S = (pp)$$

womit man die folgenden Ausdrücke der Coefficienten der (61) bekommt,

$$\begin{array}{ll}
(aa) = Q, & (bb) = Q' + \frac{(pp')^2}{(pp)} - (p'p') \\
(ab) = 0, & (bc) = \frac{(pp')(pp'')}{(pp)} - (p'p'') \\
(ac) = 0, & (bd) = \frac{(pp')(pp''')}{(pp)} - (p'p''') \\
(ad) = 0, & \\
\text{etc.} & \text{etc.} \\
(al) = 0, & (bl) = (lx') - \frac{(pp')}{(pp)}(lx)
\end{array}$$

$$(cc) = Q'' + \frac{(pp'')^2}{(pp)} - (p''p'') \quad , \qquad (dd) = Q''' + \frac{(pp''')^2}{(pp)} - (p'''p''')$$

$$(cd) = \frac{(pp'')(pp''')}{(pp)} - (p''p''') \quad , \qquad \text{etc.}$$

etc.

$$(dl) = (lx''') - \frac{(pp''')}{(pp)}(lx)$$

$$(cl) = (lx'') - \frac{(pp'')}{(pp)}(lx) \quad ,$$

u. s. w. Die Gleichungen (61) werden hierauf

$$\begin{aligned}
Qx & & &= 0 \\
& (bb)x' + (bc)x'' + (bd)x''' + \ldots &&= (bl) \\
& (bc)x' + (cc)x'' + (cd)x''' + \ldots &&= (cl) \\
& (bd)x' + (cd)x'' + (dd)x''' + \ldots &&= (dl)
\end{aligned}$$

u. s. w. woraus $x = 0$ folgt, wie im Voraus bestimmt wurde. Der Art. 70 giebt in diesem Falle

$$W = (ll,n) + \frac{(lx)^2}{(pp)}$$

76.

Das im vor. Art. entwickelte Verfahren ist nicht das zweckmässigste zur Anwendung, denn es ist gar kein reeller Gewinn darin enthalten, dass im ersten Theile der Auflösung die Verbesserung einer der beobachteten Richtungen Null wird. Die Bedingung, die hier dazu angewandt worden ist um (al) Null zu machen, kann zweckmässiger dazu verwandt werden um noch einen Coefficienten einer der Unbekannten z. B. $(bc) = 0$ zu machen, denn hieraus entstehen im Verlaufe der Auflösung wesentliche Vereinfachungen, die darin bestehen, dass eine Anzahl anderer, sonst auch zu berechnender Grössen, zugleich Null werden.

Es sollen daher jetzt die Coefficienten

$$(ab), \ (ac), \ (ad), \ \text{etc. nebst} \ (bc)$$

gleich Null gemacht werden, deren Anzahl n ist. Da auch S willkührlich ist, so scheint es als könne man noch einen Coefficienten Null machen, allein die Ausdrücke der Coefficienten (aa), (ab), etc. des Art. 69 zeigen, dass dieses unmöglich ist, indem sie alle zu Functionen von $\frac{N}{\sqrt{S}}$, $\frac{N'}{\sqrt{S}}$, etc. und $\frac{\theta}{\sqrt{S}}$ gemacht werden können, wodurch S gänzlich aus denselben entfernt werden kann. Es soll daher zur Vereinfachung

$$S = 1$$

gesetzt werden. Die Grösse θ giebt Veranlassung ausser den oben genannten Coefficienten der Unbekannten auch eins der völlig bekannten Glieder (al), (bl), etc. Null machen zu können, aber da daraus kein reeller Vortheil erwächst, im Gegentheil die Ausdrücke dieser Coefficienten mehr zusammengesetzt werden, so mache ich von diesem Umstande keinen Gebrauch, sondern setze vielmehr

$$\theta = 0$$

Die hierauf zu berechnenden Ausdrücke sind demnach zuerst die (pp), (pp'), etc. $(p'p')$, etc. etc. nach den im Art. 69 gegebenen Ausdrücken. Da nun

$$NN' = (pp')$$
$$NN'' = (pp'')$$
$$NN''' = (pp''')$$
etc.

und

$$N'N'' = (p'p'')$$

werden müssen, so bekommt man

$$N = \sqrt{\frac{(pp')(pp'')}{(p'p'')}}\,, \qquad N''' = \frac{(pp''')}{N}$$
$$N' = \sqrt{\frac{(pp')(p'p'')}{(pp'')}}\,, \qquad N^{iv} = \frac{(pp^{iv})}{N}$$
$$N'' = \sqrt{\frac{(pp'')(p'p'')}{(pp')}}\,, \qquad N^{v} = \frac{(pp^{v})}{N}$$
etc.

die auch zu berechnen sind. Alsdann werden

$(aa) = Q + N^2 - (pp)$,
$(ab) = 0$
$(ac) = 0$
$(ad) = 0$
$(ae) = 0$
etc.
$(al) = (lx)$

$(bb,1) = Q' + N'^2 - (p'p')$
$(bc,1) = (bc) = 0$
$(bd,1) = N'N''' - (p'p''')$
$(be,1) = N'N^{iv} - (p'p^{iv})$
etc.
$(bl,1) = (lx')$

$(cc,2) = Q'' + N''^2 - (p''p'')$
$(cd,2) = N''N''' - (p''p''')$
$(ce,2) = N''N^{iv} - (p''p^{iv})$
etc.
$(cl,2) = (lx'')$

$(dd,1) = Q''' + N'''^2 - (p'''p''')$
$(de,1) = N'''N^{iv} - (p'''p^{iv})$
etc.
$(dl,1) = (lx''')$

$$(ee,1) = Q^{IV} + N^{IV\,2} - (p^{IV}p^{IV})$$

etc.

$$(el,1) = (lx^{IV})$$

etc. bis

$$\begin{aligned}(ll) = {} & p l^2 + p' l'^2 + p'' l''^2 + p''' l'''^2 + \ldots \\ & + p_{,} l_{,}^2 + p'_{,} l'^2_{,} + p''_{,} l''^2_{,} + p'''_{,} l'''^2_{,} + \ldots \\ & + p_{,,} l_{,,}^2 + p'_{,,} l'^2_{,,} + p''_{,,} l''^2_{,,} + p'''_{,,} l'''^2_{,,} + \ldots \\ & + p_{,,,} l_{,,,}^2 + p'_{,,,} l'^2_{,,,} + p''_{,,,} l''^2_{,,,} + p'''_{,,,} l'''^2_{,,,} + \ldots \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

welche letzte Function zur gleichzeitigen Berechnung von W dient, und mit welcher

$$W = (ll,n)$$

erhalten wird. Die aufzulösenden Gleichungen (61) gehen hiemit in die folgenden über,

$$\begin{array}{llllll} (aa)x & & & & & = (al) \\ & (bb,1)x' & & + (bd,1)x''' & + (be,1)x^{IV} + \ldots & = (bl,1) \\ & & (cc,2)x'' & + (cd,2)x''' & + (ce,2)x^{IV} + \ldots & = (cl,2) \\ & (bd,1)x' & + (cd,2)x'' & + (dd,1)x''' & + (de,1)x^{IV} + \ldots & = (dl,1) \\ & (be,1)x' & + (ce,2)x'' & + (de,1)x''' & + (ee,1)x^{IV} + \ldots & = (el,1) \\ & & \text{etc.} & & & \text{etc.} \end{array}$$

die auf die vorbeschriebene Art in der Auflösung zu behandeln sind. Es kann noch angemerkt werden, dass in Folge der fehlenden Coefficienten derselben von den Hülfsgrössen des Art. 43

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = \delta' = \text{etc.} = \beta'' = 0$$

werden, so wie dass von denen des Art. 44

$$\alpha'' = \alpha''' = \alpha^{IV} = \text{etc.} = 0$$

werden, und die übrigen die folgenden Ausdrücke erhalten,

$$\begin{array}{lllll} \beta''' = \gamma'' & & & & \\ \hline \beta^{IV} = \delta'' & & + \delta^{IV}\beta''' & & \\ \gamma^{IV} = & \delta''' & + \delta^{IV}\gamma''' & & \\ \hline \beta^{V} = \varepsilon'' & & + \varepsilon^{IV}\beta''' & + \varepsilon^{V}\beta^{IV} & \\ \gamma^{V} = & \varepsilon''' & + \varepsilon^{IV}\gamma''' & + \varepsilon^{V}\gamma^{IV} & \\ \delta^{V} = & & \varepsilon^{IV} & + \varepsilon^{V}\delta^{IV} & \\ \hline \end{array}$$

etc.

worauf die Ausdrücke der Unbekannten

$$\begin{array}{rlllll}
-x & = \chi' & & & & \\
-x' & = & \chi'' & & + \chi^{IV}\beta''' & + \chi^{V}\beta^{IV} \\
-x'' & = & & \chi''' & + \chi^{IV}\gamma''' & + \chi^{V}\gamma^{IV} \\
-x''' & = & & & \chi^{IV} & + \chi^{V}\delta^{IV} \\
-x^{IV} & = & & & & \chi^{V} \\
\text{etc.} & & & & & \text{etc.}
\end{array}$$

sich ergeben. Die vorbeschriebenen Rechnungen können durch die folgenden Gleichungen, die aus dem Art. 71 hervorgehen, geprüft und wo nöthig berichtigt werden. Die (pp), (pp'), etc. durch

$$\begin{array}{l}
(pp) + (pp') + (pp'') + \ldots = Q \\
(pp') + (p'p') + (p'p'') + \ldots = Q' \\
(pp'') + (p'p'') + (p''p'') + \ldots = Q'' \\
\quad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

die (aa), $(bb,1)$ etc. durch

$$\begin{array}{llllll}
(aa) & & & & = & N\Sigma N \\
 & (bb,1) & & + (bd,1) + \ldots & = & N'\Sigma N \\
 & & (cc,2) & + (cd,2) + \ldots & = & N''\Sigma N \\
 & (bd,1) & + (cd,2) & + (dd,1) + \ldots & = & N'''\Sigma N \\
 & & \text{etc.} & & & \text{etc.}
\end{array}$$

und die Werthe der Unbekannten selbst durch

$$0 = Nx + N'x' + N''x'' + N'''x''' + \ldots$$

die aus dem Art. 72 hervorgeht. Will man hierauf auch die Werthe der u, $u_{,}$, etc. kennen lernen, so dienen hiezu die Gleichungen (65). Wenn eine oder mehrere der (pp'), (pp''), $(p'p'')$ Null werden, so können durch die obigen Ausdrücke die N, N', N'' nicht berechnet werden, aber in diesem Falle kann man durch Abänderung der Reihenfolge, in welcher man anfänglich die Richtungen aufgestellt hat, immer diese Bestimmung wieder möglich machen.

Das eben entwickelte Verfahren den ersten Theil der Auflösung unserer Aufgabe, oder die sogenannte »Ausgleichung auf den Stationen« zu behandeln, bewirkt nicht nur an sich selbst ein kurzes Verfahren, dessen richtige numerische Ausführung durch die zur Controle derselben vorhandenen Gleichungen gesichert wird, sondern die zum Verschwinden gebrachten Coefficienten üben auch auf den zweiten Theil der Auflösung

in Bezug auf die Abkürzung desselben wesentliche Wirkung aus, indem sie bewirken, dass auch dort eine Anzahl von Gliedern verschwinden.

77.

Die Ausdrücke des vor. Art. führen in zwei verschiedenen Fällen die allgemeine Aufgabe, auch in ihrer Anwendung auf die Geodäsie, auf den im Art. 55 betrachteten speciellen Fall zurück. Der eine dieser Fälle tritt jedes Mal auf den Stationen ein, auf welchen nur drei Richtungen eingeschnitten worden sind, denn kürzt man die Gleichungen auf diesen Fall ab, so werden sie

$$x = \frac{(al)}{(aa)} = \frac{(lx)}{(aa)}$$
$$x' = \frac{(bl,1)}{(bb,1)} = \frac{(lx')}{(bb,1)}$$
$$x'' = \frac{(cl,2)}{(cc,2)} = \frac{(lx'')}{(cc,2)}$$

wo

$$(aa) = Q + N^2 - (pp) = N(N+N'+N'')$$
$$(bb,1) = Q' + N'^2 - (p'p') = N'(N+N'+N'')$$
$$(cc,2) = Q'' + N''^2 - (p''p'') = N''(N+N'+N'')$$

sind, und

$$\begin{matrix} (pp), & (pp'), & (pp'') \\ & (p'p'), & (p'p'') \\ & & (p''p'') \end{matrix}$$

so wie N, N', N'' eben so wie im allgemeinen Falle zu berechnen sind.

Alle mit α, β, γ, etc. und angehängten Strichen bezeichneten Grössen werden hier Null, und zur Berechnung der Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate ergiebt sich aus dem Vorhergehenden

$$W = (ll,3) = (ll) - x(lx) - x'(lx') - x''(lx'')$$

Die allgemeinen Bedingungsgleichungen für die (pp), (pp'), etc. und für die Unbekannten selbst bestehen auch hier.

78.

Der zweite Fall, in welchem die allgemeinen Formeln von selbst in den genannten speciellen Fall übergehen, findet auf allen Stationen statt, auf welchen in jedem Gyrus alle vorhandenen Richtungen eingeschnitten

worden sind, und man in jedem Gyrus für sich allen Beobachtungen dasselbe Gewicht beilegen kann. Da in diesem Falle

$$\begin{aligned} p &= p' = p'' = \text{etc.} \\ p_{,} &= p'_{,} = p''_{,} = \text{etc.} \\ p_{,,} &= p'_{,,} = p''_{,,} = \text{etc.} \end{aligned}$$

u. s. w. ist, so giebt die Gleichung (9) schon zu erkennen, dass

$$x = \frac{(lx)}{p+p_{,}+p_{,,}+\ldots}, \quad x' = \frac{(lx')}{p+p_{,}+p_{,,}+\ldots}, \quad x'' = \frac{(lx'')}{p+p_{,}+p_{,,}+\ldots}$$

u. s. w. werden müssen, und die allgemeinen Ausdrücke des vorvor. Art. bestätigen nicht nur dieses, sondern weisen auch nach, dass in der That der genannte specielle Fall eintritt. Bezeichnet man wieder mit n die Summe aller Richtungen, so werden jetzt

$$P = np, \quad P_{,} = np_{,}, \quad P_{,,} = np_{,,}, \text{ etc.}$$
$$Q = Q' = Q'' = \text{etc.} = p + p_{,} + p_{,,} + \ldots$$

und Folge davon ist, dass sich

$$\begin{aligned} (pp) = (pp') = (pp'') &= \text{etc.} = \frac{Q}{n} \\ (p'p') = (p'p'') &= \text{etc.} = \frac{Q}{n} \\ (p''p'') &= \text{etc.} = \frac{Q}{n} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

und

$$N = N' = N'' = \text{etc.} = \sqrt{\frac{Q}{n}}$$

ergeben, die Coefficienten der Endgleichungen werden daher

$$(aa) = (bb,1) = (cc,2) = \text{etc.} = Q$$

und alle übrigen Coefficienten derselben werden Null. Diese Gleichungen gehen daher über in

$$Qx = (lx), \quad Qx' = (lx'), \quad Qx'' = (lx''), \text{ etc.}$$

woraus

$$\begin{aligned} x &= \frac{(lx)}{p+p_{,}+p_{,,}+\ldots} \\ x' &= \frac{(lx')}{p+p_{,}+p_{,,}+\ldots} \\ x'' &= \frac{(lx'')}{p+p_{,}+p_{,,}+\ldots} \end{aligned}$$

u. s. w. hervorgehen. w. z. b. w.

Wenn alle Gewichte einander gleich gesetzt werden dürfen, so gehen diese Ausdrücke in die arithmetischen Mittel aus den Beobachtungen einer jeden Richtung über.

Alle mit α, β, γ, etc. bezeichneten Grössen werden wieder Null, und ausserdem noch

$$(ll,n) = 0$$

Diese Resultate gelten wie gross auch die Anzahl der Richtungen ist, die den Forderungen dieses Artikels gemäss eingeschnitten worden sind.

79.

Zu den speciellen Fällen die vorkommen können gehört noch, abgesehen von den in den beiden nächstvorhergehenden Artikeln betrachteten, der Fall, dass auf der einen oder anderen Station mit den Richtungen nach den Dreieckspunkten zugleich Richtungen nach anderen Gegenständen, die keinen Dreieckspunkten angehören, beobachtet worden sind. Es können z. B. die Azimuthe dieser Gegenstände genau bestimmt sein, und man will sich derselben daher zur Orientirung des Dreiecksnetzes bedienen; es können auch andere Ursachen die Mitbestimmung solcher Punkte veranlasst haben, wie man weiter unten sehen wird.

Um in diesem Falle die Rechnungen möglichst abzukürzen, ist nichts weiter zu thun wie diese überzähligen Richtungen, wie ich sie nennen will, aus der natürlichen Reihenfolge der Richtungen auszuheben und ihnen die letzten Stellen in der Reihenfolge aller Richtungen der betreffenden Station zuzutheilen. Die Berechnung ist darauf eben so wie sonst auszuführen, und man erlangt durch diese Anordnung den Vortheil, dass in dem zweiten Theil der Auflösung diese überzähligen Richtungen so wenig wie möglich eintreten.

80.

Betrachten wir nun wieder den allgemeinen Fall, den auch der vor. Art. in sich schliesst, in welchem nicht jeder Gyrus, oder kein Gyrus, alle Richtungen enthält, dann sind zuerst in den Ausdrücken für (pp), (pp'), etc. die Gewichte der fehlenden Einstellungen Null zu machen, und demgemäss die numerischen Werthe dieser Grössen zu berechnen. Wenn die Beobachtungen so beschaffen sind, dass man die

Gewichte aller Einstellungen auf der Station einander gleich, und in Folge dessen = 1 setzen kann, (und dieser Fall kommt gewöhnlich vor, weil man selten im Stande ist etwaige Unterschiede in der Güte der Beobachtungen hinreichend genau durch Zahlen ausdrücken zu können,) so werden die Bedeutungen der Hülfsgrössen einfacher als im Art. 67 angegeben ist. Es werden alsdann

P die Anzahl der Einstellungen des ersten Gyrus,
$P_{,}$ » » » » » zweiten »

u. s. w.

Q die Anzahl der Einstellungen der Richtung x,
Q' » » » » » » x',

u. s. w.

(lu) die Summe der im ersten Gyrus durch die Einstellungen erhaltenen Werthe,

$(lu_{,})$ die Summe der im zweiten Gyrus durch die Einstellungen erhaltenen Werthe,

u. s. w.

(lx) die Summe der für x durch die Einstellungen erhaltenen Werthe,
(lx') » » » » x' » » » » »

u. s. w. Mit Rücksicht auf diese Bedeutungen der Hülfsgrössen ist es immer leicht die Werthe der Coefficienten (aa), etc. zu berechnen, aber es ist die Berechnung derselben gar nicht schwieriger, wenn p, $p_{,}$, etc. etc. verschiedene Werthe haben, vorausgesetzt dass diese ganze Zahlen sind, und diesen Fall kann man oft herbeiführen, und zur Abkürzung der Rechnung benutzen.

Wenn auf einer Station viele Gyri beobachtet worden sind, so wird es nicht ausbleiben, dass eine Anzahl von Gyri vorkommen, in welchen dieselben Punkte eingeschnitten worden sind, eine andere Anzahl in welchen ganz oder zum Theil andere Punkte, aber wieder in jedem Gyrus dieselben, u. s. w. Vorausgesetzt nun, dass man das Gewicht einer jeden Einstellung = 1 setzt, kann man aus jeder dieser Gruppen von Gyris zuerst das arithmetische Mittel nehmen, und dieses in der folgenden Rechnung so behandeln, als wäre dessen Gewicht gleich der Anzahl der Gyri, aus welchen es entstanden ist. Man kürzt dadurch die Rechnung wesentlich ab, ohne an der Strenge derselben etwas zu vergeben. Die so entstehenden Gewichte sind selbstverständlich ganze Zahlen, und es sind nun mit Rücksicht auf diese die Hülfsgrössen zu

berechnen. Wenn z. B. die erste Gruppe das arithmetische Mittel aus m Gyris ist, so setze man

$$p = p' = p'' = \text{etc.} = m\,, \quad \text{und} \quad P = \mu m$$

wenn μ die Anzahl der Richtungen ist, die in diesen Gyris eingeschnitten worden sind, u. s. w. Wenn in den Gyris, in welchen x vorkommt, diese Gewichte

$$p = m\,,\quad p_{,} = m_{,}\,,\quad p_{,,} = m_{,,}\,,\ \text{etc.}$$

sind, so wird

$$Q = m + m_{,} + m_{,,} + \ldots$$

u. s. w. und auf ähnliche Art verfährt man bei der Berechnung der mit (lx), etc. und (pp), etc. bezeichneten Grössen. Man kann hiebei noch bemerken, dass man durch die im Art. 68 gegebenen Gleichungen

$$P + P_{,} + P_{,,} + \ldots = Q + Q' + Q'' + \ldots$$
$$(lx) + (lx') + (lx'') + \ldots = 0$$

eine Controle der numerischen Rechnung erhält. Man braucht hier nicht die Division, die zur Erlangung des arithmetischen Mittels erforderlich ist, auszuführen, sondern kann sogleich die Summe dieser Gyri ansetzen, die unmittelbar zur Berechnung der mit (lx), (lx'), etc. bezeichneten Grössen dienen.

81.

Es ist hier der Ort die Betrachtung des Falles einzuschalten, in welchem nicht die Richtungen, sondern statt dessen unmittelbar die Winkel zwischen den Dreieckspunkten beobachtet worden sind. Es kann dieser Fall wohl noch hie und da bei neueren Triangulationen vorkommen, aber wenn man ältere Triangulationen zu berechnen oder zu untersuchen hat, so findet man denselben immer vor.

Nehmen wir zuerst den Fall an, dass nur die von einander unabhängigen Winkel auf der Station beobachtet sind, so hindert nichts die durch diese Beobachtungen erhaltenen Werthe derselben mit y, y', y'', etc. zu bezeichnen, und hiemit wird die Aufgabe sofort auf den speciellen Fall des Art. 55 hingeführt. Da jetzt sehr wohl die verschiedenen Winkel verschiedene Gewichte haben können, indem die Beobachtung des einen mehrmals wiederholt worden sein kann wie die irgend eines anderen, so sind demgemäss die a. a. O. vorkommenden, mit p, p', p'', bezeichneten Gewichte zu bestimmen.

Nehmen wir dagegen an, dass ausser den einzelnen Winkeln auch Winkel beobachtet worden sind, in welchen jene enthalten sind, wie die Ergänzung aller übrigen Winkel zum Umkreise, oder Summen zweier oder mehrerer einzelner Winkel, so entstehen hieraus Bedingungsgleichungen, die nicht zu denen gehören, die das Dreiecksnetz an sich darbietet, und die ich daher locale Bedingungsgleichungen nennen will. Verweist man diese Bedingungsgleichungen in den zweiten Theil der allgemeinen Auflösung, wie bisher immer geschehen ist, so bleibt der specielle Fall des Art. 55 zwar bestehen, aber der zweite Theil der Auflösung wird unnöthigerweise verlängert. Da aber die Berechnung dieses zweiten Theils, in den Fällen, wo die Anzahl der Bedingungsgleichungen gross ist, bei Weitem die grössere Arbeit bei der Ausgleichung der Beobachtungen eines Dreiecksnetzes verursacht, so ist es von wesentlichem Vortheil diesen nicht unnöthiger Weise zu verlängern. Die Aufnahme der localen Bedingungsgleichungen in diesen zweiten Theil der Auflösung ist aber eine unnöthige Verlängerung desselben, da sie auf einfache Weise in dem ersten Theile berücksichtigt werden können. Zwar hört alsdann die Auflösung auf, in Bezug auf die betreffenden Stationen, dem speciellen Falle des Art. 55 anzugehören, aber die kleine Vermehrung des ersten Theils der Auflösung, die dadurch entsteht, wird bei Weitem durch die Abkürzung des zweiten Theils aufgewogen.

Man kann jeden gemessenen Winkel in zwei Richtungen zerlegen, oder als den Unterschied von zwei Richtungen betrachten, von welchen die eine ganz willkührlich ist. Jeder gemessene Winkel lässt sich daher wie ein Gyrus von zwei Richtungen betrachten, und stellt man alle auf einer Station beobachteten Winkel in dieser Form auf, und löst die dadurch erhaltenen Gleichungen den Erklärungen des Vorhergehenden gemäss auf, so ergeben sich die Werthe von y, y', y'', etc. in welchen die localen Bedingungsgleichungen volle Berücksichtigung erfahren haben, und daher im zweiten Theil der Auflösung nicht beachtet zu werden brauchen.

Man kann hiebei noch Folgendes bemerken. Nimmt man die vorläufigen Werthe der den unabhängigen Winkeln entsprechenden Richtungen so an, dass sie den Beobachtungen vollständig entsprechen, so werden alle diesen Richtungen zukommenden Werthe der mit l bezeichneten Grössen gleich Null, und in so fern keine abhängigen Winkel auf der betreffenden Station beobachtet worden sind, führt die im Vorher-

gehenden erklärte Auflösung unmittelbar auf die Werthe $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$, etc., wodurch der specielle Fall des Art. 55 wieder herbei geführt ist. Sind aber auf dieser Station auch abhängige Winkel beobachtet, dann werden in den aus diesen entspringenden Gyri die beiden dazu gehörigen l nicht gleich Null, und die aus der Auflösung aller Gleichungen hervorgehenden Werthe von y, y', etc. werden im Allgemeinen auch nicht mehr gleich Null.

82.

Ehe ich zur Anwendung des zweiten Theils der allgemeinen Auflösung auf die Geodäsie übergehe, will ich das Vorhergehende durch ein Beispiel erläutern, welches ich aus der von mir vor ohngefähr 30 Jahren zum Zweck einer staatsöconomischen Landesvermessung ausgeführten Triangulation des hiesigen Herzogthums entlehne. Selbstverständlich würde es zu weit führen, wenn ich hier diese ganze Triangulation anführen und berechnen wollte, ich muss mich damit begnügen aus derselben einige zusammenhängende Dreiecke auszuwählen, und die Berechnung dieser, als ein Ganzes betrachtet, zu zeigen.

Es wurden bei dieser Triangulation auf allen Stationen nicht die Winkel für sich, sondern die Richtungen eingeschnitten und beobachtet, und da auf fast jeder Station eine grosse Anzahl von Punkten einzuschneiden war, so wurden in keinem Gyrus Alle eingeschnitten, sondern, wie im Art. 64 erklärt worden ist, verfahren, und möglichst viele Combinationen der einzuschneidenden Punkte gebildet, deren jede einen Gyrus bildete. Da demzufolge die oft genannte Gaussische Auflösung auf die Berechnung dieses Dreiecksnetzes nicht angewandt werden konnte, so entwarf ich schon damals die hier erklärte, wandte sie bei der Berechnung an, und veröffentlichte die Endformeln ohne deren Ableitung im 16. Bande der Schum. A. N.

Ich führe noch an, dass zu dieser Triangulation blos 8zöllige Theodoliten angewandt wurden, deren Nomen unmittelbar 10" gaben.

83.

Aus der oben genannten Triangulation werde ich nun für das hier zu berechnende Beispiel die fünf Stationen, oder Dreieckspunkte, Seeberg, Inselsberg, Wachsenburg, Warte, Hörselsberg auswählen und berechnen.

Ich bemerke hiezu im Voraus, dass die Bezeichnung der Richtungen und anderer in Betracht kommenden Grössen mit Buchstaben, wie im Vorhergehenden geschehen ist, wohl in der Ableitung der Relationen, auf die die Auflösung der Aufgabe führt, zweckmässig ist, dass man sich aber in der Anwendung, und namentlich bei grossen Triangulationen, weit zweckmässiger der Zahlen zur Bezeichnung bedient. Es sollen daher auch hier diese und zwar so angewandt werden, dass nicht nur jede Station, sondern auch jede Richtung mit einer Zahl bezeichnet wird. Die oben genannten fünf Stationen werde ich mit (1), (2), (3), (4), (5) bezeichnen, so dass

Seeberg . . . (1)
Warte . . . . (2)
Inselsberg . . . (3)
Wachsenburg . . (4)
Hörselsberg . . (5)

zur Bezeichnung erhält. Die Richtungen nach den Dreieckspunkten werde ich gleichfalls mit den fortlaufenden Zahlen so bezeichnen, dass auf jeder Station mit der (1) angefangen wird Wo es nöthig wird die Stationen zu unterscheiden, kann die Stationsnummer der Richtungsnummer rechts unten als Index angehängt werden, so dass allgemein $(r)_s$, wo r die Richtungsnummer und s die Stationsnummer bedeutet, die Bezeichnung irgend einer Richtung wird. Ins Besondere sollen im Folgenden

$(r)_s$ der vorläufig angenommene Werth irgend einer Richtung

$w(r)_s$ die im ersten Theile der Auflösung zu berechnende Verbesserung derselben,

$y(r)_s$ der hieraus folgende Werth derselben bedeuten, so dass

$$y(r)_s = (r)_s + w(r)_s$$

wird. Die Coefficienten (aa), (ab), etc. (bb), etc. des Vorhergehenden sollen, in so weit sie Dreieckspunkten angehören, mit

$$(1,1)_s\,,\ (1,2)_s\,,\ \text{etc.}\ (2,2)_s$$

bezeichnet, und überhaupt diese Bezeichnungsart auch auf andere Grössen ausgedehnt werden. Im ersten Theile der Auflösung wird man den Index s grösstentheils weglassen können, und nur bei jeder Station allgemein angeben.

84.

Mit der Station Seeberg = (1) anfangend, werde ich mit Weglassung der Stationsnummer den hier von den dort überhaupt beobachteten Richtungen aufzunehmenden die folgenden Bezeichnungen geben,

(1)	=	Richtung	nach	Station	(3)
(2)	=	»	»	»	(5)
(4), (3)	=	»	»	»	(2)
(3), (4)	=	»	»	»	(4)
(a)	=	»	nach Trügleben		
(b)	=	»	»	kl. Rettbach.	

Die Richtungen (a) und (b), die hier mit aufgenommen worden sind, gehören keinem der übrigen hier in Betracht zu ziehenden Dreieckspunkten an, und es tritt daher hier der Fall ein, der im Art. 79 erläutert wurde. Diese beiden Richtungen habe ich, wie dort vorgeschrieben wurde, aus ihrer natürlichen Reihenfolge herausgenommen, und den übrigen nachgestellt. Es ist nothwendig zu erklären, weshalb diese beiden Richtungen hier mit aufgenommen worden sind.

Statt auf dem Dache der vormaligen Sternwarte auf dem Seeberge zu beobachten, wie früher geschehen ist, zog ich vor die Theodoliten auf in die Erde eingemauerte Steinpfeiler aufzustellen, da aber hier das neben liegende Gebäude der Sternwarte fast 180° des Horizonts verdeckte, so mussten zwei solcher Steinpfeiler, einer nördlich und einer südlich vom Gebäude angewandt werden. Um unter diesen Umständen eine sichere Verbindung zwischen den von jedem dieser beiden Standpunkte aus beobachteten Richtungen herzustellen, wurden mehrere Gegenstände aufgesucht, die auf beiden Standpunkten sichtbar waren, und häufig mit eingeschnitten. Solche sind die oben mit (a) und (b) bezeichneten. Die Wachsenburg war übrigens auch von beiden Standpunkten aus sichtbar.

Da hier nicht bezweckt wird, die definitive Berechnung dieser Triangulation zu geben, sondern einen Auszug aus derselben als Erläuterung des Vorhergehenden aufzustellen, so halte ich es nicht für nothwendig die Beobachtungen jedes einzelnen Gyrus anzugeben, sondern begnüge mich die Summen der Gruppen, nachdem davon die vorläufig angenommenen Werthe der Richtungen abgezogen worden sind, anzu-

führen. Diese sind, nachdem die erforderlichen Centrirungen berücksichtigt worden waren, nebst den vorläufig angenommenen Werthen der Richtungen in dem folgenden Täfelchen enthalten.

Station (1).

	r	Vorl. Werthe.	Anzahl d. Beob. u. die Summen dieser.				
			9	3	1	3	6
	(1)	63°14′10″	—	5″60	—	—	—
	(2)	96 29 52	—	—	2″40	—	—
(4)	(3)	215 58 17	—	—	—	—	4.00
(3)	(4)	308 51 37	—	—	—	4″60	—
	(a)	106 2 29	3″30	3.85	1.70	3.20	2.20
	(b)	269 57 23	1.60	—	—	—	—
		S =	4.90	9.45	4.10	7.80	6.20
		M =	2.45	4.725	2.050	3.900	3.100

	r	7	9	5	1	2	18	5	4
	(1)	—	—	0″20	—	—	—	—	—
	(2)	—	—	15.25	1″15	—	—	—	—
(4)	(3)	3″80	—	—	—	0″20	—	0″70	3″60
(3)	(4)	—	3″10	—	3.42	3.40	27″60	—	1.55
	(a)	—	—	—	—	—	17.70	13.20	—
	(b)	2.75	1.03	—	—	—	0.80	0.15	3.65
	S	6.55	4.13	15.45	4.57	3.60	46.10	14.05	8.80
	M	3.275	2.065	7.225	2.285	1.800	15.367	4.683	2.933

	r	2	1	2	1	2	4	2	2
	(1)	—	3″65	5″40	5″30	0″00	2″15	—	5″90
	(2)	—	—	4,80	4.35	10.20	—	7″00	2.30
(4)	(3)	1″10	—	—	—	—	—	—	—
(3)	(4)	0.20	—	—	—	—	4.10	0.00	0.62
	(a)	4.50	7.70	3.40	—	7.88	3.30	3.20	4.60
	(b)	—	2.12	—	3.05	1.70	6.10	7.00	—
	S	5.80	13.47	13.60	12.70	19.78	15.65	17.20	13.42
	M	1.933	4.490	4.533	4.233	4.945	3.912	4.300	3.355

Ausser den Nummern der Richtungen, und den vorläufigen Werthen derselben giebt diese Tafel in der obersten Zeile die Anzahl der gleichartigen Gyri, deren Summen, nach Abzug der vorläufigen Werthe

darunter stehen. Durch Hinzufügung einer angemessenen Constante zu den Beobachtungen einer jeden Gruppe kann man bewirken, dass jede dieser Summen klein und positiv wird.

Da allen Beobachtungen hier derselbe Werth beigelegt werden wird, so sind die Zahlen der obersten Zeilen zugleich die Gewichte der betreffenden Gruppe von Gyris.

Neben der Bezeichnung S folgt die Summe der Summen jeder Columne, und neben M das arithmetische Mittel derselben.

Es muss nun jedes dieser arithmetischen Mittel von den Zahlen derselben Columne abgezogen werden, und diese Unterschiede dürfen nicht weiter geändert werden. Sie sind in der folgenden Tafel aufgestellt, und zwar in entgegengesetzter Anordnung, nemlich so, dass alle Zahlen, die derselben Gruppe von Gyris angehören, in Einer Zeile stehen. Dieser Tafel sind überdies die Gewichte p, und die Zahlenwerthe P, $P_{,}$, etc. Q, Q', etc. $\frac{p^2}{P}$, $\frac{p_{,}^2}{P'}$, etc. und (lx), (lx'), etc. einverleibt, die nach den im Vorhergehenden dafür entwickelten Regeln berechnet worden sind. Die Gruppen von Gyris habe ich mit laufenden Nummern versehen.

pl''' pl''

Nr.	pl	pl'	pl''	pl'''	pl^{IV}	pl^{V}	p	P	$p^2 : P$
1	—	—	—	—	+0″85	−0″85	9	18	4.5
2	+0″875	—	—	—	−0.875	—	3	6	1.5
3	—	+0″35	—	—	−0.35	—	1	2	0.5
4	—	—	—	+0″70	−0.70	—	3	6	1.5
5	—	—	+0″90	—	−0.90	—	6	12	3.0
6	—	—	+0.525	—	—	−0.525	7	14	3.5
7	—	—	—	+1.035	—	−1.035	9	18	4.5
8	−7.025	+7.025	—	—	—	—	5	10	2.5
9	—	−1.135	—	+1.135	—	—	1	2	0.5
10	—	—	−1.60	+1.60	—	—	2	4	1.0
11	—	—	—	+12.235	+2.332	−14.567	13	39	4.333
12	—	—	−3.983	—	+8.516	−4.533	5	15	1.667
13	—	—	+0.667	−1.883	—	+0.716	1	3	0.333
14	—	—	−0.833	−1.733	+2.566	—	2	6	0.667
15	−0.84	—	—	—	+3.21	−2.37	1	3	0.333
16	+0.866	+0.267	—	—	−1.133	—	2	6	0.667
17	+1.067	+0.116	—	—	—	−1.183	1	3	0.333
18	−4.945	+5.255	—	—	+2.935	−3.245	2	8	0.5
19	−1.763	—	—	+0.188	−0.613	+2.188	1	4	0.25
20	—	+2.70	—	−4.30	−1.10	+2.70	2	8	0.5
21	+2.545	−1.055	—	−2.735	+1.245	—	2	8	0.5
(lx), etc.	−9″220	+13″523	−4″324	+6″742	+15″983	−22″704		195	
Q, etc.	17	16	23	36	52	51			

+6″742 −4″323
36 23

Die Berechnung der (pp), (pp'), etc. gab die nachfolgenden Werthe derselben,

		p	p'	p'' (p''')	p''' (p'')	p^{IV}	p^{V}
	p	6.5833	4.5	0	0.75	3.75	1.4167
	p'		6.0	0	1.5	2.6667	1.3333
p'''	p''			10.1667	2.0	5.3333	5.5
p''	p'''				14.0833	7.75	9.9167
	p^{IV}					20.4167	12.0833
	p^{V}						20.75

Da hier (pp'') und $(p'p'')$ Null sind, so tritt der im Art. 76 vorgesehene Fall ein, dass die Bestimmung der N, N', N'' bei der oben gewählten Reihenfolge der Richtungen unmöglich wird, aber man sieht sogleich, dass die Möglichkeit dieser Bestimmung wieder herbei geführt wird, wenn man die Aufeinanderfolge der Richtungen (3) und (4) umwechselt. Man braucht deshalb die Täfelchen nicht umzuschreiben, sondern die Andeutungen, die ich oben hinzugefügt habe, genügen vollständig. Nur muss man jetzt die neuen Nummern dieser beiden Richtungen bis ans Ende der ganzen Rechnung unverändert beibehalten. Diesem entsprechend ergaben sich nun die numerischen Werthe der N, N', etc. wie folgt,

$$N = 1.5\,, \quad N' = 3.0$$
$$N'' = 0.5\,, \quad N''' = 0$$
$$N^{IV} = 2.5\,, \quad N^{V} = 0.9444$$

und die der Coefficienten (aa), $(bb,1)$, etc., wobei jedoch zu bemerken ist, dass ich bez. 1, 2, 3, 4, a, b statt a, b, c, d, e, f geschrieben habe, und damit fortfahren werde, da mir in der Anwendung diese Bezeichnung zweckmässiger scheint wie jene, die nur bei der Herleitung der Formeln den Vorzug verdiente. In der Folge muss man daher unter

$$\begin{array}{lllll} (1,1), & (1,l), & (2,2,1), & (2,3,1), & \text{etc.}\ (2,l,1) \\ & & (3,3,2), & (3,4,2), & \text{etc.}\ (3,l,2) \\ & & & (4,4,3), & \text{etc.}\ (4,l,3) \\ & & & & \text{etc.} \end{array}$$

jene Coefficienten verstehen.

	a	b	l
0	0	0	— 9″220
0	4.8333	1.5	+13.523
−2.0	—6.5	—9.4444	+ 6.742
12.8333	—5.3333	—5.5	— 4.324
	37.8333	—9.7222	+15.983
		31.1420	—22.704
			174.367

der Gleichungen, die von diesen Coefficien-
gaben sich nach und nach in vollständiger Auf-

		χ'
		+(9.86207)
δ''	ε''	χ''
—(9.40550),	—(8.89734),	—(9.85233)
δ'''	ε'''	χ'''
+(9.46721),	+(9.62948),	—(9.48309)
δ^{IV}	ε^{IV}	χ^{IV}
+(9.67011),	+(9.70073),	+(9.46777)
	ε^{V}	χ^{V}
	+(9.69573),	—(9.60243)
		χ^{VI}
		+(0.01274)

mmern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen sind, ferner

					(1,l)
					—9.220
(2,2,1)			(2,a,1)	(2,b,1)	(2,l,1)
19.0			+4.8333,	+1.5,	+13.523
	(3,3,2)	(3,4,2)	(3,a,2)	(3,b,2)	(3,l,2)
	22.1667,	—2.0,	—6.5,	—9.4444,	+6.746
		(4,4,3)	(4,a,3)	(4,b,3)	(4,l,3)
		12.6528,	—5.9198,	—6.3528,	—3.715
			(aa,4)	(ab,4)	(al,4)
			31.9281,	—15.8451,	+12.782
				(bb,5)	(bl,5)
				15.9468,	—16.422
					(ll,6)
					132.861

und ausserdem noch

$$\beta''' = 0\,,\quad \beta^{v} = -\,(9.40550)\,,\quad \beta' = -\,(9.31217)$$
$$\gamma^{v} = +\,(9.52562)\,,\quad \gamma' = +\,(9.80472)$$
$$\delta' = +\,(9.86583)$$

Hieraus erhielt ich die Verbesserungen der Richtungen und die Werthe derselben nach der Ausgleichung auf der Station wie folgt:

$$\begin{aligned} w(1) &= -\,0''728\,, & y(1) &= 63^{\circ}40'\ 9''272 \\ w(2) &= +\,0.821\,, & y(2) &= 96\ 29\ 52.821 \\ w(3) &= -\,0.245\,, & y(3) &= 305\ 51\ 36.755 \\ w(4) &= -\,0.862\,, & y(4) &= 215\ 58\ 16.138 \\ w(a) &= -\,0.111\,, & y(a) &= 106\ \ 5\ 28.889 \\ w(b) &= -\,1.030\,, & y(b) &= 269\ 57\ 21.970 \end{aligned}$$

womit diese Rechnung geschlossen ist.

85.

Da ich bei der Berechnung der Ausgleichung auf der Station (1) ausführlich gewesen bin, so kann ich die übrigen Stationen kürzer darstellen. Für die Beobachtungen auf der Station (2) = Warte wurden die folgenden Bezeichnungen angewandt

(1) Richtung nach der Station (1)
(2) » » » » (3)
(3) » » » » (5)
(4) » » » » (4)

Ueberzählige Punkte sind hier nicht vorhanden. Die beiden Täfelchen, die die Vorbereitung der Beobachtungen enthalten, sind hier die folgenden.

Station (2).

r	Vorl. Werthe	Anzahl d. Beob. u. die Summen dieser.							
		4	6	15	12	2	2	1	2
(1)	27°55′ 7″	2″80	4″20	2″50	—	3″70	—	2″10	3″20
(2)	45 16 35	6.20	—	—	—	—	4″00	3.60	2.95
(3)	64 53 36	—	8.00	—	21″50	4.70	7.60	1.90	7.20
(4)	342 17 12	—	—	3.55	0.00	0.10	3.60	—	5.60
	S	9.00	12.20	6.05	21.50	8.50	15.2	7.60	18.95
	M	4.50	6.10	3.025	10.75	2.833	5.067	2.533	4.738

Nr.	pl	pl'	pl''	pl'''	p	P	$p^2 : P$
1	—1″700	+1″700	—	—	4	8	2.0
2	—1.900	—	+1″900	—	6	12	3.0
3	—0.525	—	—	+0″525	15	30	7.5
4	—	—	+10.750	—10.750	12	24	6.0
5	+0.867	—	+1.866	—2.733	2	6	0.6667
6	—	—1.067	+2.533	—1.466	2	6	0.6667
7	—0.433	+1.066	—0.633	—	1	3	0.3333
8	—1.538	—1.787	+2.462	+0 863	2	8	0.5
(lx), etc.	—5″229	—0″088	+18″878	—13″561		97	
Q, etc.	30	9	25	33			

Hieraus ergeben sich erstens die folgenden numerischen Werthe der (pp), (pp'), etc.

	p	p'	p''	p'''
p	14.0	2.8333	4.5	8.6667
p'		3.5	1.5	1.1667
p''			11.1667	7.8333
p'''				15.3333

ferner

$$N = 2.9115,\quad N' = 0.9718,\quad N'' = 1.5435,\quad N''' = 2.9726$$

und die (1,1), (2,2,1), etc.

	1	2	3	4	l
1	24.5	0	0	0	—5″229
2		6.4444	0	1.7272	—0.088
3			16.2156	—3.2451	+18.878
4				26.5032	—13.561
l					40.558

Die Auflösung der Gleichungen giebt die Hülfsgrössen

$$(1,1) = 24.5\,,\qquad (2,2,1) = 6.4444\,,\qquad (3,3,2) = 16.2156$$
$$(4,4,3) = 25.3936\,,\qquad (ll,4) = 13.713\,,$$
$$\log\beta'' = 9.42690n,\quad \log\gamma''' = 9.30129$$

die weiter unten wieder gebraucht werden, nebst

$$w(1) = -0''213\,,\quad y(1) = 27^\circ 55'\ 6''787$$
$$w(2) = +0.089\,,\quad y(2) = 45\ 16\ 35.089$$
$$w(3) = +1.087\,,\quad y(3) = 64\ 53\ 37.087$$
$$w(4) = -0.384\,,\quad y(4) = 342\ 17\ 11.616$$

86.

Die auf der Station (3) = Inselsberg beobachteten Richtungen sind wie folgt bezeichnet worden,

(1) . . Richtung nach der Station (5)
(2) . . » » » » (1)
(3) . . » » » » (4)

und die Beobachtungen gaben die folgenden Zahlenwerthe

Station (3).

r	Vorl. Werthe	Anzahl d. Beob. u. die Summen ders.			
		14	5	9	5
(1)	179°43′ 9″	9″40	4″50	—	2″10
(2)	243 45 35	1.70	—	1″00	3.39
(3)	268 36 50	—	2.90	1.18	5.19
	S	11.10	7.40	2.18	10.68
	M	5.550	3.700	1.090	3.560

Nr.	pl	pl'	pl''	p	P	$p^2 : P$
1	+3″850	−3″850	—	14	28	7.0
2	+0.800	—	−0″800	5	10	2.5
3	—	−0.090	+0.090	9	18	4.5
4	−1.460	−0.170	+1.630	5	15	1.6667
(lx), etc.	+3″190	−4″110	+0″920		71	
Q, etc.	24	28	19			

Hiemit bekommt man

	p	p'	p''
p	11.1667	8.6667	4.1667
p'		13.1667	6.1667
p''			8.6667

$$N = 2.4199\,,\quad N' = 3.5818\,,\quad N'' = 1.7219$$

$$(1,1) = 18.6893$$
$$(2,2,1) = 27.6600$$
$$(3,3,2) = 13.2982\,,\ (ll) = 3.340\,,\ (ll,3) = 2.120$$

$$w(1) = +\,0''171\,,\quad y(1) = 179^0 43'\ 9''171$$
$$w(2) = -\,0.149\,,\quad y(2) = 243\ 45\ 34.851$$
$$w(3) = +\,0.069\,,\quad y(3) = 268\ 36\ 50.069$$

87.

Die auf der Station (4) = Wachsenburg beobachteten Richtungen sind wie folgt bezeichnet worden,

(1) .. Richtung nach der Station (3)
(2) .. » » » » (1)
(3) .. » » » » (2)

und die Beobachtungen gaben die folgenden Zahlenwerthe,

Station (4).

r	Vorl. Werthe	Anzahl d. Beob. u. d. Summen ders.			
		9	5	7	1
(1)	88°37′44″	5″85	2″50	—	1″60
(2)	128 58 0	0.00	—	0.00	1.90
(3)	170 26 40	—	1.80	21.02	0.00
	S	5.85	4.30	21.02	3.50
	M	2.925	2.150	10.510	1.167

Nr.	pl	pl'	pl''	p	P	$p^2 : P$
1	+2″925	−2″925	—	9	18	4.5
2	+0.35	—	−0″35	5	10	2.5
3	—	−10.51	+10.51	7	14	3.5
4	+0.433	+0.733	−1.166	1	3	0.3333
(lx), etc.	+3.708	−12″702	+8″994		45	
Q, etc.	15	17	13			

	p	p'	p''
p	7.3333	4.8333	2,8333
p'		8.3333	3.8333
p''			6.3333

$$N = 1.8901\,,\quad N' = 2.5572\,,\quad N'' = 1.4991$$

$$(1,1) = 11.2393$$

$$(2,2,1) = 15.2061$$

$$(3,3,2) = 8.9139\,,\quad (ll) = 35.594\,,\quad (ll,3) = 14.686$$

$$w(1) = +\,0''330\,,\quad y(1) = 88^\circ 37' 44''330$$

$$w(2) = -\,0.835\,,\quad y(2) = 128\ 57\ 59.165$$

$$w(3) = +\,1.009\,,\quad y(3) = 170\ 26\ 41.009$$

88.

Die auf der Station (5) = Hörselsberg beobachteten Richtungen sind wie folgt bezeichnet worden,

(1) .. Richtung nach der Station (2)
(2) .. » » » » (1)
(3) .. » » » » (3)

und die Beobachtungen gaben die folgenden Zahlenwerthe,

Station (5).

r	Vorl. Werthe	Anzahl d. Beob. u. d. Summen ders.		
		9	5	11
(1)	252°59′37″	8″00	2″50	—
(2)	276 32 47	0.00	—	0″00
(3)	359 40 37	—	0.65	31.15
	S	8.00	3.15	31.15
	M	4.00	1.575	15,575

Nr.	pl	pl'	pl''	p	P	$p^2 : P$
1	+4″00	−4″00	—	9	18	4.5
2	+0.925	—	−0″925	5	10	2.5
3	—	−15.575	+15.575	11	22	5.5
(lx), etc.	+4.925	−19.575	+14.650		50	
Q, etc.	14	20	16			

	p	p'	p''
p	7.0	4.5	2.5
p'		10.0	5.5
p''			8.0

$$N = 1.4302\,,\quad N' = 3.1464\,,\quad N'' = 1.7480$$

$$(1,1) = 9.0455$$
$$(2,2,1) = 19.9000$$
$$(3,3,2) = 11.0556\,,\quad (ll) = 48.002\,,\quad (ll,3) = 6.652$$

$$w(1) = +\,0''544\,,\quad y(1) = 252^0 59' 37''544$$
$$w(2) = -\,0.984\,,\quad y(2) = 276\ 32\ 46.016$$
$$w(3) = +\,1.325\,,\quad y(3) = 359\ 40\ 38.325$$

89.

Stellen wir nun die oben erhaltenen Resultate der Ausgleichungen auf den Stationen zusammen, und fügen die Hülfsgrössen hinzu, die im zweiten Theile der Auflösung unserer Aufgabe gebraucht worden.

Station Seeberg = (1)

$$y(1)_1 = 63^0 40'\ 9''272$$
$$y(2)_1 = 96\ 29\ 52.821$$
$$y(3)_1 = 308\ 51\ 36.755$$
$$y(4)_1 = 215\ 58\ 16.138$$
$$y(a)_1 = 106\ \ 5\ 28.889$$
$$y(b)_1 = 269\ 57\ 21.970$$

$$(1,1)_1 = (1.10266)\,,\quad (4,4,3)_1 = (1.10219)$$
$$(2,2,1)_1 = (1.27875)\,,\quad (a,a,4)_1 = (1.50417)$$
$$(3,3,2)_1 = (1.34570)\,,\quad (b,b,5)_1 = (1.20268)$$

$\beta'''_1 = 0$, $\gamma'''_1 = +(8.95533)$

$\beta^{IV}_1 = -(9.40550)$, $\gamma^{IV}_1 = +(9,52562)$, $\delta^{IV}_1 = +(9.67011)$

$\beta^{V}_1 = -(9.31217)$, $\gamma^{V}_1 = +(9.80472)$, $\delta^{V}_1 = +(9.86583)$, $\varepsilon^{V}_1 = +(9.69573)$

Station Warte = (2)

$$y(1)_2 = 27^0\ 55'\ \ 6''787$$
$$y(2)_2 = 45\ 16\ 35.089$$
$$y(3)_2 = 64\ 53\ 37.087$$
$$y(4)_2 = 342\ 17\ 11.616$$

$$(1,1)_2 = (1.38917)\,, \quad (3,3,2)_2 = (1.20993)$$
$$(2,2,1)_2 = (0.80918)\,, \quad (4,4,3)_2 = (1.40472)$$
$$\beta_2''' = -(9.42690)\,, \quad \gamma_2''' = +(9.30129)$$

Station Inselsberg = (3)

$$y(1)_3 = 179^\circ 43'\ 9''171$$
$$y(2)_3 = 243\ 45\ 34.851$$
$$y(3)_3 = 268\ 36\ 50.069$$

$$(1,1)_3 = (1.27159)$$
$$(2,2,1)_3 = (1.44185)$$
$$(3,3,2)_3 = (1.12378)$$

Station Wachsenburg = (4)

$$y(1)_4 = 88^\circ 37'\ 44''330$$
$$y(2)_4 = 128\ 57\ 59.165$$
$$y(3)_4 = 170\ 26\ 41.009$$

$$(1,1)_4 = (1.05073)$$
$$(2,2,1)_4 = (1.18201)$$
$$(3,3,2)_4 = (0.95006)$$

Station Hörselsberg = (5)

$$y(1)_5 = 252^\circ 59'\ 37''544$$
$$y(2)_5 = 276\ 32\ 46.016$$
$$y(3)_5 = 359\ 40\ 38.325$$

$$(1,1)_5 = (0.95641)$$
$$(2,2,1)_5 = (1.29889)$$
$$(3,3,2)_5 = (1.04356)$$

Zur Berechnung des mittleren Fehlers wird ausserdem noch die Summe der (ll,n) gebraucht, die ich hier mit W_0 bezeichnen will. In unserm Beispiel haben wir oben erhalten,

$$(ll,6)_1 = 132.861$$
$$(ll,4)_2 = 13.713$$
$$(ll,3)_3 = 2.120$$
$$(ll,3)_4 = 14.686$$
$$(ll,3)_5 = 6.652$$
$$W_0 = 170.032$$

Hiemit ist der erste Theil der Auflösung unserer Aufgabe vollständig beendigt.

90.

Mit dem Vorhergehenden ist zwar unser Beispiel in Bezug auf den ersten Theil der Auflösung unserer Aufgabe vollständig ausgeführt, da auch die Berechnung der mit ihren Gewichten multiplicirten Summe der der Quadrate der übrigbleibenden Fehler hinzugefügt worden ist. Ehe ich aber zum zweiten Theil der Auflösung übergehe will ich noch zeigen, wie man die im Art. 65 eingeführten, und mit u, $u_{,}$, etc. bezeichneten Grössen berechnen kann. Im Allgemeinen braucht man die Werthe dieser nicht zu kennen, allein es können Fälle eintreten, wo man sie kennen zu lernen wünscht, z. B. wenn man die von der Ausgleichung auf den Stationen herrührenden Theile der Summen der Fehlerquadrate, nicht nur durch das im Vorhergehenden dafür gegebene Verfahren, sondern auch direct berechnen will. Zur Bezeichnung der u werde ich jetzt $u(m)_s$ wählen, wo m die laufende Summe der Gruppe von Gyris, und s wieder die Stationsnummer bezeichnet. Nehmen wir nun wie früher an, dass

$$p = p' = p'' = \text{etc.}$$
$$p_{,} = p_{,}' = p_{,}'' = \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

so geben die Gleichungen (65) zur Berechnung der $u(m)_s$ den folgenden allgemeinen Ausdruck

$$u(m)_s = -\frac{p_{m-1}}{P_{m-1}} \Sigma w(r)_s$$

wo $w(r)_s$ wieder die Verbesserung der Richtungen auf den Stationen bezeichnet, und unter dem Summenzeichen nur die in der betr. Gruppe von Gyris vorhandenen Richtungen aufgenommen werden dürfen. z. B.

$$\begin{aligned}
u(1)_1 &= -\tfrac{1}{2}(w(a)_1 + w(b)_1) &&= +0''571\\
u(9)_1 &= -\tfrac{1}{2}(w(a)_1 + w(4)_1) &&= +0.021\\
u(14)_1 &= -\tfrac{1}{3}(w(3)_1 + w(4)_1 + w(a)_1) &&= +0.406\\
u(21)_1 &= -\tfrac{1}{4}(w(1)_1 + w(2)_1 + w(4)_1 + w(a)_1) &&= +0.220\\
u(1)_2 &= -\tfrac{1}{2}(w(1)_2 + w(2)_2) &&= +0.062\\
u(4)_2 &= -\tfrac{1}{2}(w(3)_2 + w(4)_2) &&= -0.352\\
u(8)_2 &= -\tfrac{1}{4}(w(1)_2 + w(2)_2 + w(3)_2 + w(4)_2) &&= -0.145\\
u(1)_3 &= -\tfrac{1}{2}(w(1)_3 + w(2)_3) &&= -0.011\\
u(4)_3 &= -\tfrac{1}{3}(w(1)_3 + w(2)_3 + w(3)_3) &&= -0.030
\end{aligned}$$

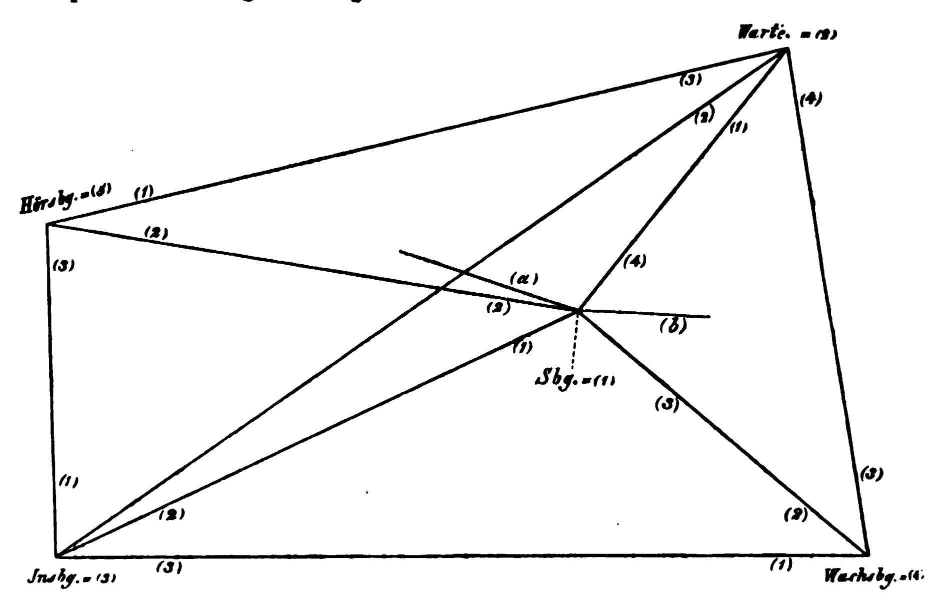
u. s. w. Wenn die oben unter den Gewichten p angenommenen Rela-

tionen nicht stattfinden, so erkennt man aus den Ausdrücken (65) leicht wie verfahren werden muss.

91.

Die Abänderungen, die der zweite Theil der Auflösung der allgemeinen Aufgabe in der Anwendung auf die Geodäsie erfährt, sind von der Beschaffenheit, dass sie am Einfachsten durch ein Beispiel eingesehen werden; es soll daher das im Vorhergehenden angefangene Beispiel sogleich fortgesetzt, und die anzuwendenden Ausdrücke sollen an den betreffenden Stellen erläutert werden.

Vor Allem sind nun die Bedingungsgleichungen, die das Dreiecksnetz liefert, aufzusuchen und aufzustellen, und dazu ist eine Figur desselben sehr dienlich, die jedoch auf keine sonderliche Genauigkeit in Betreff ihrer Verhältnisse Anspruch zu machen braucht. Es ist ausreichend, wenn sie alle Dreiecke ihrer ohngefähren Lage nach, so wie die Angaben aller beobachteten Richtungen oder Winkel enthält. Für unser Beispiel ist die folgende Figur eine solche.



Um die Zahl der vorhandenen Bedingungsgleichungen zu erhalten muss man das Dreiecksnetz als ein Polygon von eben so vielen Seiten betrachten, als Dreieckspunkte vorhanden sind, und von dem Grundsatz ausgehen, dass ein Polygon von n Seiten völlig bestimmt ist, wenn man in demselben ausser Einer Seite $2(n-2)$ von einander unabhängige

Winkel kennt. Sei nun die Anzahl aller beobachteten Richtungen m, die vor Allem so beschaffen sein müssen, dass das Dreiecksnetz in keinem seiner Punkte unbestimmt wird, und darunter q theils willkührliche Richtungen, theils solche, die nicht nach Dreieckspunkten hinzielen, dann wird die Anzahl der vorhandenen Bedingungsgleichungen

$$= m - q - 2(n - 2)$$

In unserm Beispiel ist $m = 19$, und da auf jeder Station Eine Richtung willkührlich ist, und ausserdem die zwei Richtungen $(a)_1$ und $(b)_1$ vorkommen, die nach keinem Dreieckspunkte hinzielen, so ist $q = 7$, ferner ist hier $n = 5$, und folglich sind 6 von einander unabhängige Bedingungsgleichungen vorhanden.

Die Bedingungsgleichungen, die ein Dreiecksnetz darbietet, zerfallen in zwei Gattungen, erstens in die, welche die Summen der Winkel der Drei- oder Mehrecke geben, und die man die Winkelgleichungen nennt, und zweitens in die, welche die Proportionalität der Sinusse der Winkel und der gegenüber liegenden Seiten darbietet, nachdem daraus die Seiten eliminirt worden sind; diese nennt man die Seitengleichungen. Man hat bei der Aufstellung derselben darauf zu sehen, dass keine in den übrigen enthalten sei, und dieses ist leicht zu erreichen, wenn man das Dreiecksnetz nach und nach aus einem einzigen seiner Dreiecke zusammen setzt. Das Dreieck, welches man hiebei als Grundlage wählt, kann man aus allen vorhandenen beliebig auswählen. Dieses Dreieck kann höchstens Eine Winkelgleichung geben. Knüpft man nun erst einen vierten Punkt daran, und findet in den vorhandenen Beobachtungen, dass zur Bestimmung desselben k Winkel nach demselben, und l Winkel von demselben beobachtet worden sind, so bietet er $k + l - 2$ Bedingungsgleichungen dar, unter welchen sich höchstens l Winkelgleichungen befinden, während die übrigen $k - 2$ Seitengleichungen sind. Es kann sich jedoch auch ereignen, dass die Anzahl der Winkelgleichungen kleiner wie l, und die Zahl der Seitengleichungen dem entsprechend grösser wie $k - 2$ wird. Die Anknüpfung eines fünften, sechsten, u. s. w. Punktes wird eben so behandelt, bis das ganze Dreiecksnetz erschöpft ist. Die oben angegebene Anzahl aller Bedingungsgleichungen, die man auch auf beliebige Theile des Netzes anwenden kann, gewährt eine Controle dafür, dass man nicht zu viele oder zu wenige Bedingungsgleichungen angesetzt hat.

Wenden wir diese Sätze auf die obige Figur an, indem wir vom Dreiecke (1), (3), (4) ausgehen. Da in diesem alle drei Winkel beobachtet worden sind, so giebt es die einzig mögliche Bedingungsgleichung

$$(1)_1 - (3)_1 + (3)_3 - (2)_3 + (2)_4 - (1)_4 - 180^0\ 0'\ 0''634 = 0$$

indem 0″634 der sphärische Excess dieses Dreiecks ist. Knüpfen wir hieran den Dreieckspunkt (5), so zeigt die Figur, dass nach demselben 2, und von demselben 1 Winkel beobachtet worden sind. Dieser Punkt giebt daher nur Eine Winkelgleichung, nemlich

$$(2)_1 - (1)_1 + (2)_3 - (1)_3 + (3)_5 - (2)_5 - 180^0\ 0'\ 0''528 = 0$$

Wird hierauf der Dreieckspunkt (2) angeknüpft, so zeigt die Figur, dass nach demselben 3, und von demselben 3 Winkel beobachtet worden sind. Hierauf giebt die Figur ferner zu erkennen, dass statt der 3 Winkelgleichungen, und der einen Seitengleichung, die vermöge der allgemeinen Regel vorhanden sein sollten, in der That 2 Winkel- und 2 Seitengleichungen vorhanden sind. Diese sind

$$(4)_1 - (2)_1 + (3)_2 - (1)_2 + (2)_5 - (1)_5 - 180^0\ 0'\ 0''510 = 0$$
$$(3)_1 - (4)_1 + (1)_2 - (4)_2 + (3)_4 - (2)_4 - 180\ \ 0\ \ 0.420 = 0$$
$$\log . \sin[(2)_1 - (1)_1] \sin[(2)_2 - (1)_2] \sin[(3)_5 - (1)_5]$$
$$- \log . \sin[(4)_1 - (1)_1] \sin[(3)_2 - (2)_2] \sin[(3)_5 - (2)_5] = 0$$
$$\log . \sin[(1)_1 - (3)_1] \sin[(2)_2 - (1)_2] \sin[(3)_4 - (1)_4]$$
$$- \log . \sin[(4)_1 - (1)_1] \sin[(2)_2 - (4)_2] \sin[(2)_4 - (1)_4] = 0$$

Diese beiden Seitengleichungen entstehen aus den Dreiecken (1)(2)(3), (2)(3)(5), (1)(3)(5), und (1)(2)(3), (2)(3)(4), (1)(3)(4), und ich habe sie sogleich in logarithmischer Form angesetzt, weil sie in dieser am Einfachsten behandelt werden können. Mit den vorstehenden Gleichungen ist die Zahl 6 erfüllt, die vorher bestimmt wurde.

92.

Dem Vorhergehenden zufolge muss nun zuerst jede Bedingungsgleichung auf die Form

$$0 = F + \Sigma q(r)_s . \delta(r)_s$$

gebracht werden, wenn $\delta(r)_s$ irgend welche Aenderungen der Richtungen, und F so wie $q(r)_s$ bestimmte numerische Grössen bezeichnen; letztere sind identisch mit den im Art. 31 u. f. q, q', etc. r, r', etc. etc. benannten Coefficienten, und die F sind im Art. 51 erklärt. Wir bekom-

men demzufolge die vorstehende Form durch die Substitution des allgemeinen Ausdrucks

$$y(r)_s + \delta(r)_s$$

für die Richtungen, die im vor. Art. schlechtweg mit $(r)_s$ bezeichnet worden sind, und dabei nur die ersten Potenzen der $\delta(r)_s$ berücksichtigen. Die Substitution der im Art. 89 zusammen gestellten Werthe der $y(r)_s$ in die strengen Ausdrücke der Bedingungsgleichungen des vor. Art. giebt die Werthe der F, wobei in grösseren Dreiecken erforderlich werden kann, noch folgende Reductionen anzubringen: die Berücksichtigung der Unterschiede zwischen den astronomischen und dem geodätischen Azimuthen, und die des sphäroidischen Ueberschusses in Bezug auf die Kugel*). Man hat früher vorgeschrieben in den Seitengleichungen von jedem Winkel den dritten Theil des sphärischen Ueberschusses abzuziehen, allein dieses ist überflüssig, da sie sowohl für die Kugel wie für die Ebene gelten.

Die Coefficienten $q(r)_s$ bekommt man durch die Differentiation der Bedingungsgleichungen, und in den Winkelgleichungen haben sie immer theils die Werthe $+1$, theils -1. Dieselben Coefficienten der Seitengleichungen kann man auf zwei verschiedene Arten berechnen. Sie sind einestheils die Differenz des betr. log sin für Eine Secunde des Bogens, und anderentheils sind sie der Cotangente des Winkels, mit einer Constante multiplicirt gleich. Damit in den F die siebente Stelle des Briggischen Logarithmus, und in $\delta(r)_s$ die Secunde zur Einheit werden, müssen die Cotangenten der Winkel mit der Constante multiplicirt werden, deren log $= 1.32335$ ist.

Es ist gänzlich einerlei, welches dieser beiden Verfahren man zur Berechnung dieser Coefficienten anwendet, wenn man diese nur in einer hinreichenden Anzahl von Stellen richtig berechnet.

Gleichwie im Vorhergehenden die Richtungen und die Stationen mit fortlaufenden arabischen Ziffern bezeichnet worden, eben so sollen von nun an die Bedingungsgleichungen, in der Reihenfolge in der man sie aufgestellt hat, mit fortlaufenden römischen Ziffern bezeichnet werden, und diese Bezeichnung sowohl wie jene soll, in allen Hülfsgrössen, die noch in Betracht kommen, statt der bei der Entwickelung des Verfahrens eingeführten, angewandt werden.

*) S. Geodätische Untersuchungen.

Es sind daher zunächst die Resultate der Substitution der Werthe der $y(r)_s$ in die obigen Bedingungsgleichungen mit $F(I)$, $F(II)$, bis $F(VI)$ zu bezeichnen, und demselben Grundsatze folgend, wird den Differentialquotienten, die oben allgemein mit $q(r)_s$ benannt worden, für die erste Bedingungsgleichung die Bezeichnung $q(r,I)_s$, für die zweite $q(r,II)_s$ u. s. w. gegeben werden. Die Substitution der $y(r)_s$ gab

$$\begin{array}{llll} F(I) = +1''936 & & F(IV) = -2''788 \\ F(II) = +1.010 & & F(V) = -99.3 \\ F(III) = +1.579 & & F(VI) = -53.5 \end{array}$$

und die beschriebene Differentiation gab zuerst die Ausdrücke

$$\delta(1)_1-\delta(3)_1+\delta(3)_3-\delta(2)_3+\delta(2)_4-\delta(1)_4 \text{ für } I$$
$$\delta(2)_1-\delta(1)_1+\delta(2)_3-\delta(1)_3+\delta(3)_5-\delta(2)_5 \text{ für } II$$
$$\delta(4)_1-\delta(2)_1+\delta(3)_2-\delta(1)_2+\delta(2)_5-\delta(1)_5 \text{ für } III$$
$$\delta(3)_1-\delta(4)_1+\delta(1)_2-\delta(4)_2+\delta(3)_4-\delta(2)_4 \text{ für } IV$$

$$\begin{array}{l} +32.634\delta[(2)_1-(1)_1]+67.360\delta[(2)_2-(1)_2]-\ 6.310\delta[(3)_5-(1)_5] \\ +40.106\delta[(4)_1-(1)_1]-59.073\delta[(3)_2-(2)_2]-\ 2.536\delta[(3)_5-(2)_5] \text{ für } V \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -\ 9.733\delta[(1)_1-(3)_1]+67.360\delta[(2)_2-(1)_2]+\ 3.028\delta[(3)_4-(1)_4] \\ +40.106\delta[(4)_1-(1)_1]-10.733\delta[(2)_2-(4)_2]-24.794\delta[(2)_4-(4)_4] \text{ für } VI \end{array}$$

Zuerst ist hiebei zu bemerken, dass die Coefficienten der Seitengleichungen im Allgemeinen viel grösser sind wie die der Winkelgleichungen, und dieses wird immer der Fall sein. Obgleich dieser Umstand für die Erlangung des Endresultats durchaus von keiner Bedeutung ist, so trägt er doch dazu bei, um die Rechnungen etwas unbequem zu machen. Nun ist aber leicht durch das Vorhergehende sich davon zu überzeugen, dass man jede Bedingungsgleichung vor ihrer Anwendung mit einem beliebigen Factor multipliciren darf, und diese Eigenschaft kann man dazu benutzen, um die Coefficienten der Seitengleichungen denen der Winkelgleichungen beiläufig gleich zu machen.

Es sollen in Folge dieser Bemerkung die vorstehenden Ausdrücke für die beiden hier vorhandenen Seitengleichungen vor Allem mit der Zahl 50 dividirt werden, wodurch sie in die folgenden übergehen,

$$\begin{array}{l} +0.65268\delta[(2)_1-(1)_1]+1.3472\ \delta[(2)_2-(1)_2]-0.12620\delta[(3)_5-(1)_5] \\ +0.80212\delta[(4)_1-(1)_1]-1.18146\delta[(3)_2-(2)_2]-0.05072\delta[(3)_5-(2)_5] \text{ für } V \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -0.19466\delta[(1)_1-(3)_1]+1.3472\ \delta[(2)_2-(1)_2]+0.06056\delta[(3)_4-(1)_4] \\ +0.80212\delta[(4)_1-(1)_1]-0.21466\delta[(2)_2-(4)_2]-0.49588\delta[(2)_4-(4)_4] \text{ für } VI \end{array}$$

In Folge dessen müssen die vorstehenden Werthe von $F(V)$ und $F(VI)$ mit derselben Zahl dividirt werden, und die weiter unten anzuwendenden Werthe derselben sind also nicht die vorstehenden, sondern die folgenden

$$F(V) = -1.986 \qquad F(VI) = -1.070$$

93.

Für die Berechnung eines so kleinen Dreiecksnetzes wie das unsers Beispiels könnte man sich immerhin begnügen die im vor. Art. erhaltenen Ausdrücke der Coefficienten der Bedingungsgleichungen blos zu ordnen, allein bei grossen Netzen wird man auf diese Art leicht die Uebersicht verlieren können. Es ist daher stets angemessen diese Coefficienten, und nicht minder die folgenden Hülfsgrössen tabularisch zusammen zu stellen, wodurch man bewirkt, dass die klare Uebersicht über das Ganze nie verloren gehen kann. Führen wir nun die im vor. Art. angekündigte neue Bezeichnung dieser Coefficienten ein, und setzen auch die Logarithmen statt der Zahlen an, so bekommen wir die folgende Tafel der Coefficienten der obigen Bedingungsgleichungen.

r	s	$\log q(r,I)_s$	$\log q(r,II)_s$	$\log q(r,III)_s$	$\log q(r,IV)_s$	$\log q(r,V)_s$	$\log q(r,VI)_s$
1	1	0.	0.n	—	—	0.16280n	9.99860n
2		—	0.	0.n	—	9.81470	—
3		0.n	—	—	0.	—	9.28926
4		—	—	0.	0.n	9.90424	9.90424
1	2	—	—	0.n	0.	0.12943n	0.12943n
2		—	—	—	—	0.40289	0.05406
3		—	—	0.	—	0.07242n	—
4		—	—	—	0.n	—	9.33174
1	3	—	0.n	—	—	—	—
2		0.n	0.	—	—	—	—
3		0.	—	—	—	—	—
1	4	0.n	—	—	—	—	9.63885
2		0.	—	—	0.n	—	9.69538n
3		—	—	—	0.	—	8.78220
1	5	—	—	0.n	—	9.10106	—
2		—	0.n	0.	—	8.70523	—
3		—	0.	—	—	9.24778n	—

Aus dem Art. 40 erhalten wir ferner für unser Beispiel die folgenden Ausdrücke,

Station (1)

$$
\begin{aligned}
f(1,I)_1 &= Q(1,I)_1 \\
f(2,I)_1 &= Q(2,I)_1 + \beta_1'''.Q(4,I)_1 + \beta_1''.Q(a,I)_1 + \beta_1'.Q(b,I)_1 \\
f(3,I)_1 &= Q(3,I)_1 + \gamma_1'''.Q(4,I)_1 + \gamma_1''.Q(a,I)_1 + \gamma_1'.Q(b,I)_1 \\
f(4,I)_1 &= Q(4,I)_1 + \delta_1''.Q(a,I)_1 + \delta_1'.Q(b,I)_1 \\
f(a,I)_1 &= Q(a,I)_1 + \varepsilon_1'.Q(b,I)_1 \\
f(b,I)_1 &= Q(b,I)_1
\end{aligned}
$$

Station (2)

$$
\begin{aligned}
f(1,I)_2 &= Q(1,I)_2 \\
f(2,I)_2 &= Q(2,I)_2 + \beta_2'''.Q(4,I)_2 \\
f(3,I)_2 &= Q(3,I)_2 + \gamma_2'''.Q(4,I)_2 \\
f(4,I)_2 &= Q(4,I)_2
\end{aligned}
$$

Stationen (3), (4), (5)

$$
\begin{aligned}
f(1,I)_s &= Q(1,I)_s \\
f(2,I)_s &= Q(2,I)_s \\
f(3,I)_s &= Q(3,I)_s
\end{aligned}
$$

in welchen zur Abkürzung allgemein

$$Q(1,I)_s = \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s}, \quad Q(2,I)_s = \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s}, \quad Q(3,I)_s = \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s}, \text{ etc.}$$

gesetzt worden ist. Die oben in Bezug auf die verschiedenen Bedingungsgleichungen aufgestellten Bemerkungen haben hier auch volle Geltung. Für unser Beispiel sind die Resultate der vorstehenden Ausdrücke in den folgenden Tafeln zusammen gestellt. Die Divisoren $(1,1)_s$, $(2,2.1)_s$, $(3,3,2)_s$, etc. findet man im Art. 89.

r	s	$\log Q(r,I)_s$	$\log Q(r,II)_s$	$\log Q(r,III)_s$	$\log Q(r,IV)_s$	$\log Q(r,V)_s$	$\log Q(r,VI)_s$
1	1	8.89734	8.89734*n*	—	—	9.06014*n*	8.89594*n*
2		—	8.72125	8.72125*n*	—	8.53595	—
3		8.65430*n*	—	—	8.65430	—	7.94356
4		7.85314*n*	—	8.89781	8.85674*n*	8.80205	8.81145
a		8.02145*n*	7.90133*n*	8.35451	7.61775*n*	7.81647	8.13985
b		8.60204*n*	8.10949*n*	8.77019	7.78126*n*	8.45534	8.65047
1	2	—	—	8.61083*n*	8.61083	8.74026*n*	8.74026*n*
2		—	—	—	—	9.59371	9.24488
3		—	—	8.79007	—	8.86249*n*	—
4		—	—	7.89657	8.59528*n*	8.55537*n*	7.53981*n*
1	3	—	8.72841*n*	—	—	—	—
2		8.55815*n*	8.55815	—	—	—	—
3		8.87622	—	—	—	—	—
1	4	8.94927*n*	—	—	—	—	8.58812
2		8.81799	—	—	8.81799*n*	—	8.51337*n*
3		—	—	—	9.04994*n*	—	7.83214
1	5	—	—	9.04351*n*	—	8.14465	—
2		—	8.70111*n*	8.70111	—	7.40634	—
3		—	8.95644	—	—	8.20422*n*	—

r	s	$\log f(r,I)_s$	$\log f(r,II)_s$	$\log f(r,III)_s$	$\log f(r,IV)_s$	$\log f(r,V)_s$	$\log f(r,VI)_s$
1	1	8.89734	8.89734*n*	—	—	9.06014*n*	8.89594*n*
2		8.03664	8.75814	8.84805*n*	7.36078	8.42862	8.10332*n*
3		8.87386*n*	8.03663*n*	8.71846	8.52349	8.41694	8.67923
4		8.61715*n*	8.11976*n*	9.12342	8.89364*n*	8.94156	9.01732
a		8.48224*n*	8.15695*n*	8.71481	7.85408*n*	8.31624	8.55619
b		8.60204*n*	8.10949*n*	8.77019	7.78126*n*	8.45534	8,65047
1	2	—	—	8.61083*n*	8.61083	8.74026*n*	8.74026*n*
2		—	—	7.32347*n*	8.02218	9.60421	9.24717
3		—	—	8.80101	7.89657*n*	8.90335*n*	6.84110*n*
4		—	—	7.89657	8.59528*n*	8.55537*n*	7.53981*n*
1	3	—	8.72841*n*	—	—	—	—
2		8.55815*n*	8.55815	—	—	—	—
3		8.87622	—	—	—	—	—
1	4	8.94927*n*	—	—	—	—	8.58812
2		8.81799	—	—	8.81799*n*	—	8.51337*n*
3		—	—	—	9.04994	—	7.83214
1	5	—	—	9.04359*n*	—	8.14465	—
2		—	8.70111*n*	8.70111	—	7.40634	—
3		—	8.95644	—	—	8.20422*n*	—

95.

Es sind nun die Endgleichungen zu bilden und aufzulösen, deren allgemeine Ausdrücke man in den Artt. 36 und 46 findet. Die Coefficienten dieser die a. a. O. mit $(\eta\eta)$, $(\eta\varkappa)$, etc. bezeichnet wurden, sollen von nun an, den übrigen Bezeichnungen analog, mit (I,I), (I,II), etc., und die Unbekannten derselben, die oben $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, etc. genannt wurden, mit (I), (II), etc. bezeichnet werden. Die eben angezogenen Ausdrücke bieten zwei verschiedene Arten dar, um die Coefficienten der Endgleichungen zu berechnen, die, wenn sie beide angewandt werden, nicht nur diese Coefficienten selbst, sondern auch die vorhergehenden Rechnungen, mit Ausnahme der q, vollständig controliren. Jede dieser beiden Arten zerfällt überdiess in zwei Nebenarten. Durch die Ausdrücke des Art. bekommt man

$$(I,I) = \Sigma\{Q(1,I)_s\,.\,\eta(1,I)_s + Q(2,I)_s\,.\,\eta(2,I)_s + Q(3,I)_s\,.\,\eta(3,I)_s + \ldots\}$$
$$(I,II) = \Sigma\{Q(1,II)_s\,.\,\eta(1,I)_s + Q(2,II)_s\,.\,\eta(2,I)_s + Q(3,II)_s\,.\,\eta(3,I)_s + \ldots\}$$
$$(I,III) = \Sigma\{Q(1,III)_s\,.\,\eta(1,I)_s + Q(2,III)_s\,.\,\eta(2,I)_s + Q(3,III)_s\,.\,\eta(3,I)_s + \ldots\}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$(II,II) = \Sigma\{Q(1,II)_s\,.\,\eta(1,II)_s + Q(2,II)_s\,.\,\eta(2,II)_s + Q(3,II)_s\,.\,\eta(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(II,III) = \Sigma\{Q(1,III)_s\,.\,\eta(1,II)_s + Q(2,III)_s\,.\,\eta(2,II)_s + Q(3,III)_s\,.\,\eta(3,II)_s + \ldots\}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$(III,III) = \Sigma\{Q(1,III)_s\,.\,\eta(1,III)_s + Q(2,III)_s\,.\,\eta(2,III)_s + Q(3,III)_s\,.\,\eta(3,III)_s + \ldots\}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Die erwähnte Nebenart ergiebt sich daraus, dass man in diesen Ausdrücken die Q und η mit einander verwechseln darf.

Die zweite Berechnungsart, die sich aus den Ausdrücken des Art. 35 ergiebt, führt auf die folgenden,

$$(I,I) = \Sigma\{f(1,I)_s\,.\,q(1,I)_s + f(2,I)_s\,.\,q(2,I)_s + f(3,I)_s\,.\,q(3,I)_s + \ldots\}$$
$$(I,II) = \Sigma\{f(1,I)_s\,.\,q(1,II)_s + f(2,I)_s\,.\,q(2,II)_s + f(3,I)_s\,.\,q(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(I,III) = \Sigma\{f(1,I)_s\,.\,q(1,III)_s + f(2,I)_s\,.\,q(2,III)_s + f(3,I)_s\,.\,q(3,III)_s + \ldots\}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$(II,II) = \Sigma\{f(1,II)_s\,.\,q(1,II)_s + f(2,II)_s\,.\,q(2,II)_s + f(3,II)_s\,.\,q(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(II,III) = \Sigma\{f(1,II)_s\,.\,q(1,III)_s + f(2,II)_s\,.\,q(2,III)_s + f(3,II)_s\,.\,q(3,III)_s + \ldots\}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$(III,III) = \Sigma\{f(1,III)_s\,.\,q(1,III)_s + f(2,III)_s\,.\,q(2,III)_s + f(3,III)_s\,.\,q(3,III)_s + \ldots\}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Auch hier dürfen die f und q mit einander verwechselt werden. Wie man sieht werden diese Coefficienten auch stationsweise berechnet, nur werden die Resultate die jede Station für jeden Coefficienten giebt, schliesslich zu einander addirt, wie das Summenzeichen Σ anzeigt. Die Endgleichungen selbst nehmen nun die folgende Form an.

$$\begin{aligned}
(I,I)(I) &+ (I,II)(II) + (I,III)(III) + \ldots = F(I)\\
(I,II)(I) &+ (II,II)(II) + (II,III)(III) + \ldots = F(II)\\
(I,III)(I) &+ (II,III)(II) + (III,III)(III) + \ldots = F(III)\\
\text{etc.} & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

bis alle Bedingungsgleichungen erschöpft sind. Für unser Beispiel ergaben sich die folgenden Werthe dieser Coefficienten,

i	(i,I)	(i,II)	(i,III)	(i,IV)	(i,V)	(i,VI)
I	0.41983	−0.10422	−0.05229	−0.09915	−0.14097	−0.19782
II		0.36661	−0.12072	+0.00229	+0.12313	+0.06601
III			0.46820	−0.12927	+0.02411	+0.17105
IV				0.36981	−0.08036	−0.06841
V					1.44452	+0.71132
VI						0.478084

Die Auflösung der Endgleichungen geschieht durch die Ausdrücke, die in den Artt. 46 und 49 aufgestellt worden sind, nur ist in Bezug auf die Bezeichnung zu bemerken, dass man

$$\begin{matrix} (II,II,1)\,, & (II,III,1)\,, & \text{etc.} & (III,III,2)\,, & \text{etc. etc. statt}\\ (\varkappa\varkappa,1)\,, & (\varkappa\lambda,1)\,, & \text{etc.} & (\lambda\lambda,2)\,, & \text{etc. etc.}\end{matrix}$$

ferner

$$F(II,1),\ F(III,2),\ \text{etc. statt } G',\ H'',\ \text{etc.}$$

so wie

$$\begin{matrix} (2)_1\,, & (3)_1\,, & (4)_1\,, & \text{etc.} & (3)_2\,, & (4)_2\,, & \text{etc. etc. statt}\\ \mathfrak{a}'\,, & \mathfrak{b}'\,, & \mathfrak{c}'\,, & \text{etc.} & \mathfrak{b}''\,, & \mathfrak{c}''\,, & \text{etc. etc.}\end{matrix}$$

schreiben muss, da man diese Bezeichnung unbeschränkt fortsetzen kann, während die Anwendung von Buchstaben durch die Ausdehnung des Alphabets beschränkt ist.

Für unser Beispiel ergaben sich die folgenden Werthe, die auch weiter unten bei der Berechnung der Gewichte Anwendung finden.

$(2)_1 = +(9.39488)$, $(3)_1 = +(9.09535)$, $(4)_1 = +(9.37322)$, $(5)_1 = +(9.52606)$
$(3)_2 = +(9.59371)$, $(4)_2 = +(8.81627)$, $(5)_2 = -(9.41270)$
$(4)_3 = +(9.56522)$, $(5)_3 = -(9.00219)$
$(5)_4 = +(9.50551)$

$$(6)_1 = +(9.67320)$$
$$(6)_2 = -(8.69547)$$
$$(6)_3 = -(9.57284)$$
$$(6)_4 = +(9.29988)$$
$$(6)_5 = -(9.65565),\quad R_6 = 42.604$$

$$(I,I) = (9.62307)\,,\qquad (IV,IV,3) = (9.46190)$$
$$(II,II,1) = (9.53242)\,,\qquad (V,V,4) = (0.12728)$$
$$(III,III,2) = (9.61197)\,,\qquad (VI,VI,5) = (8.61013)$$

und die Unbekannten

$$(I) = +(0.41932)$$
$$(II) = +(0.81322)$$
$$(III) = +(0.81482)$$
$$(IV) = -(0.75236)$$
$$(V) = +(0.23697)$$
$$(VI) = -(0.88997)$$

Da die vollständige Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate

$$W = W_0 + Rq$$

zum Ausdruck hat, wenn hier q die Anzahl der Bedingungsgleichungen bezeichnet, so ergiebt sich

$$W = 212{,}636$$

indem der Werth von W_0 schon im Art. 89 gegeben ist.

96.

Nennen wir nun den wahrscheinlichsten Werth einer Richtung $x(r)_s$, und setzen dem Vorhergehenden analog

$$x(r)_s = y(r)_s - z(r)_s$$

so erhält man die Werthe der $z(r)_s$ durch den folgenden allgemeinen Ausdruck

$$z(r)_s = f(r,I)_s.(I) + f(r,II)_s.(II) + f(r,III)_s.(III) + \ldots.$$

die den letzten des Art. 49 entspricht. Die Substitution der für unser Beispiel im Vorhergehenden erhaltenen numerischen Werthe giebt

$$
\begin{array}{llllll}
z(1)_1 = +0''107\,, & z(1)_2 = -0''165\,, & z(1)_3 = -0''348 \\
z(2)_1 = +0.073\,, & z(2)_2 = -0.751\,, & z(2)_3 = +0.140 \\
z(3)_1 = -0.440\,, & z(3)_2 = +0.325\,, & z(3)_3 = +0.198 \\
z(4)_1 = +0.459\,, & z(4)_2 = +0.239 & \\
z(a)_1 = -0.038 & & \\
z(b)_1 = -0.068 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
z(1)_4 = -0''534\,, & z(1)_5 = -0''698 \\
z(2)_4 = +0.798\,, & z(2)_5 = +0.006 \\
z(3)_4 = -0.687\,, & z(3)_5 = +0.561
\end{array}
$$

und durch Zuziehung der im Art. 89 gegebenen Werthe der $y(r)_s$,

$$
\begin{array}{ll}
x(1)_1 = 63^0\,40'\ \ 9''165\,, & x(1)_2 = 27^0\,55'\ \ 6''952 \\
x(2)_1 = 96\ \ 29\ \ 52.748\,, & x(2)_2 = 45\ \ 16\ \ 35.840 \\
x(3)_1 = 308\ \ 51\ \ 37.195\,, & x(3)_2 = 64\ \ 53\ \ 36.762 \\
x(4)_1 = 215\ \ 58\ \ 15.679\,, & x(4)_2 = 342\ \ 17\ \ 11.377 \\
x(a)_1 = 106\ \ \ 5\ \ 28.927 & \\
x(b)_1 = 219\ \ 57\ \ 22.038 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
x(1)_3 = 179^0\,43'\ \ 9''519\,, & x(1)_4 = 88^0\,37'\,44''864 \\
x(2)_3 = 243\ \ 45\ \ 34.711\,, & x(2)_4 = 128\ \ 57\ \ 58.367 \\
x(3)_3 = 268\ \ 36\ \ 49.871\,, & x(3)_4 = 170\ \ 26\ \ 41.696
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x(1)_5 = 252^0\,59'\,38''242 \\
x(2)_5 = 276\ \ 32\ \ 46.010 \\
x(3)_5 = 359\ \ 40\ \ 37.764
\end{array}
$$

97.

Die Ermittelung der Gewichte einer Anzahl der Winkel und Seiten eines Dreiecksnetzes ist von grosser Wichtigkeit, weil sich durch die numerische Grösse dieser mit Sicherheit auf zweckmässige Anlage des Netzes schliessen lässt. Es soll daher die Anwendung der, auf die im Vorhergehenden allgemein mit Ω bezeichneten Function, bezüglichen Ausdrücke durch eine Anzahl von Beispielen erläutert werden.

Zuerst soll der Winkel (3)(1)(5) der Figur des Art. 91 nebst dem Gewicht dieser Bestimmung berechnet werden. Da

$$(3)(1)(5) = x(2)_1 - x(1)_1$$

ist, und man den wahrscheinlichsten Werth irgend einer Function bekommt, wenn man die wahrscheinlichsten Werthe der Elemente, aus welchen sie besteht, darin substituirt; so bekommt man in diesem Falle sogleich den wahrscheinlichsten Werth dieses Winkels

$$(3)(1)(5) = 32^0\ 49'\ 43''583$$

Zur Berechnung des Gewichts dieser Bestimmung wird mit Weglassung des constanten Gliedes, worauf es hier nicht ankommt, die allgemeine Function

$$\Omega = \delta x(2)_1 - \delta x(1)_1$$

wenn das den Grössen vorgesetzte δ beliebige Aenderungen derselben bezeichnet. Wenn nun die im Art. 31 u. f. mit k, k', etc. bezeichneten Coefficienten des Ausdrucks von Ω mit den Richtungs- und den Stationsnummern, statt der Striche versehen werden, so ergeben sich

$$k(1)_1 = -1\ ,\quad k(2)_1 = +1$$

und alle übrigen k sind Null. Zufolge der Gleichungen (46) werden ferner, wenn man die M auf ähnliche Art bezeichnet,

$$\begin{aligned}
(M,1)_1 &= k(1)_1 = -1 \\
(M,2)_1 &= k(2)_1 = +1 \\
(M,3)_1 &= \quad 0 \\
(M,4)_1 &= \quad 0 \\
(M,a)_1 &= \beta'''_1 k(2) = -(9.40550) \\
(M,b)_1 &= \beta^{v}_1 k(2) = -(9.31217)
\end{aligned}$$

Setzt man hierauf zur Abkürzung

$$Q(M,1)_1 = \frac{(M,1)_1}{(1,1)_1}\ ,\quad Q(M,2)_1 = \frac{(M,2)_1}{(2,2,1)_1}\ ,\ \text{etc.}$$

so giebt die Gleichung (47), wenn wir sie für unser Beispiel vollständig ausschreiben,

$$\begin{aligned}
R = Q(M,1)_1 \,.\, (M,1)_1 &+ Q(M,2)_1 \,.\, (M,2)_1 \\
&+ Q(M,a)_1 \,.\, (M,a)_1 + Q(M,b)_1 \,.\, (M,b)_1
\end{aligned}$$

Durch Hülfe der vorstehenden Werthe und der aus dem Art. 89 zu entnehmenden Werthe der Divisoren $(1,1)_1$, $(2,2,1)_1$, etc. fand sich

$$R = 0.13625$$

Die Ausdrücke (48) werden nun für unser Beispiel, wenn wir wieder die Bezeichnungen den im Vorhergehenden eingeführten analog einrichten, und wieder die Glieder weglassen, die im gegenwärtigen Falle Null sind,

$$
\begin{aligned}
(I,M) &= Q(M,1)_1 \,.\, \eta(1,I)_1 + Q(M,a)_1 \,.\, \eta(a,I)_1 + Q(M,b)_1 \,.\, \eta(b,I)_1 \\
(II,M) &= Q(M,1)_1 \,.\, \eta(1,II)_1 + Q(M,2)_1 \,.\, \eta(2,II)_1 + Q(M,a)_1 \,.\, \eta(a,II)_1 \\
&\qquad + Q(M,b)_1 \,.\, \eta(b,II)_1 \\
(III,M) &= Q(M,2)_1 \,.\, \eta(2,III)_1 + Q(M,a)_1 \,.\, \eta(a,III)_1 + Q(M,b)_1 \,.\, \eta(b,III)_1 \\
(IV,M) &= Q(M,a)_1 \,.\, \eta(a,IV)_1 + Q(M,b)_1 \,.\, \eta(b,IV)_1 \\
(V,M) &= Q(M,1)_1 \,.\, \eta(1,V)_1 + Q(M,2)_1 \,.\, \eta(2,V)_1 + Q(M,a)_1 \,.\, \eta(a,V)_1 \\
&\qquad + Q(M,b)_1 \,.\, \eta(b,V)_1 \\
(VI,M) &= Q(M,1)_1 \,.\, \eta(1,VI)_1 + Q(M,a)_1 \,.\, \eta(a,VI)_1 + Q(M,b)_1 \,.\, \eta(b,VI)_1
\end{aligned}
$$

Die Ausdrücke (49) werden in die hier eingeführte Bezeichnung übersetzt,

$$
\begin{aligned}
(II,M,1) &= (II,M) + (I,M)(2)_1 \\
(III,M,1) &= (III,M) + (I,M)(3)_1 \\
(IV,M,1) &= (IV,M) + (I,M)(4)_1 \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
\hline
(III,M,2) &= (III,M,1) + (II,M,1)(3)_2 \\
(IV,M,2) &= (IV,M,1) + (II,M,1)(4)_2 \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
\hline
(IV,M,3) &= (IV,M,2) + (III,M,2)(4)_3 \\
&\text{etc.} \\
\hline
&\text{etc.} \\
\hline
\end{aligned}
$$

Der Ausdruck (50) wird hierauf

$$
\begin{aligned}
S = \frac{(I,M)^2}{(I,I)} &+ \frac{(II,M,1)^2}{(II,II,1)} + \frac{(III,M,2)^2}{(III,III,2)} \\
+ \frac{(IV,M,3)^2}{(IV,IV,3)} &+ \frac{(V,M,4)^2}{(V,V,4)} + \frac{(VI,M,5)^2}{(VI,VI,5)}
\end{aligned}
$$

und das gesuchte Gewicht

$$P = \frac{1}{R-S}$$

Die Werthe der Coefficienten $(2)_1$, $(3)_1$, etc. etc., so wie die der Divisoren sind aus dem Art. 95 zu entnehmen. Die Rechnung gab

$$
\begin{aligned}
(I,M) &= -0.06807 \\
(II,M) &= +0.13625\,, & (II,M,1) &= +0.11935 \\
(III,M) &= -0.07048\,, & (III,M,2) &= -0.03216 \\
(IV,M) &= +0.00230\,, & (IV,M,3) &= -0.01778 \\
(V,M) &= +0.14168\,, & (V,M,4) &= +0.08552 \\
(VI,M) &= +0.06601\,, & (VI,M,5) &= -0.00222
\end{aligned}
$$

$$S = 0.06197$$

und aus diesen Werthen von R und S folgt

$$P = 13.46$$

welches das gesuchte Gewicht ist.

98.

Als zweites Beispiel soll der Winkel $(b)(1)(a)$ der Figur nebst dessen Gewicht berechnet werden. Der wahrscheinlichste Werth desselben wird sogleich nach Art. 96

$$(b)(1)(a) = 163^0\ 51'\ 53''111$$

und für das Gewicht wird zunächst

$$\Omega = \delta x(b) - \delta x(a)$$

folglich

$$k(a) = -1\ ,\quad k(b) = +1$$

$$(M,a)_1 = k(a) \qquad = -1$$

$$(M,b)_1 = \varepsilon_1{}'k(a) + k(b) = +(9.7022)$$

$$R = 0.04723$$

$$(I,M) = -0.00693$$

$$(II,M) = +0.001485\ ,\quad (II,M,1) = -0.000235$$

$$(III,M) = +0.00705\ ,\quad (III,M,2) = +0.006095$$

$$(IV,M) = +0.001105\ ,\quad (IV,M,3) = +0.001692$$

$$(V,M) = +0.007817\ ,\quad (V,M,4) = +0.005481$$

$$(VI,M) = +0.008728\ ,\quad (VI,M,5) = +0.001053$$

$$S = 0.00026$$

$$P = 21.29$$

99.

Als drittes Beispiel soll der Werth und das Gewicht des Winkels (5)(2)(3) berechnet werden. Jenen bekommt man sogleich

$$(5)(2)(3) = x(3)_2 - x(2)_2 = 19^0\ 37'\ 0''922$$

und da hier

$$k(2)_2 = -1\ ,\quad k(3)_2 = +1$$

sind, so werden

$$(M,2)_2 = k(2)_2 = -1$$
$$(M,3)_2 = k(3)_2 = +1$$
$$[illegible]4)_2 = \beta'''_2 . k(2)_2 + \gamma'''_2 . k(3)_2 = +(9.6697)$$
$$R = 0.2255$$

[illegible] 0

$[illegible] = 0 \qquad (II,M,1) = 0$

$[illegible] = +0.06536 , \qquad (III,M,2) = +0.06536$

$(IV,M) = -0.01841 , \qquad (IV,M,3) = +0.00561$

$(V,M) = -0.4821 , \qquad (V,M,4) = -0.4869$

$(VI,M) = -0.1774 , \qquad (VI,M,5) = +0.0197$

$$S = 0.1968$$
$$P = 34.8$$

100.

Als viertes Beispiel soll der Werth und das Gewicht des Winkels (5)(3)(2), welcher zu den nicht beobachteten gehört, berechnet werden. Dieser wird aus den beiden andern Winkeln des Dreiecks, dem er angehört, durch den folgenden Ausdruck gefunden

$$(5)(3)(2) = 180^0\ 0'\ 0''737 - x(3)_2 + x(2)_2 - x(3)_5 + x(1)_5$$

indem der sphärische Exces dieses Dreiecks = 0″737 ist. Die Angaben des Art. 96 geben

$$(5)(3)(2) = 53^0\ 41'\ 0''293$$

welches der wahrscheinlichste Werth dieses Winkels ist. Es wird nun

$$\Omega = \delta x(2)_2 - \delta x(3)_2 + \delta x(1)_5 - \delta x(3)_5$$

also

$$k(2)_2 = +1 , \quad k(3)_2 = -1 , \quad k(1)_5 = +1 , \quad k(3)_5 = -1$$

$$(M,2)_2 = k(2)_2 = +1$$
$$(M,3)_2 = k(3)_2 = -1$$
$$(M,4)_2 = \beta'''_2 . k(2)_2 + \gamma'''_2 . k(3)_2 = -(9.66965)$$
$$(M,1)_5 = k(1)_5 = +1$$
$$(M,3)_5 = k(3)_5 = -1$$
$$R = 0.42647$$

ferner

$$
\begin{array}{llll}
(I,M) = 0 & & \\
(II,M) = -0.090456\,, & (II,M,1) = -0.090456 \\
(III,M) = -0.17595\,, & (III,M,2) = -0.21144 \\
(IV,M) = +0.018405\,, & (IV,M,3) = -0.65216 \\
(V,M) = +0.51198\,, & (V,M,4) = +0.53574 \\
(VI,M) = +0.17736\,, & (VI,M,5) = +0.00323
\end{array}
$$

$$S = 0.36228$$
$$P = 15.58$$

Das Gewicht des beobachteten Winkels (3)(1)(5) wurde oben im Art. 97 = 13.44 gefunden, man sieht also hieraus, dass unter Umständen das Gewicht eines berechneten Winkels grösser werden kann wie das eines beobachteten.

101.

Da die Richtungen an sich unbestimmte Grössen sind, so kann eine Bestimmung der Gewichte derselben auch nicht stattfinden, die Formeln werden Zahlen geben, die als Gewichte plus einer unbestimmten Grösse gelten müssen, und ebenso verhält es sich mit den Anfangspunkten der Gyri, oder der Gruppen derselben. Aber die Aggregate $u(m)_s + x(r)_s$ sind bestimmte Grössen, und die Gewichte dieser lassen sich daher bestimmen. Es soll daher als erstes Beispiel dieser Gattung zunächst das Gewicht des Aggregats $u(1)_3 + x(1)_3$ berechnet werden. Da wir hier $x(1)_3$ statt $w(1)_3$ schreiben können, so geben die Gleichungen (65)

$$u(1)_3 + x(1)_3 = \tfrac{1}{2}x(1)_3 - \tfrac{1}{2}x(2)_3$$

und es wird daher die Function

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\delta x(1)_3 - \tfrac{1}{2}\delta x(2)_3$$

folglich

$$k(1)_3 = +\tfrac{1}{2}\,, \quad k(2)_3 = -\tfrac{1}{2}$$

Hiemit ergeben sich

$$
\begin{aligned}
(M,1)_3 &= \tfrac{1}{2} \\
(M,2)_3 &= -\tfrac{1}{2} \\
(M,3)_3 &= 0
\end{aligned}
$$

woraus

$$R = 0.02242$$

hervorgeht. Ferner

$$
\begin{array}{llll}
(I,M) & = +0.01808 & & \\
(II,M) & = -0.04484\,, & (II,M,1) & = -0.04035 \\
(III,M) & = \quad 0 & (III,M,2) & = -0.01358 \\
(IV,M) & = \quad 0 & (IV,M,3) & = -0.00336 \\
(V,M) & = \quad 0 & (V,M,4) & = +0.01680 \\
(VI,M) & = \quad 0 & (VI,M,5) & = +0.00733
\end{array}
$$

$$S = 0.00758$$
$$P = 67.37$$

102.

Als zweites Beispiel soll das Gewicht des Aggregats $u(8)_2 + x(4)_2$ berechnet werden. Da hier

$$u(8)_2 = -\tfrac{1}{4}(x(1)_2 + x(2)_2 + x(3)_2 + x(4)_2)$$

ist, so wird

$$\Omega = -\tfrac{1}{4}\delta x(1)_2 - \tfrac{1}{4}\delta x(2)_2 - \tfrac{1}{4}\delta x(3)_2 + \tfrac{3}{4}\delta x(4)_2$$

also

$$k(1)_2 = -\tfrac{1}{4}\,,\quad k(2)_2 = -\tfrac{1}{4}\,,\quad k(3)_2 = -\tfrac{1}{4}\,,\quad k(4)_2 = +\tfrac{3}{4}$$

$$
\begin{array}{ll}
(M,1)_2 & = -\tfrac{1}{4} \\
(M,2)_2 & = -\tfrac{1}{4} \\
(M,3)_2 & = -\tfrac{1}{4} \\
(M,4)_2 & = +0.7668
\end{array}
$$

$$R = 0.03926$$

$$
\begin{array}{llll}
(I,M) & = \quad 0 & & \\
(II,M) & = \quad 0 & (II,M,1) & = \quad 0 \\
(III,M) & = +0.00082\,, & (III,M,2) & = +0.00082 \\
(IV,M) & = -0.04040\,, & (IV,M,3) & = -0.04010 \\
(V,M) & = -0.09367\,, & (V,M,4) & = -0.10645 \\
(VI,M) & = -0.03285\,, & (VI,M,5) & = +0.00702
\end{array}
$$

$$S = 0.01521$$
$$P = 41.58$$

103.

Als letztes Beispiel soll die Dreiecksseite Warte - Wachsenburg aus der als gegeben betrachteten Seite Seeberg - Inselsberg, nebst

dem Gewicht dieser Bestimmung berechnet werden, wobei in Metern ausgedrückt

$$\log (1)(3) = 4.3136765$$

angenommen werden soll. Aus der Figur des Art. 91 findet man leicht auf dem einfachsten Wege

$$(2)(4) = \frac{\sin [x(3)_1 - x(4)_1 - 0''140] \sin [x(3)_3 - x(2)_3 - 0''211]}{\sin [x(1)_2 - x(4)_2 - 0''140] \sin [x(2)_4 - x(1)_4 - 0''211]} (1)(3)$$

Die Zahlen 0″140 und 0″211 sind der dritte Theil der sphärischen Ueberschüsse der beiden in Betracht kommenden Dreiecke. Man hätte hier, gleichwie oben in den beiden letzten Bedingungsgleichungen geschehen ist, diesen weglassen können, wenn man statt der Seiten selbst ihre Sinusse angesetzt hätte, ich finde aber hier die Anwendung der Seiten selbst für einfacher. Die Substitution der obigen wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen giebt nun zuerst

$$\log (2)(4) = 4.2713762.5$$

$$\text{Warte-Wachsenburg} = 18679^m972$$

Die Function Ω ist hier nicht unmittelbar gegeben, sondern wird durch die Differentiation des vorstehenden Ausdrucks für (2)(4) in Bezug auf die darin vorkommenden Richtungen erhalten. Zu dem Ende braucht man nur den numerischen Werth der rechten Seite derselben mit den Cotangenten der darin vorkommenden Winkel zu multipliciren, und um die Aenderungen in Bezug auf die Secunde zu erhalten, diese Produkte mit 206265″ zu dividiren; für die im Nenner vorkommenden Winkel müssen überdies die Zeichen umgekehrt werden. Auf diese Art ergab sich mit Weglassung des constanten Gliedes

$$\Omega = -0^m004571\,\delta[x(3)_1 - x(4)_1] + 0^m19551\,\delta[x(3)_3 - x(2)_3]$$
$$-0.08559\;\delta[x(1)_2 - x(4)_2] - 0.10665\,\delta[x(2)_4 - x(1)_4]$$

Dieser Ausdruck giebt

$$k(3)_1 = -0.004571 \qquad k(2)_3 = -0.19551$$
$$k(4)_1 = +0.004571 \qquad k(3)_3 = +0.19551$$
$$k(1)_2 = -0.08859 \qquad k(1)_4 = +0.10665$$
$$k(4)_2 = +0.08859 \qquad k(2)_4 = -0.10665$$

Es werden ferner

$$(M,3)_1 = k(3)_1 = -0.004571$$
$$(M,4)_1 = \gamma'''_1 \,.\, k(3)_1 + k(4)_1 = +0.004119$$
$$(M,a)_1 = \gamma^{IV}_1 \,.\, k(3)_1 + \delta^{IV}_1 \,.\, k(4) = +0.000605$$
$$(M,b)_1 = \gamma^{V}_1 \,.\, k(3)_1 + \delta^{V}_1 \,.\, k(4) = +0.000441$$

$$(M,1)_2 = k(1)_2 = -0.08859$$
$$(M,4)_2 = k(4)_2 = +0.08859$$
$$(M,2)_3 = k(2)_3 = -0.19551$$
$$(M,3)_3 = k(3)_3 = +0.19551$$
$$(M,1)_4 = k(1)_4 = +0.10665$$
$$(M,2)_4 = k(2)_4 = -0.10665$$

und hiemit

$$R = 0.0066477$$

Ferner

$$(I,M) = +0.005420$$
$$(II,M) = -0.007079 \quad (II,M,1) = -0.005733$$
$$(III,M) = +0.004679 \quad (III,M,2) = +0.003104$$
$$(IV,M) = -0.000596 \quad (IV,M,3) = +0.001449$$
$$(V,M) = +0.001966 \quad (V,M,4) = +0.005421$$
$$(VI,M) = +0.012427 \quad (VI,M,5) = +0.011940$$
$$S = 0.0037176$$

und das gesuchte Gewicht

$$P = 341.2$$

104.

Wenn in einem Dreiecksnetze mehr Winkel beobachtet worden sind, als hinreichend und nothwendig um nebst Einer Seite dieses Netz vollständig berechnen zu können, so können die verschiedenen Stücke desselben auf mehr wie Eine Art berechnet werden. Wenn aber die Winkel dem hier entwickelten Verfahren gemäss ausgeglichen worden sind, so muss jede mögliche Berechnungsart irgend eines Stückes dieses Dreiecksnetzes nicht nur auf den nemlichen Werth desselben hinführen, sondern auch das Gewicht der Bestimmung desselben muss bei jeder Berechnungsart denselben Werth bekommen. Um zu zeigen, dass dieses in der That der Fall ist, werde ich das erste und das letzte der vorhergehenden Beispiele auf andere Weise berechnen wie im Vorhergehenden geschehen ist.

Man findet leicht, dass man dem Ausdruck des Winkels (3)(1)(5) auch die folgende Form geben kann,

$$(3)(1)(5) = 180^\circ\, 0'\, 0''528 + x(1)_3 - x(2)_3 + x(2)_5 - x(3)_5$$

und es ist an sich klar, dass hieraus derselbe wahrscheinlichste Werth dieses Winkels hervorgehen muss wie oben. Wir brauchen uns daher nur mit der Berechnung des Gewichts dieser Bestimmung zu beschäftigen. Es werden hier

$$\begin{aligned}(M,1)_3 &= k(1)_3 = +1\\ (M,2)_3 &= k(2)_3 = -1\\ (M,2)_5 &= k(2)_5 = +1\\ (M,3)_5 &= k(3)_5 = -1\end{aligned}$$

und hieraus findet sich zuerst

$$R = 0.23035$$

Ferner werden

$$\begin{array}{llll}(I,M) = +0.03615 & & & \\ (II,M) = 0 & & (II,M,1) & = +0.00854\\ (III,M) = +0.05025 & & (III,M,2) & = +0.05824\\ (IV,M) = -0.23035 & & (IV,M,3) & = -0.20023\\ (V,M) = +0.9275 & & (V,M,4) & = +4.274\\ (VI,M) = 0 & & (VI,M,5) & = -0.112\end{array}$$

$$S = 0.15613$$
$$P = 13.47$$

mit dem im Art. 97 erhaltenen Werthe übereinstimmend.

105.

Die Dreiecke unserer Figur geben die folgenden Gleichungen

$$x(3)_3 - x(2)_3 = 180^0\ 0'\ 0''634 - x(1)_1 + x(3)_1 - x(2)_4 + x(1)_4$$
$$x(1)_2 - x(4)_2 = 180^0\ 0'\ 0''420 + x(4)_1 - x(3)_1 - x(3)_4 + x(2)_4$$

und es ist klar, dass nach der Substitution dieser Ausdrücke in den Ausdruck für die Seite (2)(4) des Art. 103 genau derselbe Werth dieser Dreiecksseite wieder hervor gehen muss. Substituirt man aber diese Ausdrücke in den Ausdruck für Ω desselben Art., so bekommt man

$$\begin{aligned}\Omega = &-0^m00457\delta[x(3)_1 - x(4)_1]\\ &-0.19551\delta[x(1)_1 - x(3)_1 - x(1)_4 + x(2)_4]\\ &+0.08859\delta[x(3)_1 - x(4)_1 - x(2)_4 + x(3)_4]\\ &+0.10665\delta[x(1)_4 - x(2)_4]\end{aligned}$$

und es werden jetzt

$$k(1)_1 = -0.19551 \qquad k(1)_4 = +0.30216$$
$$k(3)_1 = +0.27953 \qquad k(2)_4 = -0.39075$$
$$k(4)_1 = -0.08402 \qquad k(3)_4 = +0.08859$$

Hieraus ergaben sich

$$\begin{aligned}
(M,1)_1 &= k(1)_1 &&= -0.19551\\
(M,3)_1 &= k(3)_1 &&= +0.27953\\
(M,4)_1 &= \gamma'''_1 \,.\, k(3)_1 + k(4)_1 &&= -0.05880\\
(M,a)_1 &= \gamma^{IV}_1 \,.\, k(3)_1 + \delta'''_1 \,.\, k(4)_1 &&= +0.05446\\
(M,b)_1 &= \gamma^{V}_1 \,.\, k(3)_1 + \delta^{V}_1 \,.\, k(4)_1 &&= +0.11661\\
(M,1)_4 &= k(1)_4 &&= +0.30216\\
(M,2)_4 &= k(2)_4 &&= -0.39075\\
(M,3)_4 &= k(3)_4 &&= +0.08859
\end{aligned}$$

$$R = 0.026806$$

ferner

$$\begin{aligned}
(I,M) &= -0.085444 & & \\
(II,M) &= +0.013500 & (II,M,1) &= -0.007711\\
(III,M) &= +0.003455 & (III,M,2) &= -0.010213\\
(IV,M) &= +0.051544 & (IV,M,3) &= +0.027108\\
(V,M) &= +0.022413 & (V,M,4) &= +0.005424\\
(VI,M) &= +0.045048 & (VI,M,5) &= +0.011941
\end{aligned}$$

$$S = 0.023877$$
$$P = 341.3$$

mit dem Art. 103 bis auf 0.1 übereinstimmend.

106.

Ein ganz anderer Ausdruck für dieselbe Dreiecksseite ist der folgende,

$$(2)(4) = \frac{\sin[x(2)_2 - x(4)_2 + x(3)_4 - x(1)_4 - 0''904] \sin[x(4)_1 - x(1)_1 - 0''100]}{\sin[x(3)_4 - x(1)_4 - 0''452] \sin[x(2)_2 - x(1)_2 - 0''100]} \; (1)(3)$$

der auch aus der Figur leicht zu erhalten ist. Substituirt man hierin die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen, so bekommt man

$$\log (2)(4) = 4.2713762.8$$
$$(2)(4) = 18679^m973$$

bis auf Unbedeutendes wie oben. Es wird aber jetzt

$$\Omega = 18679^m973 - 0^m12841\delta[x(2)_2 - x(4)_2 + x(3)_4 - x(1)_4]$$
$$- 0.17251\delta[x(4)_1 - x(1)_1]$$
$$- 0.01303\delta[x(3)_4 - x(1)_4]$$
$$- 0.28973\delta[x(2)_2 - x(1)_2]$$

und folglich

$$k(1)_1 = +0.17251 \qquad k(4)_2 = +0.12841$$
$$k(4)_1 = -0.17251 \qquad k(1)_4 = +0.14144$$
$$k(1)_2 = +0.28973 \qquad k(3)_4 = -0.14144$$
$$k(2)_2 = -0.41814$$

Hieraus bekommt man

$$(M,1)_1 = k(1)_1 = +0.17251$$
$$(M,4)_1 = k(4)_1 = -0.17251$$
$$(M,a)_1 = \delta'''_1 \,.\, k(4)_1 = -(8.90693)$$
$$(M,b)_1 = \delta^{v}_1 \,.\, k(4)_1 = -(9.10265)$$
$$(M,1)_2 = k(1)_2 = +0.28973$$
$$(M,2)_2 = k(2)_2 = -0.41814$$
$$(M,4)_2 = \beta'''_2 k(2)_2 + k(4)_2 = +(9.38049)$$
$$(M,1)_4 = k(1)_4 = +0.14144$$
$$(M,3)_4 = k(3)_4 = -0.14144$$
$$R = 0.042766$$

$$(I,M) = +0.008179$$
$$(II,M) = -0.011346 \qquad (II,M,1) = -0.009316$$
$$(III,M) = -0.032856 \qquad (III,M,2) = -0.035492$$
$$(IV,M) = +0.000005 \qquad (IV,M,3) = -0.011716$$
$$(V,M) = -0.223522 \qquad (V,M,4) = -0.218549$$
$$(VI,M) = -0.117261 \qquad (VI,M,5) = -0.003109$$
$$S = 0.039833$$
$$P = 341.2$$

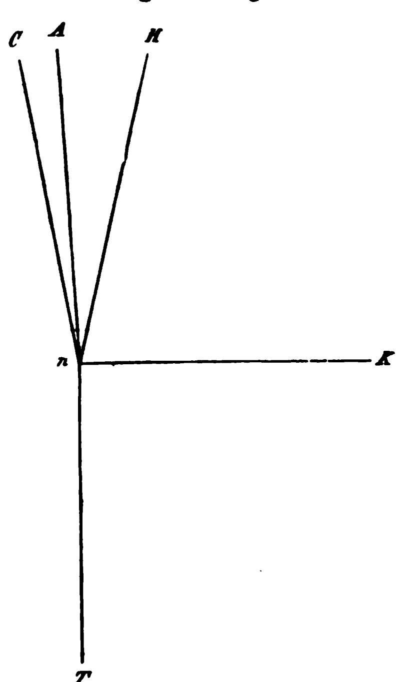
mit den vorhergehenden Bestimmungen dieses Gewichts übereinstimmend. Ich mache darauf aufmerksam, dass in allen diesen Gewichten eine einzelne Beobachtung irgend einer Richtung die Einheit bildet.

107.

Um auch den Inhalt des Art. 81 durch ein Beispiel zu erläutern soll die Maupertuis'sche Gradmessung dienen, die ich bekanntlich kurz

nach dem Erscheinen der Gaussischen, oben mehrmals angezogenen Abhandlung theils nach dem in dieser gegebenen Verfahren, theils nach einem eigenthümlichen, welches mit dem hier im Art. 28 u. f. erklärten identisch ist, berechnet habe. Bei dieser Gradmessung sind im Ganzen 18 Bedingungsgleichungen vorhanden, und ich habe daher, den Gaussischen Vorschriften folgend, ein System von 18 Gleichungen auflösen müssen. Unter diesen Gleichungen befinden sich aber vier locale, und zwar die, welche ich mit ***J, L, M, O*** bezeichnet habe*), und die dem Art. 81 zufolge von den übrigen getrennt werden können. Wenn ich damals diesen Satz angewandt hätte, so hätte ich ein System von nur 14 Gleichungen aufzulösen, und daher eine weit kürzere Rechnung gehabt.

Es gnügt für den hier zu verfolgenden Zweck blos Eine Station dieser Gradmessung zu behandeln, und hiefür wähle ich diejenige aus, die Rosenberger mit *n* bezeichnet hat**). Die auf dieser Station gemessenen Winkel lassen sich durch die folgende Figur anschaulich machen,



und haben nach der Reduction derselben auf den Horizont die folgenden Werthe,

*) S. Schum. Astr. Nachr. B. IX. p. 215.

**) S. Schum. Astr. Nachr. B. VI. Nr. 121 u. 122.

$$CnH = 31^\circ 57' \; 3''63$$
$$AnH = 21 \; 32 \; 16.30$$
$$AnK = 95 \; 29 \; 54.43$$
$$HnK = 73 \; 58 \;\; 5.64$$
$$KnT = 87 \; 44 \; 19.40$$

Man sieht, dass zwischen diesen Winkeln eine Bedingungsgleichung vorkommt, zufolge welcher

$$AnK = AnH + HnK$$

sein muss, und es ist diese die ich a. a. Orte mit J bezeichnet habe. Ich bezeichne nun die fünf Richtungen nC, nA, nH, nK, nT, bez. mit (1), (2), (3), (4), (5), nehme dafür die vorläufigen Werthe

$$(1) = \;\; 0^\circ \; 0' \; 0''$$
$$(2) = \; 10 \; 24 \; 47.33$$
$$(3) = \; 31 \; 57 \;\; 3.63$$
$$(4) = 105 \; 55 \;\; 9.27$$
$$(5) = 193 \; 39 \; 28.67$$

an, und bilde, indem ich die daraus folgenden Winkel von den beobachteten abziehe, wie oben erklärt worden ist, die folgenden Werthe der l, und zugleich lege ich jeder Richtung das Gewicht = 1 bei. Hiemit entsteht die folgende Tafel, die den bez. zweiten Tafeln des vorhergehenden Beispiels ähnlich ist.

Nr.	(2)	(3)	(4)	(5)	(1)	p	P
1		0″00			0″00	1	2
2	0″00	0.00				1	2
3		0.00	0″00			1	2
4			0.00	0″00		1	2
5	+13.755		−13.755			1	2
(lx)	+13″755	0″00	−13″755	0″00	0″00		10
Q	2	3	3	1	1		

Der Richtung (1) ist deshalb der letzte Platz gegeben worden, weil sonst nicht die im Art. 76 bezeichneten Coefficienten hätten Null gemacht werden können. Durch die Ausdrücke des gen. Art. findet sich nun

$$(pp) = 1, \quad (pp') = \tfrac{1}{2}, \quad (pp'') = \tfrac{1}{2}, \quad (pp''') = 0, \quad (pp'') = 0$$
$$(p'p') = \tfrac{3}{2}, \quad (p'p'') = \tfrac{1}{2}, \quad (p'p''') = 0, \quad (p'p'') = \tfrac{1}{2}$$
$$(p''p'') = \tfrac{3}{2}, \quad (p''p''') = \tfrac{1}{2}, \quad (p''p'') = 0$$
$$(p'''p''') = \tfrac{1}{2}, \quad (p'''p'') = 0$$
$$(p''p'') = \tfrac{1}{2}$$

$$N = N' = N'' = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad N''' = N'' = 0$$

$$(aa) = 1{,}5, \; (ab) = 0, \; (ac) = 0, \; (ad) = 0, \; (ae) = 0, \; (al) = +13''755$$
$$(bb) = 2, \; (bc) = 0, \; (bd) = 0, \; (be) = -0.5, \; (bl) = 0$$
$$(cc) = 2, \; (cd) = -0.5, \; (ce) = 0, \; (cl) = -13.755$$
$$(dd) = 0.5, \; (de) = 0, \; (dl) = 0$$
$$(ee) = 0.5, \; (el) = 0$$
$$(ll) = 378.4$$

und hiemit

$$(bb,1) = 2, \quad (bl,1) = 0$$
$$(cc,2) = 5, \quad (cl,2) = -13''755$$
$$(dd,3) = 0.375, \quad (dl,3) = -3.438$$
$$(ee,4) = 0.375, \quad (el,4) = 0$$
$$(ll,5) = 126.4$$

$$\log \chi' = 0.9622n, \quad \log \chi''' = 0.8373, \quad \log \chi'' = 0{,}9623$$
$$\log \delta'' = 9.3980, \quad \log \gamma''' = 9.3980, \quad \log \beta'' = 9.3980$$

und alle übrigen Grössen dieser Gattung sind Null. Hieraus folgen nun die Verbesserungen

$$w(1) = 0$$
$$w(2) = +9''17$$
$$w(3) = 0$$
$$w(4) = -9.17$$
$$w(5) = -9.17$$

Addirt man diese zu den angenommenen Werthen der Richtungen, so erhält man diese wie folgt

$$y(1) = 0^\circ\ 0'\ 0''$$
$$y(2) = 10\ 24\ 56.50$$
$$y(3) = 31\ 57\ 3.63$$
$$y(4) = 105\ 55\ 0.10$$
$$y(5) = 193\ 39\ 19.50$$

die nebst den obigen Werthen von (aa), $(bb,1)$, $(cc,2)$, etc und β'', γ''', δ'', in dem zweiten Theil der Auflösung anzuwenden sind. Aus den

vorstehenden Werthen der y erkennt man leicht, wie vorher gesehen werden konnte, dass die Winkel $CnH = (3) - (1)$ und $KnT = (5) - (4)$ unverändert geblieben sind, und die Verbesserungen sich zu gleichen Theilen, aber mit verschiedenen Zeichen, auf die übrigen drei Winkel erstrecken. Wenn auf einer Station mehr wie Eine locale Bedingungsgleichung vorhanden ist, dann findet der letzt genannte Umstand nicht mehr statt.

In unserem Beispiel kommen ausserdem noch drei Stationen vor, die auf dieselbe Weise behandelt werden können, so dass, wie oben angeführt, in dem zweiten Theil der Auflösung nur ein System von 14 Gleichungen aufzulösen ist, wodurch die Arbeit wesentlich abgekürzt wird. Es ist noch zu bemerken, dass auf den Stationen, auf welchen keine locale Bedingungsgleichungen vorhanden sind, die Winkel als Unbekannte beibehalten werden können, und nicht in die Richtungen aufgelöst zu werden brauchen, nur muss man, wenn übrigens alle Beobachtungen für gleich gut gehalten werden können, das Gewicht der Winkel $= \frac{1}{2}$ setzen, wenn wie oben das Gewicht der Richtungen $= 1$ angenommen worden ist.

b) Zweites Verfahren.

108.

Das im Vorhergehenden gegebene Verfahren zur Ausgleichung der Winkel eines Dreiecksnetzes ist einer Abänderung fähig, die ich nicht unterlassen will hinzuzufügen.

Wenden wir uns zu den Gleichungen (61) des Art. 69, und entfernen in den Ausdrücken der Coefficienten derselben Alles, was sich auf die Bedingungsgleichung (56) bezieht, mit anderen Worten, setzen wir darin $N = N' = N'' = \text{etc.} = 0$, hierauf werden

$$\begin{array}{lcl}
(aa) & = & Q - (pp) \\
(ab) & = & \quad\; - (pp') \\
(ac) & = & \quad\; - (pp'') \\
\text{etc.} & & \\
(al) & = & (lx) \\
\hline
(bb) & = & Q' - (p'p') \\
(bc) & = & \quad\; - (p'p'') \\
\text{etc.} & & \\
(bl) & = & (lx') \\
\hline
\end{array}$$

$$(cc) = Q'' - (p''p'')$$
etc.
$$(cl) = (lx'')$$

etc.

wo (pp), (pp'), etc. dieselben sind wie vorher. Aber aus dem Art. 71 folgt jetzt

$$\begin{aligned}(aa) + (ab) + (ac) + \ldots &= 0\\ (ab) + (bb) + (bc) + \ldots &= 0\\ (ac) + (bc) + (cc) + \ldots &= 0\\ \text{etc.} \qquad\qquad & \text{etc.}\end{aligned}$$

und zufolge des Art. 68 ist

$$(lx) + (lx') + (lx'') + \ldots = 0$$

Die Summe der Gleichungen (61) ist also identisch Null, woraus folgt, dass jede derselben in den übrigen enthalten ist. Die (61) kann man aber auch wie folgt schreiben,

$$\begin{aligned}\{(aa) + (ab) + (ac) + \ldots\}x + (ab)(x'-x) + (ac)(x''-x) + \ldots &= (lx)\\ \{(ab) + (bb) + (bc) + \ldots\}x + (bb)(x'-x) + (bc)(x''-x) + \ldots &= (lx')\\ \{(ac) + (bc) + (cc) + \ldots\}x + (bc)(x'-x) + (cc)(x''-x) + \ldots &= (lx'')\\ \text{etc.} \qquad\qquad & \text{etc.}\end{aligned}$$

Zufolge der obigen Bedingungsgleichungen sind hier alle Coefficienten von x gleich Null, x verschwindet daher aus diesen Gleichungen, und bleibt völlig willkührlich, wie auch die Natur der Sache mit sich bringt. Es entsteht hiemit ein System von Gleichungen, welches nur die Unterschiede $x'-x$, $x''-x$, etc. enthält, und von welchen wieder jede in den übrigen enthalten ist. Denn mit Zuziehung der vorstehenden Bedingungsgleichungen erkennt man, dass auch nach der Entfernung der mit x multiplicirten Glieder die Summe der Gleichungen identisch Null ist. Aber jetzt ist die Anzahl der Gleichungen um Eins grösser wie die Anzahl der Unbekannten, und man kann also Eine Gleichung weglassen. Lässt man die erste weg, so bekommt man das System

$$\left.\begin{aligned}(bb)(x'-x) + (bc)(x''-x) + (bd)(x'''-x) + \ldots &= (lx')\\ (bc)(x'-x) + (cc)(x''-x) + (cd)(x'''-x) + \ldots &= (lx'')\\ (bd)(x'-x) + (cd)(x''-x) + (dd)(x'''-x) + \ldots &= (lx''')\\ \text{etc.} \qquad\qquad & \text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (67)$$

aus welchem auf dieselbe Art wie vorher die Unbekannten $x'-x$, $x''-x$, $x'''-x$. etc. bestimmt werden können.

109.

Bei der Anwendung der Gleichungen (67) sind auf jeder Station wieder dieselben Täfelchen zu bilden, wie im Art. 84 u. d. f., auch sind die Grössen (pp), (pp'), etc nebst (ll) ganz eben so zu bilden wie vorher, nur die Coefficienten (bb), (bc), etc. sind nach den Ausdrücken des vor. Art. zu berechnen, und man kann statt dieser Bezeichnung sogleich (2,2,1), (2,3,1), (3,3,2), etc. etc. einführen. Es wird dadurch eine Uebereinstimmung mit dem Vorhergehenden zu Wege gebracht. Die Rechnung giebt wieder die Grössen die im Vorhergehenden mit $w(r)_s$ und $y(r)_s$ bezeichnet wurden, wenn man auf jeder Station, in Bezug auf die Richtungen, deren Verbesserung eliminirt worden ist, jene Null macht, oder diese Richtung so lässt wie man sie vorläufig angenommen hat.

Da in den Bedingungsgleichungen, die das Dreiecksnetz liefert nur Unterschiede der Richtungen vorkommen, so sind jetzt in den Differentialen derselben die Coefficienten der eben bezeichneten Richtungen gleich Null zu machen, und die Folge davon ist, dass auch die betreffenden zweiten, mit $z(r)_s$ bezeichneten, Verbesserungen Null werden.

110.

Es scheint mir angemessen das im Vorhergehenden ausgeführte Beispiel auch durch das hier gegebene Verfahren zu behandeln, wobei es aber gnügen wird, die einzelnen Resultate kurz anzugeben.

Resultate der Ausgleichung auf den Stationen.

Station (1).

$$y(1)_1 = 63^\circ 14' 10''000$$
$$w(2)_1 = +1''549\,, \quad y(2)_1 = 96\ 29\ 53.549$$
$$w(3)_1 = +0.483\,, \quad y(3)_1 = 308\ 51\ 37.483$$
$$w(4)_1 = -0.134\,, \quad y(4)_1 = 215\ 58\ 16.866$$
$$w(a)_1 = +0.617\,, \quad y(a)_1 = 106\ \ 5\ 29.617$$
$$w(b)_1 = -0.302\,, \quad y(b)_1 = 269\ 57\ 22.698$$
$$(ll,6) = 132.862$$

$\beta_1'' = +(9.17609)$

$\beta_1''' = +(8.14082)$, $\gamma_1''' = +(8.96473)$

$\beta_1^{IV} = +(9.51809)$, $\gamma_1^{IV} = +(9.62332)$, $\delta_1'' = +(9.68218)$

$\beta_1^{V} = +(9.66883)$, $\gamma_1^{V} = +(9.92410)$, $\delta_1' = +(9.94563)$, $\varepsilon_1' = +(9.89042)$

$(2,2,1)_1 = 10.0 \qquad (a,a,4)_1 = (1.39590)$
$(3,3,2)_1 = (1.33630)\,, \quad (b,b,5)_1 = (0.84881)$
$(4,4,3)_1 = (1.10206)\,,$

Station (2).

$y(1)_2 = 27^\circ 55'\ 7''000$
$w(2)_2 = +\ 0''302\,, \quad y(2)_2 = 45\ 16\ 35.302$
$w(3)_2 = +\ 1.301\,, \quad y(3)_2 = 64\ 53\ 37.301$
$w(4)_2 = -\ 0.171\,, \quad y(4)_2 = 342\ 17\ 11.829$
$(ll,4) = 14.077$
$\beta_2'' = +\ (9.43573)\,, \quad \beta_2''' = +\ (9.57719)\,, \quad \gamma_2''' = +\ (9.78336)$
$(2,2,1)_2 = (0.74036)\,, \quad (3,3,2)_2 = (1.12788)\,, \quad (4,4,3)_2 = (1.09584)$

Station (3).

$y(1)_3 = 179^\circ 43'\ 9''000$
$w(2)_3 = -\ 0''319\,, \quad y(2)_3 = 243\ 45\ 34.681$
$w(3)_3 = -\ 0.102\,, \quad y(3)_3 = 268\ 36\ 49.898$
$(ll,3) = 2.121$
$\beta_3'' = +\ (9.61881)$
$(2,2,1)_3 = (1.17124)\,, \quad (3,3,2)_3 = (0.89040)$

Station (4).

$y(1)_4 = 88^\circ 37'\ 44''000$
$w(2)_4 = -\ 1''165\,, \quad y(2)_4 = 128\ 57\ 58.835$
$w(3)_4 = +\ 0.679\,, \quad y(3)_4 = 170\ 26\ 40.679$
$(ll,3) = 14.685$
$\beta_4'' = (9.64573)$
$(2,2,1)_4 = (0.93785)\,, \quad (3,3,2)_4 = (0.69646)$

Station (5).

$y(1)_5 = 252^\circ 59'\ 37''000$
$w(2)_5 = -\ 1''528\,, \quad y(2)_5 = 276\ 32\ 45.472$
$w(3)_5 = +\ 0.781\,, \quad y(3)_5 = 359\ 40\ 37.781$
$(ll,3) = 6.652$
$\beta_5'' = (9.74036)$
$(2,2,1)_5 = (1.00000)\,, \quad (3,3,2)_5 = (0.69680)$

Die Werthe der Winkel, die sich aus den vorstehenden Richtungen ergeben, so wie die Summen der Fehlerquadrate stimmen mit denen, die die vorhergehende Methode ergeben hat, überein, wie aus der Vergleichung mit dem Art. 89 hervorgeht; die Werthe der Hülfsgrössen sind verschieden, wie nicht anders sein kann.

111.

Die Berechnung der $u(m)_s$ geschieht hier durch denselben Ausdruck wie im vorhergehenden Verfahren, nemlich durch

$$u(m)_s = -\frac{p_{m-1}}{P_{m-1}} \Sigma w(r)_s$$

wobei hier ausser den im Art. 90 beigefügten Bemerkungen noch angeführt werden kann, dass jetzt in diesem Ausdruck immer $w(1)_s = 0$ zu setzen ist. Dieselben a. a. O. angeführten Beispiele geben hier

$u(1)_1 = -0''158$, $u(1)_2 = -0''151$, $u(1)_3 = +0''160$
$u(9)_1 = -0.708$, $u(4)_2 = -0.565$, $u(4)_3 = +0.140$
$u(14)_1 = -0.322$, $u(8)_2 = -0.358$,
$u(21)_1 = -0.508$,

die gleichwie die $w(r)_s$ und $y(r)_s$ von denen des ersten Verfahrens verschieden sind. Aber aus demselben Grunde, aus welchem in beiden Verfahren die Unterschiede der $y(r)_s$ einander gleich sein müssen, müssen auch die Aggregate $u(m)_s + w(r)_s$, die denselben Gruppen von Gyris angehören, in beiden Verfahren einander gleich werden, die Richtung mag in der betr. Gruppe beobachtet sein, oder nicht. Z. B.

Erstes Verfahren.	Zweites Verfahren.
$u(1)_1 + w(a)_1 = +0''571 - 0''111 = +0''460$	$= -0''158 + 0''617 = +0''459$
$u(1)_1 + w(b)_1 = +0.571 - 1.030 = -0.459$	$= -0.158 - 0.302 = -0.460$
$u(1)_1 + w(1)_1 = +0.571 - 0.728 = -0.157$	$= -0.158 \quad 0 \quad = -0.158$
$u(1)_1 + w(2)_1 = +0.571 + 0.821 = +1.392$	$= -0.158 + 1.549 = +1.391$
$u(1)_1 + w(3)_1 = +0.571 - 0.245 = +0.326$	$= -0.158 + 0.483 = +0.325$
$u(1)_1 + w(4)_1 = +0.571 - 0.862 = -0.291$	$= -0.158 - 0.134 = -0.292$
$u(21)_1 + w(1)_1 = +0.220 - 0.728 = -0.508$	$= -0.508 \quad 0 \quad = -0.508$
$u(1)_2 + w(1)_2 = +0.062 - 0.213 = -0.151$	$= -0.151 \quad 0 \quad = -0.151$
$u(1)_2 - w(3)_2 = +0.062 + 1.087 = +1.149$	$= -0.151 + 1.301 = +1,150$

Nicht nur die Aggregate $u(m)_s + x(r)_s$, sondern auch die $u(m)_s$ selbst sind bei dem gegenwärtigen Verfahren eben so wie die Winkel, oder die Unterschiede der Richtungen, bestimmte Grössen.

112.

Die Bedingungsgleichungen bleiben nun eben so wie sie im Art. 91 aufgestellt worden sind, und nach der Substitution der vorstehenden Werthe der $y(r)_s$, ergeben sich dieselben Werthe der $F(I)$, $F(II)$, etc.

Die Differentiale der Bedingungsgleichungen, die im Art. 92 enthalten sind, erleiden daher keine weiteren Veränderungen als dass die Glieder, die mit $\delta(1)_1$, $\delta(1)_2$, $\delta(1)_3$, $\delta(1)_4$, $\delta(1)_5$ multiplicirt sind, wegfallen. In der im Art. 93 gegebenen Zusammenstellung der Coefficienten dieser Gleichungen muss man jetzt die erste Zeile jeder Abtheilung der Tafel sich hinweg denken. Zur Berechnung der $\eta(r,I)_s$ ergeben sich jetzt die folgenden Ausdrücke, die mehr oder minder abgekürzt, auf allen Stationen Geltung haben, und durch die Vertauschung der Zahl I mit II, III, etc. auf alle Bedingungsgleichungen anzuwenden sind.

$$
\begin{aligned}
\eta(2,I)_s &= q(2,I)_s \\
\eta(3,I)_s &= \beta_s''.q(2,I)_s + q(3,I)_s \\
\eta(4,I)_s &= \beta_s'''.q(2,I)_s + \gamma_s'''.q(3,I)_s + q(4,I)_s \\
\eta(a,I)_s &= \beta_s^{IV}.q(2,I)_s + \gamma_s^{IV}.q(3,I)_s + \delta_s^{IV}.q(4,I)_s \\
\eta(b,I)_s &= \beta_s^{V}.q(2,I)_s + \gamma_s^{V}.q(3,I)_s + \delta_s^{V}.q(4,I)_s
\end{aligned}
$$

Die beiden letzten kürzen sich ab, weil $q(a,I)$ und $q(b,I)$ Null sind. Die Rechnung gab

r	s	$\log\eta(r,I)_s$	$\log\eta(r,II)_s$	$\log\eta(r,III)_s$	$\log\eta(r,IV)_s$	$\log\eta(r,V)_s$	$\log\eta(r,VI)_s$
2	1	—	0.	0. n	—	9.81470	—
3		0. n	9.17609	9.17609n	0.	8.99079	9.28926
4		8.96417n	8.14082	9.99395	9.95799n	9.90910	9.91385
a		9.62332n	9.51809	9.18002	8.78509n	9.77889	9.66989
b		9.92410n	9.66883	9.61894	8.63010n	0.00527	9.94010
2	2	—	—	—	—	0.40289	0.05406
3		—	—	0.	—	9.69181n	9.48979
4		—	—	9.78336	0. n	9.37606	9.80784
2	3	0. n	0.	—	—	—	—
3		9.76662	9.61881	—	—	—	—
2	4	0.	—	—	0. n	—	9.69538n
3		9.64573	—	—	9.74639	—	9.20078n
2	5	—	0. n	0.	—	9.70523	–
3		—	9.65322	9.74036	—	9.17325n	-

113.

Zur Berechnung der $f(r,I)_s$, etc. dienen jetzt die folgenden allgemeinen Ausdrücke,

$$
\begin{aligned}
f(2,I)_s &= Q(2,I)_s + \beta_s''.Q(3,I)_s + \beta_s'''.Q(4,I)_s + \beta_s^{IV}.Q(a,I)_s + \beta_s^{V}.Q(b,I)_s \\
f(3,I)_s &= Q(3,I)_s + \gamma_s'''.Q(4,I)_s + \gamma_s^{IV}.Q(a,I)_s + \gamma_s^{V}.Q(b,I)_s \\
f(4,I)_s &= Q(4,I)_s + \delta_s^{IV}.Q(a,I)_s + \delta_s^{V}.Q(b,I)_s \\
f(a,I)_s &= Q(a,I)_s + \varepsilon_s^{V}.Q(b,I)_s \\
f(b,I)_s &= Q(b,I)_s
\end{aligned}
$$

in welchen die $Q(2,I)_s$, etc. dieselbe Bedeutung haben wie in dem ersten Verfahren, und die auch auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen sind. Für das Beispiel ergab sich

r	s	$\log Q(r,I)_s$	$\log Q(r,II)_s$	$\log Q(r,III)_s$	$\log Q(r,IV)_s$	$\log Q(r,V)_s$	$\log Q(r,VI)_s$
2	1	—	9.00000	9.00000n	—	8.81470	—
3		8.66370n	7.83979	7.83979n	8.66370	7.65449	7.95296
4		7.86211n	7.03876	8.89189	8.85593n	8.80704	8.81179
a		8.22742n	8.12219	7.78412	7.38919n	8.38299	8.27399
b		9.07529n	8.82002	8.77013	7.78129n	9.15646	9.09129
2	2	—	—	—	—	9.66253	9.31370
3		—	—	9.25964	—	8.56393n	8.36191
4		—	—	8.68752	8.90416n	8.28022	9.71200
2	3	8.82876n	8.82876	—	—	—	—
3		8.87622	8.72841	—	—	—	—
2	4	9.06215	—	—	9.06215n	—	8.75753n
3		8.94927	—	—	9.04993	—	8.50432n
2	5	—	9.00000n	9.00000	—	6.70523	—
3		—	8.95642	9.04356	—	8.47645n	—

r	s	$\log f(r,I)_s$	$\log f(r,II)_s$	$\log f(r,III)_s$	$\log f(r,IV)_s$	$\log f(r,V)_s$	$\log f(r,VI)_s$
2	1	8.83288n	9.13431	8.84806n	7.36078	9.15129	8.81953
3		9.18673n	8.83288	8.71839	8.52349	9.14907	9.10192
4		9.08039n	8.81798	9.12339	8.89365n	9.30588	9.26185
a		9.03858n	8.81015	8.71475	7.85406n	9.13210	9.05945
b		9.07529n	8.82002	8.77013	7.78129n	9.15646	9.09129
2	2	—	—	8.58784	8.48134n	9.65988	9.36485
3		—	—	9.01731	8.68752n	8.39901n	8.73477
4		—	—	8.68752	8.90416n	8.28022	8.71200
2	3	8.55814n	8.95260	—	—	—	—
3		8.87622	8.72841	—	—	—	—
2	4	9.18960	—	—	8.81799n	—	8.85336n
3		8.94927	—	—	9.04993	—	8.50432n
2	5	—	8.70116n	9.20629	—	8.05697n	—
3		—	8.95642	9.04356	—	8.47645n	—

114.

Die Berechnung der Coefficienten der Endgleichungen wird hier eben so ausgeführt wie in dem ersten Verfahren. Es ergab sich

i	(i,I)	(i,II)	(i,III)	(i,IV)	(i,V)	(i,VI)
I	0.41981	−0.10421	−0.05229	−0.09915	−0.14096	−0.19780
II		0.36660	−0.12073	+0.00229	+0.12312	+0.06600
III			0.46821	−0.12928	+0.02412	+0.17104
IV				0.36980	−0.08036	−0.06841
V					1.44453	+0.71131
VI						0.47808

Vergleicht man diese Coefficienten mit denen des Art. 95, die das erste Verfahren gegeben hat, so wird man finden, dass sie, abgesehen von den kleinen Unterschieden der letzten Stelle, die von den Fehlern der letzten Stelle der angewandten Logarithmen herrühren, mit diesen identisch sind, obgleich die Hülfsgrössen, die zu ihrer Berechnung gedient haben, in beiden Verfahren sehr von einander verschieden sind. Es ist dieses kein Zufall, sondern es lässt sich leicht zeigen, dass die Endgleichungen identisch dieselben werden müssen, wie man auch das vorhergehende Verfahren eingerichtet haben mag.

Wir brauchen also die Endgleichungen nicht von Neuem aufzulösen, sondern die Werthe der Unbekannten (I), (II), etc., die im Art. 95 gefunden wurden, haben auch hier Geltung.

Auch die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate wird dieselbe, die durch das erste Verfahren gefunden wurde.

115.

Um die Werthe der letzten Verbesserungen $z(r)_{,}$ zu finden, dient nun wieder die allgemeine Gleichung

$$z(r)_{,} = f(r,I)_{,}.(I) + f(r,II)_{,}.(II) + f(r,III)_{,}.(III) + \dots$$

in welcher aber die Werthe der $f(r,I)_{,}$, etc. angewandt werden müssen, die das gegenwärtige Verfahren gegeben hat. Es folgt von selbst daraus, dass alle $z(1)_{,} = 0$ sind. Wir bekommen nun

$z(2)_1 = -0''033, \quad z(2)_2 = -0''585, \quad z(2)_3 = +0''488$
$z(3)_1 = -0.547, \quad z(3)_2 = +0.490, \quad z(3)_3 = +0.546$
$z(4)_1 = +0.352, \quad z(4)_2 = +0.404$
$z(a)_1 = -0.144$
$z(b)_1 = -0.174$

$z(2)_4 = +1''332, \quad z(2)_5 = +0''703$
$z(3)_4 = -0.153, \quad z(3)_5 = +1.258$

und zieht man diese von den im Art. 110 enthaltenen Werthen der $y(r)_s$ ab, so ergeben sich die folgenden wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen,

$x(1)_1 = 63^\circ 14' 10''000, \quad x(1)_2 = 27^\circ 55' 7''000$
$x(2)_1 = 96\ 29\ 53.582, \quad x(2)_2 = 45\ 16\ 35.887$
$x(3)_1 = 308\ 51\ 38.030, \quad x(3)_2 = 64\ 53\ 36.811$
$x(4)_1 = 215\ 58\ 16.514, \quad x(4)_2 = 342\ 17\ 11.425$
$x(a)_1 = 106\ 5\ 29.761,$
$x(b)_1 = 269\ 57\ 22.872,$

$x(1)_3 = 179^\circ 43' 9''000, \quad x(1)_4 = 88^\circ 37' 44''000$
$x(2)_3 = 243\ 45\ 34.193, \quad x(2)_4 = 128\ 57\ 57.503$
$x(3)_3 = 268\ 36\ 49.352, \quad x(3)_4 = 170\ 26\ 40.832$

$x(1)_5 = 252^\circ 59' 37''000$
$x(2)_5 = 276\ 32\ 44.769$
$x(3)_5 = 359\ 40\ 36.523$

Vergleicht man die hieraus folgenden Winkel mit denen des Art. 96, die durch das erste Verfahren erhalten worden sind, so wird man eine Uebereinstimmung finden, die nichts zu wünschen übrig lässt.

Will man auch die wahrscheinlichsten Werthe der $u(m)_s$ kennen lernen, so dient dazu wieder der Ausdruck

$$u(m)_s = \frac{p_{m-1}}{P_{m-1}} \Sigma (z(r)_s - w(r)_s)$$

für welchen die Bemerkungen des Art. 111 wieder gelten.

116.

Die Berechnung der Gewichte ist bei dem gegenwärtigen Verfahren im Allgemeinen dieselbe wie beim ersten Verfahren, nur findet in Bezug auf die der Winkel $x(r)_s - x(1)_s$ eine Ausnahme statt. Da diese Winkel gegenwärtig die Unbekannten selbst sind, so fällt die Berech-

nung der Grössen in deren Bezeichnung M vorkommt weg, und es ist nach den Ausdrücken der Artt. 44 u. 48 zu verfahren.

Als Beispiel soll hier das Gewicht des Winkels

$$x(2)_1 - x(1)_1$$

berechnet werden, welches im Art. 97 nach dem ersten Verfahren schon berechnet wurde. In der hier eingeführten Bezeichnung giebt der Art. 44 sogleich

$$\pi(2)_1 = \frac{1}{(2,2,1)_1} + \frac{\beta_1''^2}{(3,3,2)_1} + \frac{\beta_1'''^2}{(4,4,3)_1} + \frac{\beta_1^{iv2}}{(a,a,4)_1} + \frac{\beta_1^{v2}}{(b,b,5)_1}$$

und aus dem Art. 48 bekommt man

$$\begin{aligned}
f(2,II,1)_1 &= f(2,II)_1 + f(2,I)_1 \,.\, (2)_1 \\
f(2,III,1)_1 &= f(2,III)_1 + f(2,I)_1 \,.\, (3)_1 \\
f(2,IV,1)_1 &= f(2,IV)_1 + f(2,I)_1 \,.\, (4)_1 \\
\text{etc.} & \qquad \text{etc.} \\
\hline
f(2,III,2)_1 &= f(2,III,1)_1 + f(2,II,1)_1 \,.\, (3)_2 \\
f(2,IV,2)_1 &= f(2,IV,1)_1 + f(2,II,1)_1 \,.\, (4)_2 \\
\text{etc.} & \qquad \text{etc.} \\
\hline
f(2,IV,3)_1 &= f(2,IV,2)_1 + f(2,III,2)_1 \,.\, (4)_3 \\
\text{etc.} & \qquad \text{etc.} \\
\text{etc.} & \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

woraus

$$\mu(2)_1 = \frac{f(2,I)_1^2}{(I,I)} + \frac{f(2,II,1)_1^2}{(II,II,1)} + \frac{f(2,III,2)_1^2}{(III,III,2)} + \text{etc.}$$

folgt. Das Gewicht P wird hierauf

$$P = \frac{1}{\pi(2)_1 - \mu(2)_1}$$

Für unser Beispiel bekommt man

$$\pi(2)_1 = 0.13625$$

$$\begin{aligned}
f(2,I)_1 &= -0.06807\,, & f(2,IV,3)_1 &= -0.01777 \\
f(2,II,1)_1 &= +0.11934\,, & f(2,V,4)_1 &= +0.08540 \\
f(2,III,2)_1 &= -0.03215\,, & f(2,VI,5)_1 &= -0.00217
\end{aligned}$$

$$\mu(2)_1 = 0.06200$$

und hiemit

$$P = 13{,}47$$

wie im Art. 97.

117.

Es soll als zweites Beispiel hier noch das Gewicht von

$$u(1)_3$$

berechnet werden, welcher Bogen mit dem Aggregat $u(1)_3 + x(1)_3$ des ersten Verfahrens identisch ist. Das Verfahren des vor. Art. ist hier nicht zulässig, sondern es muss statt dessen das allgemeine Verfahren angewandt werden. Da hier

$$u(1)_s = -\tfrac{1}{2}x(2)_3$$

ist, so wird $\Omega = -\tfrac{1}{2}\delta x(2)_3$ und folglich

$$k(2)_3 = -\tfrac{1}{2}, \quad k(3)_3 = 0$$

und ferner wird

$$(M,2)_3 = k(2)_3 = -\tfrac{1}{2}$$
$$(M,3)_3 = \beta_3''.\, k(2)_3 = -(9.3178)$$

Hiemit wird zuerst

$$R = 0.02242$$

mit dem Art. 101 übereinstimmend, obgleich die Hülfsgrössen hier ganz andere Werthe haben wie dort. Man erhält ferner

$$(I,M) = +0.01809\,, \quad (II,M) = -0.04484$$
$$(III,M) = (IV,M) = (V.M) = (VI,M) = 0$$

wie im Art. 101, und hieraus folgt schon ohne weitere Fortsetzung der Rechnung, dass dasselbe Gewicht wie dort, nemlich

$$P = 67,37$$

erhalten wird. Man sieht hieraus, dass beide Verfahren, ungeachtet ihrer Verschiedenheit, für die Winkel, die übrigen bestimmten Bögen, und für die Gewichte dieselben Resultate geben, wie auch nicht anders sein kann.

118.

Vergleicht man diese beiden Verfahrungsarten in Bezug auf die Arbeit, die sie verursachen mit einander, so scheint das Urtheil darüber sich zu Gunsten des ersten Verfahrens zu neigen. Das letzte Verfahren führt freilich in seinem letzten Theil auf eine geringere Anzahl von Ausdrücken wie jenes, indem in den für die η und z auf jeder Station Ein Ausdruck weniger vorhanden ist, dagegen sind aber die zu berechnenden Hülfsgrössen in diesem Verfahren zusammengesetzter wie in dem Vorhergehenden, da sie aus einer grösseren Anzahl von Gliedern bestehen. Mir scheint, dass die Gesammtwirkung dieser beiden, einander entgegengesetzten, Umstände zu Gunsten des ersten Verfahrens ausfällt. Es kann übrigens Jeder bei der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes sich ohne

vergebliche Mühe ein Urtheil über die relative Kürze dieser beiden Verfahrungsarten bilden, denn Nichts hindert sie untermischt anzuwenden. Man kann ohne Nachtheil für das Resultat auf einigen Stationen die eine, und auf anderen Stationen die andere dieser beiden Verfahrungsarten anwenden.

§. 5. Ausdehnung des im Vorhergehenden entwickelten Verfahrens auf den Fall, in welchem mehr wie Eine Grundlinie gemessen worden ist, oder man das Dreiecksnetz an ein benachbartes anschliessen will.

119.

Im Vorhergehenden ist immer angenommen worden, dass in dem Dreiecksnetz nur Eine Seite gegeben, oder mit anderen Worten nur Eine Grundlinie gemessen worden sei, wir wollen aber jetzt zur Betrachtung des Falles, wo zwei oder mehr Grundlinien gemessen worden sind, übergehen. Nehmen wir zuerst zwei gemessene Grundlinien an, dann ist klar, dass ausser den im Vorhergehenden erklärten Bedingungsgleichungen noch Eine vorhanden ist. Diese kann immer auf dieselbe Form gebracht werden wie die zweite Gattung der übrigen Bedingungsgleichungen, nur statt des Gliedes $= 1$ tritt das Verhältniss der beiden Grundlinien ein. Die neue Bedingungsgleichung ist daher immer

$$\frac{\sin\,[x(a) - x(b)]\,\sin\,[x(c) - x(d)]\,\ldots}{\sin\,[x(a') - x(b')]\,\sin\,[x(c') - x(d')]\,\ldots} - \frac{B'}{B} = 0$$

wenn B und B' die beiden gemessenen Grundlinien, und $x(a)$, $x(b)$, $x(c)$, $x(d)$, etc. $x(a')$, $x(b')$, $x(c')$, $x(d')$, etc. gewisse gemessene oder beobachtete Richtungen sind. Wenn mehr wie zwei Grundlinien gemessen worden sind, so kommen noch mehrere Bedingungsgleichungen wie die vorstehende hinzu, und zwar ist die Anzahl dieser dritten Gattung immer $= (m-1)$, wenn m Grundlinien gemessen worden sind.

Wenn z. B. in dem oben behandelten Beispiel die Linien Seeberg-Inselsberg und Warte-Wachsenburg unmittelbar gemessen wären, so würde ausser den angeführten sechs Bedingungsgleichungen, noch die folgende siebente vorhanden sein,

$$\frac{\sin\,[x(3)_1 - x(4)_1 - 0''140]\,\sin\,[x(3)_3 - x(2)_3 - 0''214]}{\sin\,[x(1)_2 - x(4)_2 - 0.140]\,\sin\,[x(2)_4 - x(1)_4 - 0.214]} - \frac{B'}{B} = 0$$

wo

$$B' = \text{Seite (Warte-Wachsenburg)}$$
$$B = \text{Seite (Seeberg-Inselsberg)}$$

sind, und diese Bedingungsgleichung hätte sofort den übrigen sechs des Art. 91 hinzugefügt, und eben so behandelt werden müssen.

120.

Bleiben wir bei der Annahme von zwei gemessenen Grundlinien stehen, da das Hinzukommen von mehreren nur die Wiederholung desselben Verfahrens verlangt. Nachdem die Ausgleichungen auf den Stationen ausgeführt worden sind, sind in die Bedingungsgleichung des vor. Art. nicht nur die Werthe der Richtungen, die im Vorhergehenden mit $y(r)_s$ bezeichnet worden sind, sondern auch die durch die Messungen gefundenen Werthe der Grundlinien B und B' zu substituiren. Diese Gleichung wird nun im Allgemeinen so wenig wie die übrigen Bedingungsgleichungen den Werth Null geben, sondern statt dessen einen anderen, den ich den früheren Bezeichnungen analog $F(B)$ nennen werde. Die Einheit von $F(B)$ sei, wie oben bei den ähnlichen Grössen, die siebente Stelle des Briggischen Logarithmus.

Durch die Differentiation unserer Gleichung, nachdem sie auf die logarithmische Form gebracht worden ist, erhalten wir

$$\frac{M}{r}\operatorname{cotg}[x(a)-x(b)]\delta[x(a)-x(b)]+\frac{M}{r}\operatorname{cotg}[x(c)-x(d)]\delta[x(c)-x(d)]+\ldots$$
$$-\frac{M}{r}\operatorname{cotg}[x(a')-x(b')]\delta[x(a')-x(b')]-\frac{M}{r}\operatorname{cotg}[x(c')-x(d')]\delta[x(c')-x(d')]-\ldots$$
$$+\frac{M}{B}\delta B-\frac{M}{B'}\delta B'+F(B)=0$$

und in dieser Form ist diese Gleichung als eine der Gleichungen (30) der allgemeinen Aufgabe zu betrachten, und demgemäss eben so zu behandeln wie im Vorhergehenden von den übrigen Bedingungsgleichungen gezeigt worden ist. Damit in den Verbesserungen der Richtungen wieder die Secunde, und in den Verbesserungen δB und $\delta B'$ der Grundlinien dieselbe Einheit, in welcher diese ausgedrückt sind zur Einheit werde, ist mit Rücksicht auf die schon festgesetzte Einheit von $F(B)$, M dem Zehnmillionfachen des Moduls der Briggischen Logarithmen, und $r = 206265''$ zu setzen. Es wird daher

$$\log M = 6.63778$$
$$\log r = 5.31443$$

Die Coefficienten der Verbesserungen der Richtungen werden also eben so berechnet wie oben in den Bedingungsgleichungen zweiter Gattung.

121.

Man würde nun die Auflösung der vorliegenden Aufgabe, blos mit dem Unterschiede, dass zu den Unbekannten der vorhergehenden Aufgabe, in welcher nur Eine Grundlinie vorausgesetzt ist, die beiden neuen Unbekannten δB und $\delta B'$ hinzugekommen sind, nach den im Vorhergehenden abgeleiteten Erklärungen und Vorschriften rationel zu Ende führen können, wenn nicht noch eine Bedingung zu erfüllen wäre, die so beschaffen ist, dass sie, gegenwärtig wenigstens, gar nicht erfüllt werden kann.

Das Messen eines Winkels (oder einer Richtung) und das Messen einer Grundlinie sind zwei gänzlich von einander verschiedene Operationen, die eine directe Vergleichung ihrer relativen Genauigkeit gar nicht zulassen, aber dennoch muss man, um die im vor. Art. erhaltene Gleichung in Verbindung mit den übrigen Bedingungsgleichungen der Aufgabe weiter behandeln zu können, ein Maass der relativen Genauigkeit zwischen Winkel- oder Richtungsmessungen und Grundlinienmessungen kennen, indem in derselben sowohl die wahrscheinlichsten Verbesserungen dieser wie die jener die Unbekannten sind. Man muss, mit anderen Worten, den Fehler der Grundlinienmessungen kennen, der dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt, wie der Fehler von einer Secunde in den Winkel- oder Richtungsmessungen, und hieraus die Gewichte bestimmen, welche δB und $\delta B'$ beizulegen sind, während die Gewichte der Winkel- oder Richtungsmessungen gleich Eins gesetzt werden.

Von den mittleren Fehlern, womit die Messungen verschiedener Grundlinien behaftet sind, lässt sich im Voraus nur wenig sagen. Von zwei Grundlinien, die unter völlig gleichen Umständen gemessen sind, lässt sich mit Gewissheit behaupten, dass der mittlere Fehler der längeren grösser sein muss, wie der der kürzeren, denn die Fehlerquellen wiederholen sich bei jener öfterer wie bei dieser, aber dass die mittleren Fehler solcher Grundlinien ihren Längen proportional sein sollten, wie zuweilen behauptet worden ist, muss bestritten werden. Wenn angenommen werden dürfte, dass bei allen möglichen Fehlerquellen gleiche positive und negative Fehler gleiche Wahrscheinlichkeit hätten, so würde man die mittleren Fehler mehrerer unter völlig gleichen Umständen gemessenen Grundlinien den Quadratwurzeln aus ihren Längen proportional setzen können, aber diese Annahme ist auch nicht in aller Strenge

richtig, da es Fehlerquellen giebt, die stets in demselben Sinne wirken, z. B. die Fehler der Etalonirung der Messstangen.

Um die Wahrscheinlichkeit irgend eines gegebenen Fehlers in der Messung einer Grundlinie mit annehmbarer Annäherung bestimmen zu können, müsste man diese Grundlinie zu vielen wiederholten Malen gemessen haben, aber solche Wiederholungen dieser Messungen liegen gegenwärtig, wenigstens öffentlich, gar nicht vor, und die Schwierigkeit derselben, so wie der Zeit- und Kostenaufwand, den sie erfordern, veranlassen die Annahme, dass sie so bald noch nicht in der im Allgemeinen erforderlichen Ausdehnung vorhanden sein werden*). Man kann daher auch nicht die zur rationellen Anwendung der Gleichungen des vor. Art. erforderliche Bestimmung der Gewichte der Messungen der Grundlinien in Bezug auf die der Winkel- oder Richtungsmessungen ausführen, und muss daher vor der Hand von der strengen Benutzung derselben absehen.

122.

Der Fehler in den Messungen der Grundlinien, die mit den besten Apparaten und der grössten Sorgfalt ausgeführt sind, dessen Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von Einer Secunde in den Winkel- oder Richtungsmessungen gleichkommt, ist gewiss ein sehr kleiner Theil eines Meters, und bezeichnet man ihn für die verschiedenen Grundlinien mit $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p'}$, etc. Meter, so werden p, p', etc. grosse Zahlen sein. Dem Vorhergehenden zufolge müssen nun den Bestimmungen der Grundlinien die Gewichte p^2, p'^2, etc. beigelegt werden wenn man den Bestimmungen der Richtungen das Gewicht $= 1$ beilegt. Aber im Laufe der Auflösung unserer Aufgabe treten diese Gewichte in die Nenner der Coefficienten der Gleichungen ein, und es wird dadurch bewirkt, dass in den Endgleichungen die Coefficienten der Verbesserungen der Grundlinien mit weit kleineren Coefficienten behaftet sind, wie die der Richtungen oder Winkel. Die Verbesserungen der Grundlinien werden daher selbst sehr klein, und äussern eine geringe Rückwirkung

*) Dem Vernehmen nach besitzt die Sternwarte Pulkowa, als Lehrmittel für die angehenden Geodäten, eine Probebasis nebst den dazu gehörigen Messapparaten. Es würde gewiss von Nutzen sein, wenn die damit gewonnenen Erfahrungen veröffentlicht würden.

auf die der Richtungen oder Winkel, und können daher ohne erhebliche Fehler in den letzteren zu veranlassen, übergangen werden; man kann, mathematisch zu reden, die Gewichte der Grundlinien in Bezug auf die der Winkel oder Richtungen unendlich gross setzen, wodurch die Verbesserungen jener Null werden. Die Gleichung des Art. 119 nimmt hierauf die folgende Form an,

$$\frac{M}{r}\text{cotg}[x(a)-x(b)]\delta[x(a)-x(b)]+\frac{M}{r}\text{cotg}[x(c)-x(d)]\delta[x(c)-x(d)]+\ldots$$
$$-\frac{M}{r}\text{cotg}[x(a')-x(b')]\delta[x(a')-x(b')]-\frac{M}{r}\text{cotg}[x(c')-x(d')]\delta[x(c')-x(d')]-\ldots+F(B) = 0$$

und wird den Bedingungsgleichungen zweiter Gattung völlig ähnlich. Die Auflösung unserer Aufgabe besitzt nun die Eigenschaft, dass nicht nur den Bedingungen zwischen den Winkeln desselben vollständig Gnüge geleistet wird, sondern auch alle gemessenen Grundlinien genau dargestellt werden.

123.

Es wird nicht undienlich sein das Vorhergehende mit einigen Beispielen der einfachsten Art zu erläutern. Es soll zuerst das Dreiecksnetz aus einem einzigen Dreieck bestehen, in welchem alle drei Winkel und zwei Seiten gemessen worden sind. Ich nehme an, dass man erhalten habe

$$\begin{aligned} \alpha &= 40^\circ\ 0'\ 0''00 \\ \beta &= 65\ \ 0\ \ 0.00 \\ \gamma &= 75\ \ 0\ \ 3.00 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 1000.000 \\ b &= 1409.978 \end{aligned}\right\}\ \text{Meter}$$

und dass die Seite a dem Winkel α, die Seite b dem Winkel β gegenüber liege. Hier finden zwei Bedingungsgleichungen statt, nemlich, wenn der sphärische Ueberschuss übergangen wird,

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = 0$$
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - \frac{a}{b} = 0$$

Die Substitution der vorstehenden Werthe hierin giebt

$$F(I) = +3''00\,, \quad F(II) = +41$$

und durch die Differentiation erhält man, mit Weglassung der Aenderungen von a und b,

$$\delta\alpha + \delta\beta + 3''00 = 0$$
$$+ 25.092\delta\alpha - 9.818\delta\beta + 41 = 0$$

und hieraus entsteht die folgende Zusammenstellung

r	$q(r,I)$	$q(r,II)$
α	+1	+(1.39951)
β	+1	−(0.99202)
γ	+1	0

Setzt man nun das Gewicht der Winkel = 1, so werden $q(r,I) = f(r,I)$, u. s. w. und folglich

$$(I,I) = 3\,,\quad (I,II) = +15.274\,,\quad (II,II) = 726.02$$

woraus man

$$(I) = +0''7979\,,\quad (II) = +(8.59862)\,,\quad W = 4.021$$

und hiemit

$$z(\alpha) = +1''794$$
$$z(\beta) = +0.408$$
$$z(\gamma) = +0.798$$

bekommt. Die wahrscheinlichsten Werthe der Winkel werden also

$$\alpha = 39^0\,59'\,58''206$$
$$\beta = 64\;\;59\;\;59.592$$
$$\gamma = 75\;\;0\;\;2.202$$

während die Seiten oder Grundlinien unverändert bleiben.

124.

Es soll jetzt dasselbe Beispiel mit der Abänderung vorgenommen werden, dass für die relative Genauigkeit der Messungen der Winkel und der Grundlinien eine Hypothese aufgestellt wird. Indem ich annehme, dass Eine Secunde Fehler in den Winkelmessungen dieselbe Wahrscheinlichkeit habe wie der Fehler von einem halben Millimeter in der Messung einer Grundlinie von Tausend Metern Länge, meine ich eine Hypothese aufgestellt zu haben, die wohl zuweilen mit dem wahren Sachverhalt übereinstimmen kann, lasse übrigens Jedem unbenommen, dafür eine andere einzuführen, wenn grössere Erfahrungen im Messen

von Grundlinien dafür sprechen sollten. Da meine Annahme hypothetisch ist, so soll sie für beide Grundlinien unverändert gelten. Die erste Zusammenstellung wird jetzt

r	$q(r,I)$	$q(r,II)$
α	+1	+(1.39954)
β	+1	−(0.99202)
γ	+1	0
a	0	−(3.63778)
b	0	+(3.48857)

wo die a und b gegenüberstehenden Zahlen, dem Art. 120 gemäss, die Werthe von $-\frac{M}{a}$ und $+\frac{M}{b}$ sind. Da der obigen Hypothese zufolge das Gewicht der Grundlinien $= (2000)^2$ gesetzt werden muss, während das der Winkel $= 1$ ist, so ergiebt sich die folgende Zusammenstellung

r	$f(r,I)$	$f(r,II)$
α	+1	+(1.39954)
β	+1	−(0.99202)
γ	+1	0
a	0	−(7.03572−10)
b	0	+(6.88651−10)

Hiemit werden nach und nach

$$(I,I) = 3\,,\quad (I,II) = +15.274\,,\quad (II,II) = 733.11$$
$$(I) = +\,0''8001$$
$$(II) = +(8.59390)$$
$$W = 4.010$$

$$z(\alpha) = +1''785\,,\qquad z(a) = -0^m000044$$
$$z(\beta) = +0.415\,,\qquad z(b) = +0.000030$$
$$z(\gamma) = +0.800\,,$$

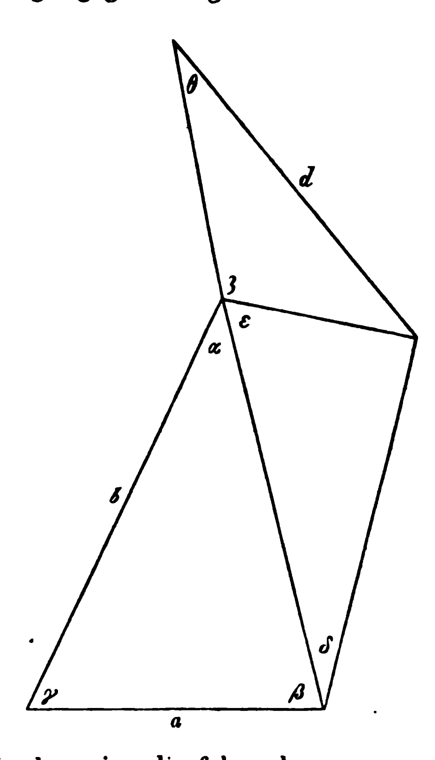
$$\alpha = 39^0\,59'\,58''215\,,\qquad a = 1000^m000044$$
$$\beta = 64\;\;59\;\;59.585\,,\qquad b = 1409.977970$$
$$\gamma = 75\;\;0\;\;2.200$$

Diese Werthe der Winkel sind keine volle Hundertstelsecunde von den vorher erhaltenen verschieden, und die Aenderungen der Grundlinien höchst unbedeutend. Auch die Summe der Fehlerquadrate hat sich un-

bedeutend verkleinert, indem sie nur 0.011 kleiner geworden ist, wie bei der vorhergegangenen Behandlung dieser Aufgabe.

125.

Um einen zusammengesetzteren Fall vorzuführen nehme ich an, dass im Dreiecksnetze, welches die folgende Figur darstellt, die eingeschriebenen Winkel und Seiten gemessen seien, die ich so gewählt habe, dass nur drei Bedingungsgleichungen vorhanden sind.



Die erhaltenen Werthe seien die folgenden,

$$\begin{aligned}
\alpha &= 40^{0}\ 0'\ 0''00 \\
\beta &= 65\ \ 0\ 0.00 \\
\gamma &= 75\ \ 0\ 3.00 \\
\delta &= 29\ 45\ 0.00 \\
\varepsilon &= 66\ 30\ 0.00 \\
\zeta &= 111\ 40\ 0.00 \\
\theta &= 31\ \ 0\ 0.00 \\
a &= 1000^{m}000 \\
b &= 1409.978 \\
d &= 1353.567
\end{aligned}$$

Die beiden ersten Bedingungsgleichungen sind nun dieselben wie im vorhergehenden Beispiel, und die dritte wird

$$\frac{\sin\gamma \sin\delta \sin\zeta}{\sin\alpha \sin(\delta+\varepsilon) \sin\theta} - \frac{d}{a} = 0$$

Ferner wird

$$F(I) = +3''00\,,\quad F(II) = +41\,,\quad F(III) = -27$$

$$-(1.39954)\delta\alpha + (0.75142)\delta\gamma + (1.59267)\delta\delta + (0.36283)\delta\varepsilon$$
$$-(0.92244)\delta\zeta - (1.54458)\delta\theta - 27 = 0$$

und man bekommt, wenn die Seiten unveränderlich angenommen werden,

r	$q(r,I)$	$q(r,II)$	$q(r,III)$
α	+1	+(1.39954)	−(1.39954)
β	+1	−(0.99202)	0
γ	+1	0	+(0.75142)
δ	0	0	+(1.59267)
ε	0	0	+(0.36283)
ζ	0	0	−(0.92244)
θ	0	0	−(1.54458)

$$(I,I) = 3\,,\quad (I,II) = +15.274\,,\quad (I,III) = -19.450$$
$$(II,II) = 726.02\,,\quad (II,III) = -629.63$$
$$(III,III) = 3496.9$$

$$(I) = +0''9045$$
$$(II) = +(8.88837)$$
$$(III) = +(8.66273)$$
$$W = 4.642$$

$$z(\alpha) = +1''691\,,\quad z(\delta) = +1''801$$
$$z(\beta) = +0.145\,,\quad z(\varepsilon) = +0.106$$
$$z(\gamma) = +1.164\,,\quad z(\zeta) = -0.385$$
$$z(\theta) = -1.612$$

und die wahrscheinlichsten Werthe

$$\alpha = 39^0\,59'\,58''309\,,\quad \delta = 29^0\,44'\,58''199$$
$$\beta = 64\;59\;59.855\,,\quad \varepsilon = 66\;29\;59.894$$
$$\gamma = 75\;0\;1.836\,,\quad \zeta = 111\;40\;0.385$$
$$\theta = 31\;0\;1.612$$

126.

Nimmt man auch auf die Aenderungen der Seiten oder Grundlinien dieses Beispiels Rücksicht, und nimmt das Gewicht derselben eben so an wie oben, so ergeben sich die folgenden Zusammenstellungen

r	$q(r,I)$	$q(r,II)$	$q(r,III)$	$f(r,I)$	$f(r,II)$	$f(r,III)$
α	$+1$	$+(1.39954)$	$-(1.39954)$	$+1$	$+(1.39954)$	$-(1.39954)$
β	$+1$	(0.99202)	0	$+1$	$-(0.99202)$	0
γ	$+1$	0	$+(0.75142)$	$+1$	0	$+(0.75142)$
δ	0	0	$+(1.59267)$	0	0	$+(1.59267)$
ε	0	0	$+(0.36283)$	0	0	$+(0.36283)$
ζ	0	0	$-(0.92244)$	0	0	$-(0.92244)$
θ	0	0	$-(1.54458)$	0	0	$-(1.54458)$
a	0	$-(3.63778)$	$+(3.63778)$	0	$-(7.03572)$	$+(7.03572)$
b	0	$+(3.48857)$	0	0	$+(6.88651)$	0
d	0	0	$-(3.50630)$	0	0	$-(6.90424)$

$$(I,I) = 3\,,\quad (I,II) = +15.274\,,\quad (I,III) = -\ 19.450$$
$$(II,II) = 733.11\,,\quad (II,III) = -634.35$$
$$(III,III) = 3504.2$$

$$(I) = +\ 0''9065$$
$$(II) = +(8.88453)$$
$$(III) = +(8.66071)$$
$$W = 4.626$$

$$z(\alpha) = +1''681\,,\quad z(\delta) = +1''792\,,\quad z(a) = -0^{m}0000335$$
$$z(\beta) = +0.154\,,\quad z(\varepsilon) = +0.106\,,\quad z(b) = +0.0000590$$
$$z(\gamma) = +1.165\,,\quad z(\zeta) = -0.383\,,\quad z(d) = -0.0000367$$
$$z(\theta) = -1.604$$

und die wahrscheinlichsten Werthe

$$\alpha = 39^{0}\,59'\,58''319\,,\qquad \delta = 29^{0}\,44'\,58''208$$
$$\beta = 64\ \ 59\ \ 59.846\,,\qquad \varepsilon = 66\ \ 29\ \ 59.894$$
$$\gamma = 75\ \ 0\ \ 1.835\,,\qquad \zeta = 111\ \ 40\ \ 0.383$$
$$\theta = 31\ \ 0\ \ 1.604$$

$$a = 1000^{m}0000335$$
$$b = 1409.9779410$$
$$d = 1353.5670367$$

Diese Werthe der Winkel sind von denen des vor. Art. höchstens 0"01 verschieden, und die Verbesserungen der Seiten oder Grundlinien sind wieder sehr klein. Auch die Summe der Fehlerquadrate ist durch die Zuziehung der Aenderungen der Grundlinien nur 0.016 kleiner geworden.

127.

Das Messen von mehr wie Einer Grundlinie in einem Dreiecksnetze trägt wesentlich zur genaueren Bestimmung der einzelnen Stücke desselben bei, und darf daher nie in einem Netze von bedeutender Ausdehnung unterlassen werden. In der Ausgleichung des Dreiecksnetzes spricht sich diese grössere Genauigkeit dadurch aus, dass die Gewichte der Unbekannten grösser werden, und die Vergrösserung dieser kann in einzelnen Fällen bedeutend werden. Um hievon ein Beispiel zu geben, will ich annehmen, dass in dem Dreiecksnetze, welches im Vorhergehenden zum Hauptbeispiel gedient hat, und im Art. 91 abgebildet ist, die beiden Seiten (1)(3) und (2)(4) direct gemessen worden seien. Ausser den bisherigen sechs Bedingungsgleichungen erhalten wir jetzt eine siebente, und diese ist die im Art. 103 erhaltene Relation zwischen den beiden eben genannten Seiten, die aber jetzt wie folgt gestellt werden muss;

$$\frac{\sin\,[x(3)_1-x(4)_1-0''140]\,\sin\,[x(3)_3-x(2)_3-0''244]}{\sin\,[x(1)_2-x(4)_2-0''140]\,\sin\,[x(2)_4-x(1)_4-0''244]}-\frac{(2)(4)}{(1)(3)}=0$$

Um diese Sache möglichst kurz behandeln zu können will ich annehmen, dass die für diese beiden Seiten oder Grundlinien erhaltenen Werthe dieselben seien die a. a. O. erhalten wurden, woraus die Folge ist, dass die oben für die Winkel dieses Dreiecksnetzes erhaltenen, wahrscheinlichsten Werthe sowohl wie die Summe der übrig bleibenden Fehlerquadrate dieselben bleiben müssen.

128.

Das Differential der eben aufgestellten neuen Bedingungsgleichung ist nun

$$+1.0627\delta x(4)_1-1.0627\delta x(3)_1-20.596\delta x(1)_2+20.596\delta x(4)_2$$
$$-45.454\,\delta x(2)_3+45.454\delta x(3)_3+24.794\delta x(1)_4-24.794\delta x(2)_4-21.1=0$$

indem die Substitution der Werthe der $y(r)_s$ des Art. 89 in diese Bedingungsgleichung

$$F(VII) = -21.1$$

giebt. Die Tafeln der Artt. 93 u. 94 bekommen jetzt in Bezug auf die neu eingeführte Bedingungsgleichung die folgenden Zusätze,

r	s	log $q(r, VII)_s$	log $\eta(r, VII)_s$	log $Q(r, VII)_s$	log $f(r, VII)_s$
1	1	—	—	—	—
2		—	—	—	7.38719n
3		0.02641n	0.02641n	8.68071n	8.54988n
4		0.02641	9.98535	8.88316	8.92007
a		—	9.14832	7.64415	7.88050
b		—	9.01038	7.80770	7.80770
1	2	1.31378n	1.31378n	9.92461n	9.92461n
2		—	—	—	9.33596n
3		—	—	—	9.21035
4		1.31378	1.31378	9.90906	9.90906
1	3	—	—	—	—
2		1.65757n	1.65757n	0.21572n	0.21572n
3		1.65757	1.65757	0.53379	0.53379
1	4	1.39436	1.39436	0.34363	0.34363
2		1.39436n	1.39436n	0.21235n	0.21235n
3		—	—	—	—
1	5	—	—	—	—
2		—	—	—	—
3		—	—	—	—

und hieraus ergeben sich die folgenden Werthe der Coefficienten der Endgleichungen, die denen des Art. 95 hinzuzufügen sind,

$$(I, VII) = +1.2603\,, \quad (V, VII) = +0.4577$$
$$(II, VII) = -1.6457\,, \quad (VI, VII) = +2.8900$$
$$(III, VII) = +1.0885\,, \quad (VII, VII) = 359.35$$
$$(IV, VII) = -0.1398$$

Die Ergänzung der Auflösung der Endgleichungen giebt nun

$$(7)_1 = -(0.47740)\,, \quad (7)_4 = -(0.06444)$$
$$(7)_2 = +(0.59234)\,, \quad (7)_5 = -(9.97330)$$
$$(7)_3 = -(0.24687)\,, \quad (7)_6 = -(1.83334)$$
$$(VII, VII, 6) = (2.19962)\,, \quad R_7 - R_6 = 0.000001 = 0$$
$$(VII) = +0.00024 = 0$$

die sich den, auf ähnliche Weise bezeichneten Grössen des Art. 95 anschliessen. Aus diesen Werthen von (VII) und $R_7 - R_6$, welche $= 0$ zu erachten sind, zeigt sich die obige Behauptung bestätigt, dass sowohl die Werthe der Unbekannten, wie die Summe der Fehlerquadrate unverändert bleiben.

129.

Im Art. 103 fanden wir das Gewicht der Seite Warte-Wachsenburg, oder (2)(4), in sofern dieselbe aus der Seite Seeberg-Inselsberg, oder (1)(3), bestimmt wird, $= 341.2$, es folgt aber aus dem Art. 52, dass dieses Gewicht jetzt unendlich gross gefunden werden muss. Um zu zeigen, dass die Rechnung es jetzt in der That so giebt, ist zu bemerken, dass dem im Art. 103 erhaltenen Werthe von S der Werth des Gliedes

$$\frac{(VII, M, 6)^2}{(VII, VII)}$$

hinzugefügt werden muss, und die Rechnung weiter keine Aenderung erleidet. Nun findet man aber leicht aus den vorhergehenden Zahlenangaben

$$(VII, M) = +1.54558\,, \quad (VII, M, 6) = +0.68116$$

hieraus

$$\frac{(VII, M, 6)^2}{(VII, VII)} = 0.0029301$$

und wenn man diesen Werth dem a. a. O. für S erhaltenen hinzufügt

$$S = 0.0066477 = R$$

folglich

$$P = \infty$$

wie es sein muss.

130.

Um an einem Beispiel zu zeigen wie gross die Vergrösserung des Gewichts unter Umständen werden kann, soll das Gewicht der Seite Seeberg-Warte, oder (1)(2), in Bezug auf die Seite Seeberg-Inselsberg, oder (1)(3), berechnet werden. Der Ausdruck ist, mit Weglassung der sphärischen Ueberschüsse, die hier nicht in Betracht kommen, da die genaue Berechnung der Seite selbst für unsern Zweck überflüssig ist,

$$(1)(2) = \frac{\sin\,[x(2)_3 - x(1)_3]\,\sin\,[x(2)_5 - x(1)_5]}{\sin\,[x(3)_2 - x(1)_2]\,\sin\,[x(3)_5 - x(2)_5]}\,(1)(3)$$

Da hieraus mit ausreichender Genauigkeit

$$\log (1)(2) = 4.09301$$

folgt, so giebt die Differentiation

$$\Omega = \text{const.} + 0^m0292410\delta[(2)_3 - (1)_3] + 0^m1377810\delta[(2)_5 - (1)_5]$$
$$- 0.0797740\delta[(3)_2 - (1)_2] - 0.0072350\delta[(3)_5 - (2)_5]$$

folglich

$$(M,1)_2 = +0.079974\,, \quad (M,2)_3 = +0.029241$$
$$(M,3)_2 = -0.079974\,, \quad (M,1)_5 = -0.137781$$
$$(M,4)_2 = -(8.20315)\,, \quad (M,2)_5 = +0.145016$$
$$(M,1)_3 = -0.29241\,, \quad (M,3)_5 = -0.007235$$
$$R = 0.0038990$$

$$(I,M) = -0.001507$$
$$(II,M) = -0.005319\,, \quad (II,M,1) - -0.005582$$
$$(III,M) = +0.014220\,, \quad (III,M,2) = +0.011898$$
$$(IV,M) = +0.003884\,, \quad (IV,M,3) = +0.007640$$
$$(V,M) = +0.000564\,, \quad (V,M,4) = +0.002903$$
$$(VI,M) = -0.004330\,, \quad (VI,M,5) = -0.008790$$
$$S = 0.0025438$$
$$P = 738.0$$

Dieses ist das Gewicht der Seite Seeberg-Warte, wenn man annimmt, dass nur die Grundlinie Seeberg-Inselsberg vorhanden ist, nimmt man hingegen an, dass auch die Grundlinie Warte-Wachsenburg gemessen worden ist, so kommen zu den vorstehenden Grössen noch

$$(VII,M) = -0.12806\,. \quad (VII,M,6) = +0.41955$$

hinzu, und es werden

$$S = 0.0036554$$
$$P = 4105$$

also das Gewicht beinahe sechs Mal grösser.

Im Allgemeinen verhält sich diese Sache so. Denkt man sich ein aus einer grossen Anzahl von Dreiecken bestehendes Netz und nur Eine gemessene Grundlinie, so werden, unter sonst gleichen Umständen, die Dreiecksseiten, die in der Nähe der Grundlinie liegen, die grössten Gewichte bekommen, je weiter aber eine Dreiecksseite von der Grundlinie entfernt ist, desto kleiner wird ihr Gewicht ausfallen. Stellt man sich nun vor, dass möglichst weit von jener entfernt eine zweite

Grundlinie gemessen werde, so werden zwar die Gewichte aller Dreiecksseiten vergrössert werden, aber die bedeutendste Vergrösserung der Gewichte wird die Dreiecksseiten treffen, die in der Nähe der zweiten Grundlinie liegen, und vorher die kleinsten Gewichte bekamen; eben so verhält es sich wenn mehr wie zwei Grundlinien gemessen worden sind.

131.

Mit dem Vorhergehenden steht der Fall in der engsten Beziehung, dass man ein auszugleichendes Dreiecksnetz an ein benachbartes, schon ausgeglichenes, anschliessen will. Man kann nemlich immer zwischen der Anschlussseite des benachbarten Netzes und der nächsten Grundlinie des auszugleichenden eine Bedingungsgleichung von derselben Form, wie die des Art. 119, aufstellen, in welcher im letzten Gliede statt der einen Grundlinie die Anschlusslinie eintritt. Diese Bedingungsgleichung ist den übrigen, die das auszugleichende Dreiecksnetz darbietet, hinzuzufügen, und eben so wie diese zu behandeln. Da die Anschlussseite genau dargestellt werden muss, so ist im Differential dieser Bedingungsgleichung das Differential der Anschlussseite gleich Null zu setzen.

132.

Die vorstehenden Betrachtungen führen uns auf einen Fall hin, der einer gleichen Behandlung unterworfen werden kann.

Wenn das auszugleichende Dreiecksnetz sehr gross ist, so kann es sich ereignen, dass die Zahl der Bedingungsgleichungen so gross wird, dass eine völlig rationelle Berechnung derselben nach dem im Vorhergehenden entwickelten Verfahren ihres grossen Umfanges wegen praktisch unausführbar wird, und an die Grenze des Unmöglichen streift. In diesem Falle kann man das ganze Netz in so viele Abtheilungen theilen, dass für jede derselben die Ausgleichung gewiss praktisch ausführbar wird. Die erste Abtheilung wird nun ohne Abänderung so ausgeglichen, wie im Vorhergehenden erklärt ist, für alle übrigen Abtheilungen führe man aber die oben erklärte Bedingungsgleichung ein, wodurch bewirkt wird, dass die Anschlussseite denselben Werth bekommt, wie in der vorhergehenden Abtheilung, und da man annehmen muss, dass in

einem so grossen Dreiecksnetze mehrere Grundlinien gemessen worden seien, so wird die Bedingungsgleichung zwischen der Anschlussseite und einer in den vorhergehenden Abtheilungen noch nicht benutzten Grundlinie aufzustellen sein.

Durch dieses Verfahren wird nun zwar nicht in aller Strenge die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate zu einem Minimum gemacht, aber der sich für diese Summe ergebende Werth wird sehr wenig grösser sein, wie das Minimum.

Es liegt hier der Satz zu Grunde, der so häufig in der angewandten Mathematik benutzt wird, nemlich in den Fällen, wo sich der strengen Behandlung einer Aufgabe unübersteigliche Hindernisse entgegen stellen, eine genäherte Auflösung Platz greifen zu lassen.

Uebrigens werden bei dem hier erklärten Verfahren alle vorhandenen trigonometrischen Bedingungsgleichungen vollständig erfüllt, und man kann daher das mit den obigen Modificationen ausgeglichene Dreiecksnetz fernerhin eben so wie jedes andere, völlig strenge ausgeglichene, benutzen.

§. 6. Recapitulation der zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes erforderlichen Vorschriften und Formeln.

133.

Es sind zwar im Vorhergehenden alle Vorschriften und Formeln zum angeführten Zwecke ausführlich abgeleitet und erklärt worden, allein es ist nicht zu vermeiden gewesen, dass sie abgesondert von einander an verschiedenen Stellen sich befinden, da die Erklärungen und Beweise zwischen denselben eingeschaltet werden mussten. Es scheint daher von Nutzen zu sein, diese Vorschriften und Formeln hier neben einander gestellt nochmals anzuführen. Der grösseren Einfachheit wegen, und weil es am häufigsten so angenommen werden darf, werde ich hier annehmen, dass auf jeder Station allen Einstellungen oder Beobachtungen dasselbe Gewicht, welches $= 1$ zu setzen ist, beigelegt werden darf, aber den Fall nicht ausschliessen, dass auf verschiedenen Stationen den einzelnen Beobachtungen ein anderes Gewicht beigelegt werden muss. Sollte auf einer und derselben Station der Fall eintreten, dass verschiedenen Beobachtungen verschiedene Gewichte beigelegt werden müssten,

so bietet diese Abhandlung in ihrem vorhergegangenen Inhalt das Verfahren dar, welches anzuwenden ist.

134.

Allgemeine Vorbereitung der Beobachtungen.

Die einzuführenden Bezeichnungen sollen im Allgemeinen dieselben sein, die im Vorhergehenden bei der Berechnung des Beispiels angewandt worden sind. Es sollen also, um das wiederholte Hinschreiben oft langer Namen zu vermeiden, oder der Unbestimmtheit vorzubeugen, die durch eine Abkürzung dieser Namen entstehen könnte, sowohl die Stationen, wie die auf jeder dieser beobachteten Richtungen mit in Klammern eingeschlossenen arabischen Zahlen bezeichnet werden; letztere sollen auf jeder Station mit der Eins anfangen, und es sollen denselben, wo eine Unterscheidung nothwendig wird, rechts unten als Index die Stationsnummern in kleinerer Schrift angehängt werden. Bei ausgedehnten Triangulationen kann man sich ein für alle Mal ein Verzeichniss anlegen, welches neben den Namen aller Dreieckspunkte, und den auf jeder derselben beobachteten Richtungen, die Stations- und Richtungsnummern enthält, wodurch jedem Irrthum vorgebeugt wird. Man kann auch diese Nummern in die Karte des Dreiecksnetzes eintragen.

Es sollen nun namentlich, wenn r die Richtungs- und s die Stationsnummern bezeichnen, gleichwie im obigen Beispiel,

$(r)_s$ der vorläufig angenommene Werth irgend einer Richtung,

$w(r)_s$ die durch die Ausgleichung auf der Station erhaltene Verbesserung von $(r)_s$, und

$y(r)_s$ das Resultat dieser Ausgleichung

bedeuten, so dass

$$y(r)_s = (r)_s + w(r)_s$$

wird. Im ganzen ersten Theile der Auflösung kann man die Stationsnummer weglassen, und sich begnügen (r), $w(r)$, $y(r)$ zu schreiben, wenn nur die Stationsnummer ein für alle Mal angegeben wird.

135.

Nachdem auf irgend einer Station die Messungen (oder die Beobachtungen der Richtungen) vollendet sind, kann man in Bezug auf diese

schon den ersten Theil der Auflösung unserer Aufgabe, nemlich die Ausgleichung auf dieser Station, ausführen, ohne dass man die Vollendung der Messungen auf den andern Stationen abzuwarten braucht.

Da die Beobachtungen selbst, von Gyrus zu Gyrus, immer so ausgeführt werden müssen, dass verschiedene Punkte des Kreises des Theodoliten in Anspruch genommen werden, so besteht die erste Arbeit darin, dass man zu den Originalbeobachtungen eines jeden Gyrus eine solche constante Zahl addirt, dass die Richtungen nach jedem Gegenstande, der eingeschnitten worden ist, einander nahe gleich werden; es ist zweckmässig diese Constanten ausserdem so zu wählen, dass die Richtungen nahe die Azimuthe der Gegenstände darstellen. Die Azimuthe muss man immer vom Südpunkt des Horizonts nach Westen durch den ganzen Umkreis zählen.

Man theile nun alle beobachteten Gyri je nach den in denselben eingeschnittenen Richtungen derart in Gruppen, dass in jeder dieser dieselben Richtungen ohne Lücken enthalten sind. Die Beobachtungen einer jeden Richtung jeder Gruppe für sich addire man, nehme hierauf eine dem Mittel dieser Summe beiläufig entsprechende Zahl als vorläufigen Werth der Richtung an, und ziehe das entsprechende Vielfache derselben von der Summe der Richtungen ab. Die erhaltenen Unterschiede stelle man für die verschiedenen Gruppen von Gyris tabularisch so zusammen, dass jede Columne die Resultate Einer Gruppe enthält, und die Beobachtungen jeder Richtung, neben dem vorläufig angenommenen Werthe dieser letzteren, eine Zeile bilden.

Unter der Bezeichnung p, $p_{,}$, $p_{,,}$, etc. stelle man jeder Columne die Zahl der Gyri, aus welcher die in derselben enthaltenen Summen bestehen, voran, die nachher die denselben beizulegenden Gewichte sind; auch füge man die arithmetischen Mittel aus den Zahlen jeder Columne hinzu.

Seien σ, σ', σ'', etc. die Summen der einzelnen Beobachtungen der Richtungen der erst in Betracht gezogenen Gruppe von Gyris; $\sigma_{,}$, $\sigma_{,}'$, $\sigma_{,}''$, etc., $\sigma_{,,}$, $\sigma_{,,}'$, $\sigma_{,,}''$, etc. etc. die Summen der weiter in Betracht zu ziehenden Gruppen,

$$\sigma - p \,.\, (1) = s\,, \quad \sigma' - p \,.\, (2) = s'\,, \quad \sigma'' - p \,.\, (3) = s''\,, \text{ etc.}$$
$$\sigma_{,} - p_{,} \,.\, (1) = s_{,}\,, \quad \sigma'_{,} - p_{,} \,.\, (2) = s'_{,}\,, \quad \sigma''_{,} - p_{,} \,.\, (3) = s''_{,}\,, \text{ etc.}$$
$$\sigma_{,,} - p_{,,} \,.\, (1) = s_{,,}\,, \quad \sigma'_{,,} - p_{,,} \,.\, (2) = s'_{,,}\,, \quad \sigma''_{,,} - p_{,,} \,.\, (3) = s''_{,,}\,, \text{ etc.}$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}$$

$$S = s + s' + s'' + \ldots$$
$$S_{,} = s_{,} + s'_{,} + s''_{,} + \ldots$$
$$S_{,,} = s_{,,} + s'_{,,} + s''_{,,} + \ldots$$
etc.

und

$$M = \frac{S}{m}, \quad M' = \frac{S_{,}}{m_{,}}, \quad M'' = \frac{S_{,,}}{m_{,,}}, \quad \text{etc.}$$

wenn m, $m_{,}$, $m_{,,}$, etc. die Zahl der Richtungen bezeichnen, die in jeder Gruppe eingeschnitten worden sind, dann wird die Tafel den folgenden Inhalt bekommen,

r	Vorl. Werthe.	Anzahl d. Beob. u. die Summen dieser.					
		p	$p_{,}$	$p_{,,}$	etc.	etc.	etc.
(1)	. . .	s	$s_{,}$	$s_{,,}$	etc.	. .	. .
(2)	. . .	s'	$s'_{,}$	$s'_{,,}$	etc.	. .	. .
(3)	. . .	s''	$s''_{,}$	$s''_{,,}$	etc.	. .	. .
etc.	. . .	etc.	etc.	etc.	etc.	. .	. .
		S	$S_{,}$	$S_{,,}$	etc.	. .	. .
		M	$M_{,}$	$M_{,,}$	etc.	. .	. .

wo aber in den verschiedenen Columnen die Stellen derjenigen Summen leer bleiben werden, die den Richtungen angehören, die in der betr. Gruppe von Gyris nicht eingeschnitten worden sind. Beispiele dieser Tafel findet man in dem Art. 84 u. d. f.

Die Summirungen, die hier verlangt werden, müssen sorgfältig ausgeführt werden, aber in Folge der vorangegangenen Vorbereitungen sind sie einfach, da man bei jeder Richtung nur auf die Secunden und deren Bruchtheile Rücksicht zu nehmen braucht, und am häufigsten auch die Zehnersecunden entweder gar nicht, oder höchstens ihre Unterschiede zu beachten nöthig hat. Bei der Bestimmung der vorläufigen Werthe der Richtungen ist nur darauf zu sehen, dass sie ohngefähr dem Mittel der eben genannten Summen entsprechen.

Den im Vorhergehenden enthaltenen Entwickelungen und Erklärungen zufolge sind nun

$$pl = s - M, \quad pl' = s' - M, \quad pl'' = s'' - M, \quad \text{etc.}$$
$$p_{,}l_{,} = s_{,} - M_{,}, \quad p_{,}l'_{,} = s'_{,} - M_{,}, \quad p_{,}l''_{,} = s''_{,} - M_{,}, \quad \text{etc.}$$
$$p_{,,}l_{,,} = s_{,,} - M_{,,}, \quad p_{,,}l'_{,,} = s'_{,,} - M_{,,}, \quad p_{,,}l''_{,,} = s''_{,,} - M_{,,}, \quad \text{etc.}$$
etc. etc.

Diese Unterschiede trage man in eine zweite Tafel ein, die auf entgegengesetzte Weise anzuordnen ist wie die erste, nemlich so, dass jede beobachtete Richtung ihre Columne bekommt, und die Resultate einer jeden Gruppe von Gyris eine Zeile bilden. Jeder Gruppe füge man die schon oben erklärten Gewichte, nebst den P und den Quotienten $\frac{p^2}{P}$ bei, und in ihrem unteren Theile setze man die (lx) und die Q an. Auch versehe man jede Gruppe von Gyris mit seiner laufenden Nummer. Der Inhalt dieser Tafel ist also der folgende,

Nr.	(1)	(2)	(3)	etc.			
1	pl	pl'	pl''	etc.	p	P	$p^2 : P$
2	$p_l l_l$	$p_l l'_l$	$p_l l''_l$	etc.	p_l	P_l	$p^2_l : P_l$
3	$p_{ll} l_{ll}$	$p_{ll} l'_{ll}$	$p_{ll} l''_{ll}$	etc.	p_{ll}	P_{ll}	$p^2_{ll} : P_{ll}$
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.
	(lx)	(lx')	(lx'')	etc.			
	Q	Q'	Q''	etc.			

in welcher, wie in der ersten Tafel, die entsprechenden Stellen leer bleiben werden. Auch von dieser Tafel findet man in dem Art. 84 u. d. f. Beispiele.

Dem Vorhergehenden zufolge ist nun

$$\begin{aligned} (lx) &= pl + p_l l_l + p_{ll} l_{ll} + \ldots \\ (lx') &= pl' + p_l l'_l + p_{ll} l'_{ll} + \ldots \\ (lx'') &= pl'' + p_l l''_l + p_{ll} l''_{ll} + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

zwischen welchen die Bedingungsgleichung

$$(lx) + (lx') + (lx'') + \ldots = 0$$

stattfindet. Die P, P_l, etc. bestehen aus dem Produkt des betreffenden p in die Anzahl der in derselben Zeile vorkommenden beobachteten Richtungen, und die Q, Q', etc. sind die Summen der p, für welche in der betreffenden Columne beobachtete Richtungen vorhanden sind. Zur Controle kann hier die Bedingungsgleichung

$$P + P_l + P_{ll} + \text{etc.} = Q + Q' + Q'' + \text{etc.}$$

benutzt werden.

136.

Es sind hierauf die folgenden Coefficienten zu berechnen,

(pp) = der Summe der Quotienten $\frac{p^2}{P}$ aller derjenigen Gruppen von Gyris, in welchen die Richtung (1) eingeschnitten worden ist,

(pp') = der Summe der Quotienten $\frac{p^2}{P}$ derjenigen Gruppen, in welchen die Richtungen (1) und (2) beide eingeschnitten worden sind,

(pp'') = der Summe u. s. w. Richtungen (1) und (3) beide u. s. w.

etc.

$(p'p')$ = der Summe u. s. w. Richtung (2) u. s. w.

$(p'p'')$ = der Summe u. s. w. Richtungen (2) und (3) beide u. s. w.

etc.

$(p''p'')$ = der Summe u. s. w. Richtung (3) u. s. w.

etc.

bis alle auf der Station eingeschnittenen Richtungen erschöpft sind. Zur Controle dieser Rechnung dienen die Gleichungen

$$\begin{aligned}(pp) + (pp') + (pp'') + \ldots &= Q\\ (pp') + (p'p') + (p'p'') + \ldots &= Q'\\ (pp'') + (p'p'') + (p''p'') + \ldots &= Q''\\ \text{etc} \qquad\qquad &\text{etc.}\end{aligned}$$

Die allgemeinen Vorbereitungen der Beobachtungen, welche beiden im Vorhergehenden entwickelten Verfahrungsarten gemeinschaftlich sind, können hiemit als beendigt betrachtet werden, und es muss nun jedes Verfahren besonders vorgenommen werden.

137.

Erstes Verfahren.

1) Erster Theil der Auflösung, oder die Ausgleichung auf den Stationen.

α) Wenn auf der Station in jedem Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind.

Die allgemeinen, im Vorhergehenden erklärten, Vorbereitungen fallen bis auf die erste derselben weg, die sich darauf beschränkt, dass man zu den Originalbeobachtungen eines jeden Gyrus eine solche con-

stante Zahl addirt, wodurch die Beobachtungen einer jeden Richtung nahe einander gleich werden, und nahe die Azimuthe darstellen. Man nehme hierauf aus den Beobachtungen einer jeden Richtung das arithmetische Mittel; diese Mittel sind ohne Weiteres die mit $y(r)$ zu bezeichnenden Resultate der Ausgleichung auf solchen Stationen. Nennt man ferner die Anzahl der einzelnen Gyri p, so ist das Gewicht

$$p = (1,1) = (2,2,1) = (3,3,2) = \text{etc.}$$

welche Grössen im zweiten Theile der Auflösung gebraucht werden. Es wird hier überdies

$$(ll,n) = 0$$

Wenn auf einer Station nur zwei Richtungen eingeschnitten worden sind, so tritt immer der gegenwärtige Fall ein, der daher im Folgenden nicht betrachtet zu werden braucht.

β) Wenn auf der Station nicht in jedem, oder in keinem, Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind, so sind vor Allem alle, in den Artt. 134—136 erklärten, Vorbereitungen auszuführen, und darauf die folgenden Berechnungen vorzunehmen.

a) Wenn auf der Station drei Richtungen eingeschnitten worden sind,

rechne man

$$M = \sqrt{(pp')(pp'')(p'p'')}$$

$$N = \frac{M}{(p'p'')}, \quad N' = \frac{M}{(pp'')}, \quad N'' = \frac{M}{(pp')}$$

$$(1,1) = Q + N^2 - (pp)$$

$$(2,2,1) = Q' + N'^2 - (p'p')$$

$$(3,3,2) = Q'' = N''^2 - (p''p'')$$

zu deren Controle man auch

$$(1,1) = N\Sigma N$$

$$(2,2,1) = N'\Sigma N$$

$$(3,3,2) = N''\Sigma N$$

rechnen kann, wo $\Sigma N = N + N'' + N'''$ ist. Hierauf werden

$$w(1) = \frac{(lx)}{(1,1)}$$

$$w(2) = \frac{(lx')}{(2,2,1)}$$

$$w(3) = \frac{(lx'')}{(3,3,2)}$$

zu deren Controle

$$N \cdot w(1) + N' \cdot w(2) + N'' \cdot w(3) = 0$$

dient. Die Grösse (ll) wird am dienlichsten nach dem folgenden Ausdruck berechnet,

$$\begin{aligned}(ll) &= \frac{(pl)^2 + (pl')^2 + (pl'')^2 + \dots}{p} \\ &+ \frac{(p_{,}l_{,})^2 + (p_{,}l_{,}')^2 + (p_{,}l_{,}'')^2 + \dots}{p_{,}} \\ &+ \frac{(p_{,,}l_{,,})^2 + (p_{,,}l_{,,}')^2 + (p_{,,}l_{,,}'')^2 + \dots}{p_{,,}} \\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

dessen Anordnung seinen Grund in dem Inhalt der im Art. 135 erklärten zweiten Tafel findet. Endlich wird

$$\begin{aligned}(ll,3) &= (ll) - (lx) \cdot w(1) - (lx') \cdot w(2) - (lx'') \cdot w(3) \\ &= (ll) - \frac{(lx)^2}{(1,1)} - \frac{(lx')^2}{(2,2,1)} - \frac{(lx'')^2}{(3,3,2)}\end{aligned}$$

Ausser den $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$ werden auch die Coefficienten

$$(1,1)\,, \quad (2,2,1)\,, \quad (3,3,2)$$

im zweiten Theile der Auflösung gebraucht werden

b) Wenn auf der Station vier Richtungen eingeschnitten worden sind.

Die drei Grössen N, N', N'' werden wie unter *a*) berechnet, und ausserdem

$$N''' = \frac{(pp''')}{N}$$

hierauf

$$\begin{array}{ll} (1,1) = Q + N^2 - (pp)\,, & (2,2,1) = Q' + N'^2 - (p'p') \\ & (2,4,1) = N'N''' - (p'p''') \\ \underline{(1,l) = (lx)} \quad , & \underline{(2,l,1) = (lx')} \\ (3,3,2) = Q'' + N''^2 - (p''p'')\,, & (4,4,1) = Q''' + N'''^2 - (p'''p''') \\ (3,4,2) = N''N''' - (p''p''')\,, & \\ (3,l,2) = (lx'') \quad , & (4,l,1) = (lx''') \end{array}$$

Zur Controle dienen hier

$$\begin{aligned} (1,1) &= N\Sigma N \\ (2,2,1) + (2,4,1) &= N'\Sigma N \\ (3,3,2) + (3,4,2) &= N''\Sigma N \\ (2,4,1) + (3,4,2) + (4,4,1) &= N'''\Sigma N \end{aligned}$$

wo $\Sigma N = N + N' + N'' + N'''$ ist. (ll) wird wie unter a) berechnet. Ferner

$$\chi' = -\frac{(1,l)}{(1,1)}$$
$$(ll,1) = (ll) + (1,l)\chi'$$

$$\gamma'' = -\frac{(2,4,1)}{(2,2,1)}, \quad \chi'' = -\frac{(2,l,1)}{(2,2,1)}$$
$$(4,4,2) = (4,4,1) + (2,4,1)\gamma''$$
$$(4,l,2) = (4,l,1) + (2,l,1)\gamma''$$
$$(ll,2) = (ll,1) + (2,l,1)\chi''$$

$$\gamma''' = -\frac{(3,4,2)}{(3,3,2)}, \quad \chi''' = -\frac{(3,l,2)}{(3,3,2)}$$
$$(4,4,3) = (4,4,2) + (3,4,2)\gamma'''$$
$$(4,l,3) = (4,l,2) + (3,l,2)\gamma'''$$
$$(ll,3) = (ll,2) + (3,l,2)\chi'''$$

$$\chi^{IV} = -\frac{(4,l,3)}{(4,4,3)}$$
$$(ll,4) = (ll,3) + (4,l,3)\chi^{IV}$$

$$\beta''' = \gamma''$$

worauf

$$\begin{aligned} -w(1) &= \chi' \\ -w(2) &= \chi'' + \chi^{IV}\beta''' \\ -w(3) &= \chi''' + \chi^{IV}\gamma''' \\ -w(4) &= \chi^{IV} \end{aligned}$$

werden. Zur Controle dient hier

$$N \,.\, w(1) + N' \,.\, w(2) + N'' \,.\, w(3) + N''' \,.\, w(4) = 0$$

Im zweiten Theile der Auflösung werden ausser den $y(1)$, etc. nur

$$(1,1)\,, \quad (2,2,1)\,, \quad (3,3,2)\,, \quad (4,4,3)\,, \quad \beta'''\,, \quad \gamma'''$$

gebraucht.

c) Wenn auf der Station fünf Richtungen eingeschnitten worden sind.

Die drei Grössen N, N', N'' werden wieder wie unter a) berechnet, ausserdem

$$N''' = \frac{(pp''')}{N}\,, \quad N^{IV} = \frac{(pp^{IV})}{N}$$

und hierauf

$$(1,1) = Q + N^2 - (pp) \quad , \quad (2,2,1) = Q' + N'^2 - (p'p')$$
$$(2,4,1) = N'N''' - (p'p''')$$
$$(2,5,1) = N'N^{IV} - (p'p^{IV})$$
$$\underline{(1,l) = (lx)} \qquad \underline{(2,l,1) = (lx')}$$
$$(3,3,2) = Q'' + N''^2 - (p''p'') \,, \quad (4,4,1) = Q''' + N'''^2 - (p'''p''')$$
$$(3,4,2) = N''N''' - (p''p''') \quad , \quad (4,5,1) = N'''N^{IV} - (p'''p^{IV})$$
$$(3,5,2) = N''N^{IV} - (p''p^{IV}) \quad , \quad (4,l,1) = (lx''')$$
$$\underline{(3,l,2) = (lx'')}$$
$$(5,5,1) = Q^{IV} + N^{IV2} - (p^{IV}p^{IV})$$
$$(5,l,1) = (lx^{IV})$$

zu deren Controle die Gleichungen

$$
\begin{array}{rcl}
(1,1) & = & N\Sigma N \\
(2,2,1) + (2,4,1) + (2,5,1) & = & N'\Sigma N \\
(3,3,2) + (3,4,2) + (3,5,2) & = & N''\Sigma N \\
(2,4,1) + (3,4,2) + (4,4,1) + (4,5,1) & = & N'''\Sigma N \\
(2,5,1) + (3,5,2) + (4,5,1) + (5,5,1) & = & N^{IV}\Sigma N
\end{array}
$$

dienen, wo $\Sigma N = N + N' + N'' + N''' + N^{IV}$ ist. (ll) wird immer wie unter a) berechnet. Ferner werden

$$\chi' = -\frac{(1,l)}{(1,1)}$$
$$(ll,1) = (ll) + (1,l)\chi'$$

$$\gamma'' = -\frac{(2,4,1)}{(2,2,1)}, \quad \delta'' = -\frac{(2,5,1)}{(2,2,1)}, \quad \chi'' = -\frac{(2,l,1)}{(2,2,1)}$$

$$
\begin{array}{rcl}
(4,4,2) & = & (4,4,1) + (2,4,1)\gamma'' \\
(4,5,2) & = & (4,5,1) + (2,5,1)\gamma'' \\
(4,l,2) & = & (4,l,1) + (2,l,1)\gamma'' \\
(5,5,2) & = & (5,5,1) + (2,5,1)\delta'' \\
(5,l,2) & = & (5,l,1) + (2,l,1)\delta'' \\
(ll,2) & = & (ll,1) + (2,l,1)\chi''
\end{array}
$$

$$\gamma''' = -\frac{(3,4,2)}{(3,3,2)}, \quad \delta''' = -\frac{(3,5,2)}{(3,3,2)}, \quad \chi''' = -\frac{(3,l,2)}{(3,3,2)}$$

$$
\begin{array}{rcl}
(4,4,3) & = & (4,4,2) + (3,4,2)\gamma''' \\
(4,5,3) & = & (4,5,2) + (3,5,2)\gamma''' \\
(4,l,3) & = & (4,l,2) + (3,l,2)\gamma''' \\
(5,5,3) & = & (5,5,2) + (3,5,2)\delta''' \\
(5,l,3) & = & (5,l,2) + (3,l,2)\delta''' \\
(ll,3) & = & (ll,2) + (3,l,2)\chi'''
\end{array}
$$

$$\delta^{iv} = -\frac{(4,5,3)}{(4,4,3)}, \quad \chi^{iv} = -\frac{(4,l,3)}{(4,4,3)}$$

$$\begin{aligned}
(5,5,4) &= (5,5,3) + (4,5,3)\delta^{iv} \\
(5,l,4) &= (5,l,3) + (4,l,3)\delta^{iv} \\
(ll,4) &= (ll,3) + (4,l,3)\chi^{iv}
\end{aligned}$$

$$\chi^{v} = -\frac{(5,l,4)}{(5,5,4)}$$

$$(ll,5) = (ll,4) + (5,l,4)\chi^{v}$$

$$\beta''' = \gamma'', \quad \beta^{iv} = \delta'' + \delta^{iv}\beta''' \qquad \gamma^{iv} = \delta''' + \delta^{iv}\gamma'''$$

worauf man

$$\begin{aligned}
-w(1) &= \chi' \\
-w(2) &= \chi'' + \chi^{iv}\beta''' + \chi^{v}\beta^{iv} \\
-w(3) &= \chi''' + \chi^{iv}\gamma''' + \chi^{v}\gamma^{iv} \\
-w(4) &= \chi^{iv} + \chi^{v}\delta^{iv} \\
-w(5) &= \chi^{v}
\end{aligned}$$

bekommt, und die Gleichung

$$N \,.\, w(1) + N' \,.\, w(2) + N'' \,.\, w(3) + N''' \,.\, w(4) + N^{iv}\, w(5) = 0$$

zur Controle dient. Ausser den $y(1)$, etc. werden noch die Coefficienten

$$(1,1)\,, \quad (2,2,1)\,, \quad (3,3,2)\,, \quad (4,4,3)\,, \quad (5,5,4)$$
$$\beta''', \quad \gamma''', \quad \beta^{iv}, \quad \gamma^{iv}, \quad \delta^{iv}$$

in dem zweiten Theile der Auflösung gebraucht.

Aus dem Vorhergehenden lässt sich schon vollkommen erkennen, wie verfahren werden muss, wenn auf der Station mehr wie fünf Richtungen eingeschnitten worden sind. Zur deutlicheren Uebersicht will ich jedoch noch die Ausdrücke für die β, γ, etc., die hinzukommen, für zwei Fälle anführen.

d) Wenn auf der Station sechs Richtungen eingeschnitten worden sind,

so kommen zu den vorhergehenden ähnlichen Ausdrücken noch die folgenden hinzu

$$\begin{aligned}
\beta^{v} &= \varepsilon'' + \varepsilon^{iv}\beta''' + \varepsilon^{v}\beta^{iv} \\
\gamma^{v} &= \varepsilon''' + \varepsilon^{iv}\gamma''' + \varepsilon^{v}\gamma^{iv} \\
\delta^{v} &= \varepsilon^{iv} + \varepsilon^{v}\delta^{iv}
\end{aligned}$$

e) Wenn auf der Station sieben Richtungen eingeschnitten worden sind,

so kommen zu den vorhergehenden ähnlichen Ausdrücken noch die folgenden hinzu

$$\begin{aligned} \beta^{vi} &= \zeta'' + \zeta^{iv}\beta''' + \zeta^{v}\beta^{iv} + \zeta^{vi}\beta^{v} \\ \gamma^{vi} &= \zeta''' + \zeta^{iv}\gamma''' + \zeta^{v}\gamma^{iv} + \zeta^{vi}\gamma^{v} \\ \delta^{vi} &= \zeta^{iv} + \zeta^{v}\delta^{iv} + \zeta^{vi}\delta^{v} \\ \varepsilon^{vi} &= \zeta^{v} + \zeta^{vi}\varepsilon^{v} \end{aligned}$$

u. s. w. wenn mehr Richtungen eingeschnitten worden sind.

In Bezug auf die N ist zu bemerken, dass ihre Berechnung unmöglich wird, wenn zufällig eine oder zwei der drei Grössen (pp'), (pp''), $(p'p'')$ Null sind. Aber in diesem Falle kann man durch Aenderung der zuerst angenommenen Reihenfolge der Richtungen immer bewirken, dass die N bestimmbar werden. Auch kann man oftmals dieses dadurch möglich machen, dass man ohne die Reihenfolge der Richtungen zu ändern, die oben mit M bezeichnete Wurzelgrösse aus anderen (pp) bildet*).

Die auf den verschiedenen Stationen erhaltenen Werthe der (ll,n), wo n die Anzahl der auf der Station eingeschnittenen Richtungen bezeichnet, werden addirt, und ihre Summe mit W_0 bezeichnet. Hiebei kann indessen eine Modification eintreten, die im nächsten Artikel erklärt werden wird.

Will man ausserdem noch die Werthe der u, $u_{,}$, $u_{,,}$, etc. kennen lernen, so dienen dazu die Gleichungen (65), die unter den hier stattfindenden Annahmen allgemein ausgedrückt werden können. Bezeichnen wir mit m die laufende Nummer irgend einer der Gruppen von Gyris, und mit $u(m)_{s}$ oder schlechtweg $u(m)$ den derselben zukommenden Werth von u, so bekommen wir allgemein

---

*) So hätte man z. B. im Art. 84 ohne die Richtungen (3) und (4) mit einander zu vertauschen

$$M = \sqrt{(pp')(pp''')(p'p''')}$$

und demzufolge

$$N = \frac{M}{(p'p''')}, \quad N' = \frac{M}{(pp''')}$$
$$N'' = 0 \quad , \quad N''' = \frac{M}{(pp')}$$
$$N^{iv} = \frac{(pp''')}{N}, \quad N^{v} = \frac{(pp')}{N}$$

setzen können, wodurch derselbe Zweck erreicht worden wäre.

$$u(m) = -\frac{p_{m-1}}{P_{m-1}} \Sigma w(r)$$

in welchem Ausdruck aber nur diejenigen $w(r)$ aufgenommen werden dürfen, die in der betr. Gruppe von Gyris wirklich beobachteten Richtungen zukommen. Man kann, wenn man es für nöthig halten sollte, sich dieser Grössen zur Controlirung der, wie oben gezeigt wurde, berechneten Werthe der (ll,n) bedienen, denn man findet aus dem Vorhergehenden leicht, dass auch

$$(ll,n) = \Sigma\Sigma \frac{\{p_{m-1}(u(m) + w(r)) - p_{m-1} l_{m-1}^{r-1}\}^2}{p_{m-1}}$$

ist, wo das eine Summenzeichen sich auf die auf der Station vorhandenen Gruppen von Gyris, und das andere sich auf die vorhandenen Richtungen bezieht.

138.

Im Art. 133 ist des Falles Erwähnung geschehen, in welchem den Beobachtungen verschiedener Stationen verschiedene Gewichte beigelegt werden müssen; dieser soll jetzt in Betracht gezogen werden.

Wenn auf allen Stationen dasselbe Instrument und dieselben Beobachter, oder gleich gute Instrumente und Beobachter von gleicher Qualität verwendet worden sind, so liegt in der Regel kein Grund vor die Beobachtungen irgend einer Station für mehr oder minder genau zu halten als die der andern Stationen, und man kann allenthalben, wie im Vorhergehenden angegeben ist, das Gewicht jeder einzelnen Beobachtung $= 1$ setzen. Sind dagegen auf verschiedenen Stationen Instrumente oder Beobachter verschiedener Qualität verwendet worden, oder ist beides der Fall gewesen, so sind aus diesem Grunde die Gewichte der Beobachtungen dieser Stationen zu modificiren, und überhaupt die Beobachtungen der verschiedenen Stationen in Bezug auf das ihnen beizulegende Gewicht in verschiedene Gattungen zu theilen. Man kann demungeachtet bei der Ausführung der im Vorhergehenden erklärten Rechnungen auf allen Stationen den einzelnen Beobachtungen das Gewicht $= 1$ beilegen, und die einfachen Aenderungen, die vorzunehmen sind, bis zum Beginn des zweiten Theils der Auflösung verschieben. Um diese Aenderungen zu ermitteln kann man auf die folgende Weise verfahren.

Man muss sich eine möglichst grosse Anzahl von unabhängigen Beobachtungen verschiedener Winkel verschaffen, und diese Beobach-

tungen müssen abtheilungsweise mit denselben Instrumenten und denselben Beobachtern, die zur Triangulation verwendet worden sind, ausgeführt worden sein. Wenn die Triangulation von nicht zu kleiner Ausdehnung ist, so können die bei derselben beobachteten Richtungen zu diesem Zwecke dienen.

Aus den Beobachtungen einer jeden Gattung und eines jeden Winkels nehme man das arithmetische Mittel, ziehe dieses von einer jeden einzelnen Beobachtung ab, und berechne daraus auf bekannte Art das Quadrat des mittleren, zu befürchtenden, Fehlers. Man nehme nemlich die Quadrate der eben genannten Unterschiede, addire diese, und dividire deren Summe mit der Anzahl der Beobachtungen weniger der Anzahl der Unbekannten, welche letztere hier für jeden Winkel $= 2$ ist. Aus den so für jede der verschiedenen Gattungen von Beobachtungen erhaltenen Resultaten nehme man wieder die arithmetischen Mittel, worauf die umgekehrten Verhältnisse dieser die Verhältnisse der den verschiedenen Gattungen von Beobachtungen beizulegenden Gewichte geben.

Man habe zum Beispiel bei einer der vorhandenen Gattungen von Beobachtungen für die verschiedenen Winkel die Summen s, s', s'', etc. der Fehlerquadrate erhalten, wobei die Anzahl der Beobachtungen dieser Winkel m, m', m'', etc. seien, dann setze man

$$u = \frac{s}{m-2}\,,\quad u' = \frac{s'}{m'-2}\,,\quad u'' = \frac{s''}{m''-2}\,,\ \text{etc.}$$

und

$$v = \frac{u+u'+u''+\text{ etc.}}{n}$$

wenn n die Anzahl der u bedeutet.

Für eine andere Gattung der vorhandenen Beobachtungen habe man ebenso erhalten

$$u_{,} = \frac{s_{,}}{m_{,}-2}\,,\quad u_{,}' = \frac{s_{,}'}{m_{,}'-2}\,.\quad u_{,}'' = \frac{s_{,}''}{m_{,}''-2}\,,\ \text{etc.}$$

$$v_{,} = \frac{u_{,}+u_{,}'+u_{,}''+\text{ etc.}}{n_{,}}$$

für eine dritte Gattung von Beobachtungen

$$u_{,,} = \frac{s_{,,}}{m_{,,}-2}\,,\quad u_{,,}' = \frac{s_{,,}'}{m_{,,}'-2}\,,\quad u_{,,}'' = \frac{s_{,,}''}{m_{,,}''-2}\,,\ \text{etc.}$$

$$v_{,,} = \frac{u_{,,}-u_{,,}'+u_{,,}''+\text{ etc.}}{n_{,,}}$$

u. s. w. wenn eine grössere Anzahl von Beobachtungsgattungen vorhanden ist. Bezeichnet man nun mit 1, $\pi_{,}$, $\pi_{,,}$, etc. das jeder einzelnen

Beobachtung dieser verschiedenen Beobachtungsgattungen beizulegende Gewicht, so werden

$$\pi_{,} = \frac{\nu}{\nu_{,}}, \quad \pi_{,,} = \frac{\nu}{\nu_{,,}}, \text{ etc.}$$

Je grösser die Anzahl von Beobachtungen ist, die man auf diese Art untersucht hat, desto sicherer wird das vorstehende Resultat.

Ist daher vorläufig bei den Ausgleichungen auf den Stationen, auf jeder derselben das Gewicht der einzelnen Beobachtung $= 1$ gesetzt worden, so bleiben zwar für diejenigen Stationen, auf welchen die Beobachtungsgattung, welcher ν zugehört, vorhanden ist, alle nach den vorangegangenen Ausdrücken berechneten Grössen unverändert, aber auf den Stationen, auf welchen andere Beobachtungsgattungen vorhanden sind, müssen einige der nach dem Vorhergehenden erhaltenen Grössen mit Zahlen $\pi_{,}$, $\pi_{,,}$, etc. multiplicirt werden.

Die Grössen, die dieser Verbesserung bedürfen, sind die Coefficienten

$$(1,1)_s, \; (2,2,1)_s, \; (3,3,2)_s, \text{ etc. und } (ll,n)_s$$

statt deren man in den folgenden Rechnungen die Produkte

$$(1,1)_s.\pi_s, \; (2,2,1)_s.\pi_s, \; (3,3,2)_s.\pi_s, \text{ etc. } (ll,n)_s.\pi_s$$

anwenden muss, wenn π_s denjenigen Werth der $\pi_{,}$, $\pi_{,,}$, etc. bezeichnet, welcher den Beobachtungen der Station s zukommt. Weiter ist aus diesem Grunde keine Aenderung vorzunehmen.

139.

2) Zweiter Theil der Auflösung.

Dieser fängt damit an, dass man die Bedingungsgleichungen, die das Dreiecksnetz darbietet ermittelt und aufstellt; ich verweise dafür auf den Inhalt des Art. 91. In die Bedingungsgleichungen sind die Resultate der Ausgleichungen auf den Stationen, oder mit anderen Worten die Bögen $y(r)_s$ zu substituiren, und die Resultate dieser Substitutionen, nach der Reihenfolge, in welcher man die Bedingungsgleichungen aufgestellt hat, mit

$$F(I), \; F(II), \; F(III), \text{ etc.}$$

zu bezeichnen. Ausserdem sind die Differentiale der Bedingungsgleichungen zu bilden, und die Coefficienten derselben numerisch zu berechnen; ich verweise hiefür auf den Inhalt des Art. 92, und wieder-

hole dabei, dass man die Coefficienten jeder Bedingungsgleichung insgesammt, nebst dem dazu gehörigen F, vor ihrer Anwendung mit jeder beliebigen Zahl multipliciren darf. Man kann diese Eigenschaft dazu benutzen um entweder die Coefficienten der Seitengleichungen, die gewöhnlich ursprünglich grösser sind, als die der Winkelgleichungen, diesen ohngefähr gleich zu machen, oder umgekehrt die Coefficienten der Winkelgleichungen denen der Seitengleichungen ohngefähr gleich zu machen. Diese Coefficienten sind tabularisch zusammen zu stellen, und ihnen die Bezeichnung

$$q(r,I)_s,\quad q(r,II)_s,\quad q(r,III)_s,\ \text{etc.}$$

zu geben, in welcher r die Richtungsnummer, s die Stationsnummer, und I, II, III, etc. die Nummern der Bedingungsgleichungen sind. Der Art. 93 giebt ein Beispiel dieser Zusammenstellung. Es werden ferner

α) Wenn auf der Station alle Richtungen in jedem Gyrus eingeschnitten worden sind,

$$\begin{aligned}
\eta(1,I)_s &= q(1,I)_s\\
\eta(2,I)_s &= q(2,I)_s\\
\eta(3,I)_s &= q(3,I)_s\\
&\text{etc.}\\
Q(1,I)_s &= \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s} = \frac{q(1,I)_s}{p}\\
Q(2,I)_s &= \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s} = \frac{q(2,I)_s}{p}\\
Q(3,I)_s &= \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s} = \frac{q(3,I)_s}{p}\\
f(1,I)_s &= Q(1,I)_s\\
f(2,I)_s &= Q(2,I)_s\\
f(3,I)_s &= Q(3,I)_s\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind durch allmählige Vertauschung der I mit den II, III, etc. auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen, auch ist, wie in allen folgenden ähnlichen Ausdrücken, wo nöthig, auf die im vor. Art. erklärten Zahlen π_s Rücksicht zu nehmen.

β) Wenn auf der Station nicht in jedem, oder in keinem, Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind.

a) Wenn auf der Station drei Richtungen eingeschnitten worden sind,

$$\eta(1,I)_s = q(1,I)_s$$
$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3,I)_s = \eta(3,I)_s$$
$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s = \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s}$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s = \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s}$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s = \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s}$$

die auch, wie eben erklärt, auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen sind.

b) Wenn auf der Station vier Richtungen eingeschnitten worden sind, so werden

$$\eta(1,I)_s = q(1,I)_s$$
$$\eta(2,I)_s = q(2,I)_s$$
$$\eta(3,I)_s = q(3,I)_s$$
$$\eta(4,I)_s = \beta_s'''.q(2,I)_s + \gamma_s'''.q(3,I)_s + q(4,I)_s$$
$$Q(1,I)_s = \frac{\eta(1,I)_s}{(1,1)_s}, \quad Q(2,I)_s = \frac{\eta(2,I)_s}{(2,2,1)_s}$$
$$Q(3,I)_s = \frac{\eta(3,I)_s}{(3,3,2)_s}, \quad Q(4,I)_s = \frac{\eta(4,I)_s}{(4,4,3)_s}$$
$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s + \beta_s'''.Q(4,I)_s$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s + \gamma_s'''.Q(4,I)_s$$
$$f(4,I)_s = Q(4,I)_s$$

die auch auf alle Bedingungsgleichungen auszudehnen sind.

c) Wenn auf der Station fünf Richtungen eingeschnitten worden sind, so kommt zu den unter *b*) angegebenen, mit $\eta(r,I)_s$ bezeichneten Grössen hinzu,

$$\eta(5,I)_s = \beta_s^{IV}.q(2,I)_s + \gamma_s^{IV}.q(3,I)_s + \delta_s^{IV}.q(4,I)_s + q(5,I)_s$$

zu den $Q(r,I)_s$ kommt hinzu

$$Q(5,I)_s = \frac{\eta(5,I)_s}{(5,5,4)_s}$$

und die $f(r,I)_s$ werden nach den folgenden Ausdrücken berechnet,

$$f(1,I)_s = Q(1,I)_s$$
$$f(2,I)_s = Q(2,I)_s + \beta_s'''.Q(4,I)_s + \beta_s^{IV}.Q(5,I)_s$$
$$f(3,I)_s = Q(3,I)_s + \gamma_s'''.Q(4,I)_s + \gamma_s^{IV}.Q(5,I)_s$$
$$f(4,I)_s = Q(4,I)_s + \delta_s^{IV}.Q(5,I)_s$$
$$f(5,I)_s = Q(5,I)_s$$

die selbstverständlich auch auf alle Bedingungsgleichungen ausgedehnt werden müssen. Man erkennt hieraus vollkommen, wie zu verfahren ist, wenn auf der Station mehr wie fünf Richtungen eingeschnitten worden sind.

Auch die numerischen Werthe aller vorstehenden Hülfsgrössen sind zur Erlangung einer klaren Uebersicht tabularisch aufzustellen, wie oben am Beispiel gezeigt worden ist.

140.

Die Berechnung der Coefficienten der Endgleichungen, die nun an die Reihe kommt, kann auf viererlei Weise ausgeführt werden. Bezeichnet man diese Coefficienten mit (I,I), (I,II), etc. (II,II), etc. etc., wo die römischen Zahlen sich wieder auf die Bedingungsgleichungen beziehen, so werden erstens

$$\begin{array}{lll}
(I,I) & = & \Sigma\{Q(1,I)_s \,.\, \eta(1,I)_s + Q(2,I)_s \,.\, \eta(2,I)_s + Q(3,I)_s \,.\, \eta(3,I)_s + \ldots\} \\
(I,II) & = & \Sigma\{Q(1,II)_s \,.\, \eta(1,I)_s + Q(2,II)_s \,.\, \eta(2,I)_s + Q(3,II)_s \,.\, \eta(3,I)_s + \ldots\} \\
(I,III) & = & \Sigma\{Q(1,III)_s \,.\, \eta(1,I)_s + Q(2,III)_s \,.\, \eta(2,I)_s + Q(3,III)_s \,.\, \eta(3,I)_s + \ldots\} \\
 & & \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
(II,II) & = & \Sigma\{Q(1,II)_s \,.\, \eta(1,II)_s + Q(2,II)_s \,.\, \eta(2,II)_s + Q(3,II)_s \,.\, \eta(3,II)_s + \ldots\} \\
(II,III) & = & \Sigma\{Q(1,III)_s \,.\, \eta(1,II)_s + Q(2,III)_s \,.\, \eta(2,II)_s + Q(3,III)_s \,.\, \eta(3,II)_s + \ldots\} \\
 & & \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
(III,III) & = & \Sigma\{Q(1,III)_s \,.\, \eta(1,III)_s + Q(2,III)_s \,.\, \eta(2,III)_s + Q(3,III)_s \,.\, \eta(3,III)_s + \ldots\} \\
 & & \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \\
 & & \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

bis alle Bedingungsgleichungen erschöpft sind. Die zweite Art diese Coefficienten zu berechnen ergiebt sich aus der ersten, wenn man darin die Q und die η mit einander vertauscht. Rechnet man diese Coefficienten auf diese beiden Arten, so wird dadurch nichts weiter controlirt, wie die Divisionen, durch welche man die Q erhält. Die dritte Berechnungsart geschieht durch die folgenden Ausdrücke,

$$\begin{array}{lll}
(I,I) & = & \Sigma\{f(1,I)_s \,.\, q(1,I)_s + f(2,I)_s \,.\, q(2,I)_s + f(3,I)_s \,.\, q(3,I)_s + \ldots\} \\
(I,II) & = & \Sigma\{f(1,I)_s \,.\, q(1,II)_s + f(2,I)_s \,.\, q(2,II)_s + f(3,I)_s \,.\, q(3,II)_s + \ldots\} \\
(I,III) & = & \Sigma\{f(1,I)_s \,.\, q(1,III)_s + f(2,I)_s \,.\, q(2,III)_s + f(3,I)_s \,.\, q(3,III)_s + \ldots\} \\
 & & \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

$$(II,II) = \Sigma\{f(1,II)_s \,.\, q(1,II)_s + f(2,II)_s \, q(2,II)_s + f(3,II)_s \,.\, q(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(II,III) = \Sigma\{f(1,II)_s \,.\, q(1,III)_s + f(2,II)_s \,.\, q(2,III)_s + f(3,II)_s \,.\, q(3,III)_s + \ldots\}$$
etc. etc.
$$(III,III) = \Sigma\{f(1,III)_s \,.\, q(1,III)_s + f(2,III)_s \,.\, q(2,III)_s + f(3,III)_s \,.\, q(3,III)_s + \ldots\}$$
etc. etc.
etc. etc.

und die vierte Art erhält man durch die Vertauschung der f und der q mit einander in den vorstehenden Ausdrücken. Rechnet man diese Coefficienten beides durch die erste und die dritte Art, so werden dadurch nicht blos diese selbst, sondern auch alle Hülfsgrössen des vor. Art. controlirt.

Wie man sieht haben die Ausdrücke für alle hier erforderlichen Grössen die Eigenschaft, dass sie stationsweise berechnet und aufgestellt werden können. Die Grössen des vor. Art. bleiben in Bezug auf die einzelnen Stationen von einander abgesondert, für die Coefficienten dieses Art. müssen die Resultate, die jede Station liefert, addirt werden, wie das Summenzeichen Σ anzeigt.

141.

Die Gleichungen, denen die Coefficienten des vor. Art. angehören, sind, wenn die Unbekannten derselben mit (I), (II), (III), etc. bezeichnet werden, die folgenden,

$$(I,I)(I) + (I,II)(II) + (I,III)(III) + \ldots\ldots = F(I)$$
$$(I,II)(I) + (II,II)(II) + (II,III)(III) + \ldots\ldots = F(II)$$
$$(I,III)(I) + (II,III)(II) + (III,III)(III) + \ldots\ldots = F(III)$$
etc. etc.

und ihre Anzahl ist der Anzahl der Bedingungsgleichungen gleich. Ehe wir an ihre Auflösung gehen ist eine wesentliche Bemerkung einzuschalten.

In jedem Dreiecksnetze von einiger Ausdehnung wird sich ereignen, dass eine Anzahl der Coefficienten der vorstehenden Endgleichungen gleich Null werden, und je grösser das Dreiecksnetz ist, desto mehr wird dieses der Fall sein. Als Folge davon können in diesen Gleichungen mehr oder minder grosse Lücken eintreten, so nemlich, dass in der einen und der andern derselben eine Reihe von aufeinander folgenden Coefficienten Null werden, und hierauf wieder einige vorkommen, die

nicht Null sind. In Bezug auf die Richtigkeit der Auflösung hat dieser Umstand nun nicht den mindesten Einfluss, aber man kann sich desselben bedienen, um die Arbeit, die die Auflösung erfordert, abzukürzen. Zu dem Ende ist nichts weiter zu thun, wie die Reihenfolge, in welcher man die Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes zuerst aufgestellt hat, so zu ändern, dass die Coefficienten, die nicht Null werden, möglichst nach vorne geschoben werden, so dass sie vom ersten anfangend. eine möglichst ununterbrochene Reihe bilden. Es wird hiedurch nicht blos die Auflösung dieser Gleichungen, oder die Ermittelung der Werthe der Unbekannten derselben, sondern auch die Berechnung der Gewichte möglichst abgekürzt.

Wenn es sich nun nur um die Ermittelung der Unbekannten handelt, so braucht man die Nummern, die den Bedingungsgleichungen anfänglich gegeben worden sind, nicht zu ändern, will man aber auch die Gewichte berechnen, so thut man wohl die Nummern der Bedingungsgleichungen so zu ändern, dass sie nach der beschriebenen Versetzung wieder die fortlaufende Zahlenreihe I, II, III, etc. bilden. Ohne diese Aenderung würde man sich leicht in den Gliedern der Ausdrücke der Gewichte, die aufzunehmen sind, irren können. Dass mit dieser Aenderung der Numerirung der Bedingungsgleichungen auch die entsprechende Aenderung in der Bezeichnung der Unbekannten (Numerirung dieser) und der Grössen des vorvor. Art. eintreten muss, versteht sich von selbst.

142.

Die Auflösung der Endgleichungen des vor. Art. ist die bekannte, allein da die im Verlaufe dieser Abhandlung eingeführten Zwischengrössen derselben bei der Berechnung der Gewichte wieder gebraucht werden, so wird es nöthig, die in den Artt. 46 u. 49 gegebene Auflösung in dieser Recapitulation, in den hier eingeführten Bezeichnungen ausgedrückt, mit aufzunehmen. Zu berechnen sind

$$(2)_1 = -\frac{(I,II)}{(I,I)}, \quad (3)_1 = -\frac{(I,III)}{(I,I)}, \quad (4)_1 = -\frac{(I,IV)}{(I,I)}, \quad \ldots \quad \varphi_1 = +\frac{F(I)}{(I,I)}$$

$$\begin{aligned}
(II,II.1) &= (II,II) + (I,II)(2)_1 \\
(II,III,1) &= (II,III) + (I,III)(2)_1 \\
(II.IV,1) &= (II.IV) + (I,IV)(2)_1 \\
&\text{etc.} \\
F(II,1) &= F(II) + F(I)(2)_1
\end{aligned}$$

$$(III,III,1) = (III,III) + (I,III)(3)_1$$
$$(III,IV,1) = (III,IV) + (I,IV)(3)_1$$
etc.
$$F(III,1) = F(III) + F(I)(3)_1$$

$$(IV,IV,1) = (IV,IV) + (I,IV)(4)_1$$
etc.
$$F(IV,1) = F(IV) + F(I)(4)_1$$

etc. bis
$$R_1 = F(I)\varphi_1$$

$$(3)_2 = -\frac{(II,III,1)}{(II,II,1)}, \quad (4)_2 = -\frac{(II,IV,1)}{(II,II,1)}, \; \ldots\ldots \; \varphi_2 = +\frac{F(II,1)}{(II,II,1)}$$
$$(III,III,2) = (III,III,1) + (II,III,1)(3)_2$$
$$(III,IV,2) = (III,IV,1) + (II,IV,1)(3)_2$$
etc.
$$F(III,2) = F(III,1) + F(II,1)(3)_2$$

$$(IV,IV,2) = (IV,IV,1) + (II,IV,1)(4)_2$$
etc.
$$F(IV,2) = F(IV,1) + F(II,1)(4)_2$$

etc. bis
$$R_2 = R_1 + F(II,1)\varphi_2$$

$$(4)_3 = -\frac{(III,IV,2)}{(III,III,2)}, \; \ldots\ldots \; \varphi_3 = +\frac{F(III,2)}{(III,III,2)}$$
$$(IV,IV,3) = (IV,IV,2) + (III,IV,2)(4)_3$$
etc.
$$F(IV,3) = F(IV,2) + F(III,2)(4)_3$$

etc. bis
$$R_3 = R_2 + F(III,2)\varphi_3$$

$$\ldots\ldots \; \varphi_4 = +\frac{F(IV,3)}{(IV,IV,3)}$$
etc. bis
$$R_4 = R_3 + F(IV,3)\varphi_4$$

etc. bis F_q

wenn q die Anzahl der Endgleichungen bezeichnet.

Diese Coefficienten habe ich so angesetzt, wie ich die Berechnung derselben auszuführen pflege, und die mir die einfachste Weise zu sein scheint. Allein man kann diesen Ausdrücken dadurch, dass man die

Grössen $(III,III,1)$, $(III,IV,1)$, etc., die nur als Hülfsgrössen zur Berechnung derjenigen Coefficienten, die später gebraucht werden, dienen, eliminirt, scheinbar eine kürzere Form geben, die obgleich sie bei der numerischen Rechnung keinen Vortheil gewährt, doch die Uebersicht, namentlich wenn von den ursprünglichen Coefficienten (I,II), (I,III), etc. (II,III), etc. etc. eine Anzahl gleich Null sind, erleichtert. Diese Form ist die folgende, in welcher alle Coefficienten für fünf Gleichungen vollständig ausgeschrieben worden sind, und die weggelassenen etc. Zeichen leicht ergänzt werden können.

$$(II,II,1) = (II,II) + (I,II)(2)_1$$

$$(II,III,1) = (II,III) + (I,III)(2)_1$$
$$(III,III,2) = (III,III) + (I,III)(3)_1 + (II,III,1)(3)_2$$

$$(II,IV,1) = (II,IV) + (I,IV)(2)_1$$
$$(III,IV,2) = (III,IV) + (I,IV)(3)_1 + (II,IV,1)(3)_2$$
$$(IV,IV,3) = (IV,IV) + (I,IV)(4)_1 + (II,IV,1)(4)_2 + (III,IV,2)(4)_3$$

$$(II,V,1) = (II,V) + (I,V)(2)_1$$
$$(III,V,2) = (III,V) + (I,V)(3)_1 + (II,V,1)(3)_2$$
$$(IV,V,3) = (IV,V) + (I,V)(4)_1 + (II,V,1)(4)_2 + (III,V,2)(4)_3$$
$$(V,V,4) = (V,V) + (I,V)(5)_1 + (II,V,1)(5)_2 + (III,V,2)(5)_3 + (IV,V,3)(5)_4$$

$$F(II,1) = F(II) + F(I)(2)_1$$
$$F(III,2) = F(III) + F(I)(3)_1 + F(II,1)(3)_2$$
$$F(IV,3) = F(IV) + F(I)(4)_1 + F(II,1)(4)_2 + F(III,2)(4)_3$$
$$F(V,4) = F(V) + F(I)(5)_1 + F(II,1)(5)_2 + F(III,2)(5)_3 + F(IV,3)(5)_4$$
$$R_5 = F(I)\varphi_1 + F(II,1)\varphi_2 + F(III,2)\varphi_3 + F(IV,3)\varphi_4 + F(V,4)\varphi_5$$

Es wird nun zunächst die vollständige Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler, wenn sie mit W bezeichnet wird,

$$W = W_0 + R_q$$

wo W_0 die Summe ist, deren Berechnung im Art. 137, und bez. im Art. 138 gezeigt wurde, und q wieder die Anzahl der Bedingungsgleichungen bedeutet. Die obigen Endgleichungen sind ferner durch die obigen Rechnungen in die folgenden verwandelt worden,

$$\begin{aligned}
(I,I)(I) + (I,II)(II) + (I,III)(III) + \ldots &= F(I)\\
(II,II,1)(II) + (II,III,1)(III) + \ldots &= F(II,1)\\
(III,III,2)(III) + \ldots &= F(III,2)\\
\text{etc.} \qquad &\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

deren Auflösung durch die folgenden Ausdrücke bewirkt wird, die hier auch für fünf Gleichungen vollständig ausgeschrieben worden sind,

$$\begin{aligned}
(I)_1 &= \varphi_1 + \varphi_5 . (5)_1 \\
(II)_1 &= \varphi_2 + \varphi_5 . (5)_2 \\
(III)_1 &= \varphi_3 + \varphi_5 . (5)_3 \\
(IV)_1 &= \varphi_4 + \varphi_5 . (5)_4 \\
\hline
(I)_2 &= (I)_1 + (IV)_1 . (4)_1 \\
(II)_2 &= (II)_1 + (IV)_1 . (4)_2 \\
(III)_2 &= (III)_1 + (IV)_1 . (4)_3 \\
\hline
(I)_3 &= (I)_2 + (III)_2 . (3)_1 \\
(II)_3 &= (II)_2 + (III)_2 . (3)_2 \\
\hline
(I)_4 &= (I)_3 + (II)_3 . (2)_1 \\
\hline
(I) &= (I)_4 \\
(II) &= (II)_3 \\
(III) &= (III)_2 \\
(IV) &= (IV)_1 \\
(V) &= \varphi_5
\end{aligned}$$

und leicht zu erkennen geben, wie zu verfahren ist, wenn mehr wie fünf Gleichungen vorhanden sind.

Man kann die richtige Ausführung der numerischen Auflösung dadurch prüfen, dass man die erhaltenen Werthe der Unbekannten (I), (II), (III), etc. in die ursprünglichen Endgleichungen substituirt, die dadurch erfüllt werden müssen.

Schliesslich bekommt man die $z(r)_s$ durch den folgenden allgemeinen Ausdruck,

$$z(r)_s = f(r,I)_s . (I) + f(r,II)_s . (II) + f(r,III)_s . (III) + \ldots .$$

und den wahrscheinlichsten Werth der Richtungen $x(r)_s$ durch den folgenden,

$$x(r)_s = y(r)_s - z(r)_s$$

womit die Auflösung der Aufgabe beendigt ist.

Eine umfassende Controle des ganzen zweiten Theils der Auflösung entspringt aus der Eigenschaft, dass die $z(r)_s$, wenn sie mit umgekehrtem Zeichen statt der $\delta x(r)_s$ in die Bedingungsgleichungen substituirt werden, diesen Gnüge leisten müssen. Nur die Differentialquotienten

$q(r,I)_s$, $q(r,II)_s$, etc. bleiben dadurch uncontrolirt, von deren Richtigkeit man sich daher auf andere Art überzeugen muss.

Will man ausserdem auch die wahrscheinlichsten Werthe der $u(m)_s$ kennen lernen, so dient dazu der Ausdruck

$$u(m)_s = \frac{p_{m-1}}{P_{m-1}} \Sigma'(z(m)_s - w(r)_s)$$

in welchem aber nur diejenigen $z(m)_s$ und $w(r)_s$ aufgenommen werden dürfen, die in der m^{ten} Gruppe von Gyris wirklich beobachtet worden sind. Durch Zuziehung dieser Werthe der $u(m)_s$ kann man auf ähnliche Art, wie im Art. 137 in Bezug auf die Ausgleichungen auf den Stationen gezeigt wurde, den wie oben berechneten Werth von W einer Controle unterwerfen, wenn man dieses für nöthig halten sollte.

143.

3) Berechnung des Gewichts irgend einer bestimmten Function der Richtungen.

Jeder bestimmten Function der Richtungen kommt ein bestimmtes Gewicht zu, welches durch die unten folgenden Ausdrücke berechnet werden kann. Unter den Functionen der Richtungen, deren Gewichte verlangt werden können, sind vorzugsweise beliebige Winkel und Seiten des Dreiecksnetzes zu verstehen, und diese können zwischen irgend zwei beliebigen Eckpunkten des Netzes gedacht werden; auch kann es sich ereignen, dass die Gewichte einiger der Aggregate $u(m)_s + x(r)_s$ verlangt werden. Die Winkel sowohl wie diese Aggregate sind an sich linearische Functionen der Richtungen, und es sind daher in solchen Fällen in dieser Beziehung keine Vorbereitungen zu treffen, aber da die Seiten keine linearischen Functionen der Richtungen sind, so muss aus dem betreffenden Ausdruck die Differentialgleichung zwischen der Veränderung der Seite und den Veränderungen der sie bestimmenden Richtungen abgeleitet, und die Coefficienten dieser müssen der ferneren Rechnung unterworfen werden. Für die Berechnung dieser Coefficienten verweise ich auf den Art. 103, wo sie ausführlich erklärt worden ist. Bezeichnet man nun allgemein die Veränderung der Seite, oder des Winkels, oder des Aggregats, wie oben, mit Ω, die unbestimmten Aenderungen der in Betracht kommenden Richtungen mit $\delta x(r)_s$, und die Coefficienten dieser Veränderungen mit $k(r)_s$, so ist der allgemeine Ausdruck für Ω,

$$\Omega = \Sigma\Sigma' k(r)_s . \delta x(r)_s$$

wo das eine Summenzeichen sich auf r, und das andere sich auf s bezieht, da sehr wohl die Richtungen von mehreren Stationen in Betracht kommen können.

α) Wenn auf einer oder mehreren der in Betracht kommenden Stationen in jedem Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind, so setze man für diese überhaupt

$$(M,r)_s = k(r)_s, \quad Q(M,r)_s = \frac{k(r)_s}{p}$$

β) Wenn auf den in Betracht kommenden Stationen sich solche befinden, auf welchen nicht in jedem, oder in keinem, Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind, und zwar

a) Wenn drei Richtungen eingeschnitten worden sind, so sind zu setzen,

$$(M,1)_s = k(1)_s$$
$$(M,2)_s = k(2)_s$$
$$(M,3)_s = k(3)_s$$

b) Wenn vier Richtungen eingeschnitten worden sind, so sind zu setzen und zu berechnen,

$$(M,1)_s = k(1)_s$$
$$(M,2)_s = k(2)_s$$
$$(M,3)_s = k(3)_s$$
$$(M,4)_s = \beta_s'''.k(2)_s + \gamma_s'''.k(3)_s + k(4)_s$$

c) Wenn fünf Richtungen eingeschnitten sind, so kommt zu den unter b) angeführten Grössen noch die folgende hinzu,

$$(M,5)_s = \beta_s^{IV}.k(2)_s + \gamma_s^{IV}.k(3)_s + \delta_s^{IV}.k(4)_s + k(5)_s$$

u. s. w. wenn Stationen in Betracht kommen, auf welchen mehr wie fünf Richtungen eingeschnitten worden sind. Setzt man hierauf zur Abkürzung, die unter α) ähnlich bezeichneten Grössen wo nöthig eingeschlossen,

$$Q(M,1)_s = \frac{(M,1)_s}{(1,1)_s}, \quad Q(M,2)_s = \frac{(M,2)_s}{(2,2,1)_s}, \quad Q(M,3)_s = \frac{(M,3)_s}{(3,3,2)_s}, \text{ etc.}$$

so wird sogleich

$$R = \Sigma\{Q(M,1)_s.(M,1)_s + Q(M,2)_s.(M,2)_s + Q(M,3)_s.(M,3)_s + \ldots\}$$

womit der erste Theil des gesuchten Gewichts gegeben ist. Um den zweiten Theil desselben zu erhalten, sind zuerst zu berechnen,

$$(I,M) = \Sigma\{Q(M,1)_s.\eta(1,I)_s + Q(M,2)_s.\eta(2,I)_s + Q(M,3)_s.\eta(3,I)_s + \ldots\}$$
$$(II,M) = \Sigma\{Q(M,1)_s.\eta(1,II)_s + Q(M,2)_s.\eta(2,II)_s + Q(M,3)_s.\eta(3,II)_s + \ldots\}$$
$$(III,M) = \Sigma\{Q(M,1)_s.\eta(1,III)_s + Q(M,2)_s.\eta(2,III)_s + Q(M,3)_s.\eta(3,III)_s + \ldots\}$$

u. s. w. bis alle Bedingungsgleichungen des Dreiecksnetzes erschöpft sind. Aus den vorstehenden Grössen ergeben sich die folgenden,

$$\begin{array}{lcll}
(II,M,1) & = & (II,M) & + (I,M)(2)_1 \\
(III,M,1) & = & (III,M) & + (I,M)(3)_1 \\
(IV,M,1) & = & (IV,M) & + (I,M)(4)_1 \\
\text{etc.} & & \text{etc.} & \\
(III,M,2) & = & (III,M,1) & + (II,M,1)(3)_2 \\
(IV,M,2) & = & (IV,M,1) & + (II,M,1)(4)_2 \\
\text{etc.} & & \text{etc.} & \\
(IV,M,3) & = & (IV,M,2) & + (III,M,2)(4)_3 \\
\text{etc.} & & \text{etc.} & \\
\text{etc.} & & \text{etc.} &
\end{array}$$

statt deren man sich auch der folgenden Ausdrücke bedienen kann,

$$\begin{array}{lcl}
(II,M,1) & = & (II,M) + (I,M)(2)_1 \\
(III,M,2) & = & (III,M) + (I,M)(3)_1 + (II,M,1)(3)_2 \\
(IV,M,3) & = & (IV,M) + (I,M)(4)_1 + (II,M,1)(4)_2 + (III,M,2)(4)_3 \\
& & \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

Nachdem man durch das eine oder das andere dieser beiden Systeme von Gleichungen die Grössen linker Hand berechnet hat, ergiebt sich

$$S = \frac{(I,M)^2}{(I,I)} + \frac{(II,M,1)^2}{(II,II,1)} + \frac{(III,M,2)^2}{(III,III,2)} + \frac{(IV,M,3)^2}{(IV,IV,3)} + \ldots$$

und das gesuchte Gewicht P wird

$$P = \frac{1}{R-S}$$

In Bezug auf die Berechnung der Hülfsgrössen $(II,M,1)$, $(III,M,2)$, etc. aus den (I,M), (II,M), (III,M), etc. kann zu mehrerer Deutlichkeit bemerkt werden, dass sie genau dieselbe ist wie die, wodurch die Grössen $F(II,1)$, $F(III,2)$, etc. der Endgleichungen im Art. 142 aus den $F(I)$, $F(II)$, $F(III)$, etc. berechnet wurden, wobei die Hülfsgrössen $(2)_1$, $(3)_1$, etc. $(3)_2$, etc. etc. unverändert dieselben bleiben.

144.

Zweites Verfahren.

Da dieses Verfahren, dessen Erklärung im Art. 108 anfängt, sich nur wenig vom ersten unterscheidet, so kann ich mich bei der Aufstellung der anzuwendenden Ausdrücke kurz fassen. Der Hauptunterschied zwischen den beiden Verfahren besteht darin, dass bei dem gegenwärtig in Rede stehenden auf jeder Station die Richtung, die man als die erste bezeichnet hat, gänzlich aus der Rechnung weggelassen wird, und statt dessen die Unterschiede zwischen den übrigen Richtungen und dieser eintreten. Eine Folge davon ist, dass der dieser ersten Richtung bei der Bildung der Stationstäfelchen beigelegte beiläufige Werth zum definitiven wird, oder dass für jeden Werth von s

$$x(1)_s = y(1)_s = (1)_s\,,\ \text{und}\ w(1)_s = z(1)_s = 0$$

werden. Eine andere Folge davon ist, dass man die Verbesserungen der genannten Unterschiede der Richtungen so betrachten kann, als wären sie die Verbesserungen dieser Richtungen selbst, und also überhaupt

$$(r)_s\,,\qquad w(r)_s\,,\qquad y(r)_s\,,\qquad z(r)_s\,,\qquad x(r)_s\,,$$

statt

$$(r)_s-(1)_s\,,\ w(r)_s-w(1)_s\,,\ y(r)_s-y(1)_s\,,\ z(r)_s-z(1)_s\,,\ x(r)_s-x(1)_s\,,$$

schreiben darf.

Dass die Vorbereitungen der Beobachtungen, die in den Artt. 134—136 erklärt wurden, gegenwärtig dieselben sind, wurde schon dort angeführt, aber auch die Aenderungen der $(2,2,1)_s$, $(3,3,2)_s$, etc. $(ll,n)_s$, wenn auf verschiedenen Stationen verschiedene Gattungen von Beobachtungen angenommen werden müssen, bleiben dieselben, die im Art. 138 erklärt wurden; es braucht also in den folgenden Zusammenstellungen darauf keine Rücksicht genommen zu werden, sondern es kann auf diese angezogenen Artikel verwiesen werden.

145.

1) Erster Theil der Auflösung, oder die Ausgleichung auf den Stationen.

α) Wenn auf der Station in jedem Gyrus alle Richtungen eingeschnitten worden sind.

Die Vorbereitung ist ganz dieselbe als beim ersten Verfahren in diesem speciellen Falle, und die Werthe der $y(r)$ sind wieder den arith-

metischen Mitteln aus den Beobachtungen der einzelnen Gyri gleich. Auch wird hier wieder

$$(ll,n) = 0$$

wenn wie früher n die Anzahl **aller** eingeschnittenen Richtungen bezeichnet. Aber die übrigen Abkürzungen, die das erste Verfahren darbietet, fallen hier weg. Die Gleichungen, die der erste Theil der Auflösung enthält sind zu bilden, und aufzulösen. Nur werden diese Gleichungen in dem hier betrachteten Falle einfacher, wie ausserdem. Nennt man wie früher, das Gewicht der einzigen Gruppe von Gyris, die jetzt auf der Station vorhanden ist, p, so werden die aufzulösenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
p\frac{n-1}{n}w(2) - \frac{p}{n}w(3) - \frac{p}{n}w(4) - \text{etc.} &= 0\\
-\frac{p}{n}w(2) + p\frac{n-1}{n}w(3) - \frac{p}{n}w(4) - \text{etc.} &= 0\\
-\frac{p}{n}w(2) - \frac{p}{n}w(3) + p\frac{n-1}{n}w(4) - \text{etc.} &= 0\\
\text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

deren Anzahl $n-1$ ist*).

Die Werthe der Unbekannten $w(2)$, $w(3)$, etc., die diese Gleichungen geben, werden zwar Null, aber die Werthe der Coefficienten

$$(2,2,1),\ (3,3,2),\ \text{etc. } \beta'',\ \beta''',\ \gamma''',\ \text{etc. etc.}$$

die aus der Auflösung hervorgehen, treten im zweiten Theil der Auflösung unserer Aufgabe eben so ein, wie in den unten folgenden Fällen. Man findet leicht, dass die analytischen Ausdrücke dieser Coefficienten im gegenwärtigen Falle die folgenden sind,

$$\begin{aligned}
(2,2,1) &= p\frac{n-1}{n}\\
(3,3,2) &= p\frac{n-2}{n-1}\\
(4,4,3) &= p\frac{n-3}{n-2}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

---

*) Man bekommt nemlich hier

$$\begin{aligned}
&Q' = Q'' = Q''' = \text{etc.} = p\\
&(p'p') = (p'p'') = \text{etc.} = (p''p'') = \text{etc.} = \text{etc.} = \frac{p}{n}\\
&(lx') = (lx'') = \text{etc.} = 0
\end{aligned}$$

und daher zufolge des Art. 108

$$\begin{aligned}
&(2,2) = (3,3) = \text{etc.} = (2,2,1) = (3,3,1) = \text{etc.} = p\frac{n-1}{n}\\
&(2,3) = (2,3,1) = \text{etc.} = \text{etc.} = -\frac{p}{n}
\end{aligned}$$

$$\beta'' = \frac{1}{n-1}$$
$$\beta''' = \gamma''' = \frac{1}{n-2}$$
$$\beta^{v} = \gamma^{v} = \delta^{v} = \frac{1}{n-3}$$
etc.

die für jeden Werth von n gelten*).

β) Wenn auf der Station nicht in jedem Gyrus, oder in keinem, alle Richtungen eingeschnitten worden sind,

so sind alle im Vorhergehenden a. a. O. erklärten Vorbereitungen eben so auszuführen wie beim ersten Verfahren, und darauf die folgenden Berechnungen vorzunehmen, die der Zahl der überhaupt eingeschnitte-

*) Ich führe noch an, dass die Unbekannten der obigen Gleichungen, wenn man auf der rechten Seite derselben bez. m', m'', m''', etc. statt Null schreibt, die folgenden einfachen Ausdrücke haben,

$$w(2) = \frac{2m'+m''+m'''+\ldots}{p}$$
$$w(3) = \frac{m'+2m''+m'''+\ldots}{p}$$
$$w(4) = \frac{m'+m''+2m'''+\ldots}{p}$$
etc.

die sich auf sehr einfache Weise beweisen lassen. Wenn man daher, statt die arithmetischen Mittel aus den Beobachtungen zu nehmen, und diese den $y(r)$ gleich zu setzen, die vollständigen Vorbereitungen, die im Vorhergehenden erklärt sind, in Bezug auf den gegenwärtigen Fall ausführt; demzufolge die vorläufigen Werthe (1), (2), (3), etc. der Richtungen annimmt, für alle n Richtungen die m, m', m'', etc. die Unterschiede zwischen den Summen der Beobachtungen und den entsprechenden Vielfachen der (1), (2), (3), etc. bedeuten lässt, und diese so vorbereitet, dass

$$m + m' + m'' + m''' + \ldots = 0$$

wird, so werden die Ausdrücke der Unbekannten,

$$w(2) = \frac{m'-m}{p}$$
$$w(3) = \frac{m''-m}{p}$$
$$w(4) = \frac{m'''-m}{p}$$
etc.

Hiemit lässt sich leicht in Betreff des gegenwärtig in Rede stehenden Verfahrens der Beweis führen, dass diese Arbeiten überflüssig sind, und dass man eben so wie im ersten Verfahren sogleich die arithmetischen Mittel aus den Beobachtungen für die Werthe der $y(r)$ annehmen kann, wie oben verlangt wurde; die Berücksichtigung der oben genannten Coefficienten kann beim gegenwärtigen Verfahren aber nicht vermieden werden.

nen Richtungen entsprechend, entweder abzukürzen, oder weiter auszudehnen sind.

Es sind zuerst zu berechnen

$$\begin{aligned}
(2,2,1) &= Q' - (p'p') \\
(2,3,1) &= \quad - (p'p'') \\
(2,4,1) &= \quad - (p'p''') \\
&\text{etc.} \\
(2,l,1) &= (lx') \\
\hline
(3,3,1) &= Q'' - (p''p'') \\
(3,4,1) &= \quad - (p''p''') \\
&\text{etc.} \\
(3,l,1) &= (lx'') \\
\hline
(4,4,1) &= Q''' - (p'''p''') \\
&\text{etc.} \\
(4,l,1) &= (lx''') \\
\hline
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

(ll) wie oben Art. 137 ohne Ausnahme.

In der Berechnung von (ll) sind nemlich die pl, die zur ersten Richtung gehören mit aufzunehmen, dieses und, in den Vorbereitungen, die Mitverwendung derselben zum arithmetischen Mittel aus der Summe der Beobachtungen einer jeden Gruppe von Gyris sind aber bei dem gegenwärtig in Rede stehenden Verfahren die einzigen Fälle, in welchen Grössen die dieser Richtung angehören, in die Rechnungen eintreten. Aus den obigen Coefficienten entstehen nun die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
(2,2,1)w(2) + (2,3,1)w(3) + (2,4,1)w(4) + \ldots &= (2,l,1) \\
(2,3,1)w(2) + (3,3,1)w(3) + (3,4,1)w(4) + \ldots &= (3,l,1) \\
(2,4,1)w(2) + (3,4,1)w(3) + (4,4,1)w(4) + \ldots &= (4,l,1) \\
\text{etc.} \qquad\qquad\qquad & \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

von welchen die unter α) erhaltenen einen speciellen Fall bilden. Die Auflösung dieser Gleichungen ist durch die folgenden Ausdrücke auszuführen,

$$\beta'' = -\frac{(2,3,1)}{(2,2,1)}, \quad \gamma'' = -\frac{(2,4,1)}{(2,2,1)}, \quad \delta'' = -\frac{(2,5,1)}{(2,2,1)}, \text{ etc. } \chi'' = -\frac{(2,l,1)}{(2,2,1)}$$

$$\begin{aligned}
(3,3,2) &= (3,3,1) + (2,3,1)\beta'' \\
(3,4,2) &= (3,4,1) + (2,4,1)\beta'' \\
(3,5,2) &= (3,5,1) + (2,5,1)\beta'' \\
&\text{etc.} \\
(3,l,2) &= (3,l,1) + (2,l,1)\beta''
\end{aligned}$$

$$(4,4,2) = (4,4,1) + (2,4,1)\gamma''$$
$$(4,5,2) = (4,5,1) + (2,5,1)\gamma''$$
etc.
$$(4,l,2) = (4,l,1) + (2,l,1)\gamma''$$

$$(5,5,2) = (5,5,1) + (2,5,1)\delta''$$
etc.
$$(5,l,2) = (5,l,1) + (2,l,1)\delta''$$

---

etc. bis
$$(ll,2) = (ll) + (2,l,1)\chi''$$

$$\gamma''' = -\frac{(3,4,2)}{(3,3,2)}, \quad \delta''' = -\frac{(3,5,2)}{(3,3,2)}, \text{ etc. } \chi''' = -\frac{(3,l,2)}{(3,3,2)}$$
$$(4,4,3) = (4,4,2) + (3,4,2)\gamma'''$$
$$(4,5,3) = (4,5,2) + (3,5,2)\gamma'''$$
etc.
$$(4,l,3) = (4,l,2) + (3,l,2)\gamma'''$$

$$(5,5,3) = (5,5,2) + (3,5,2)\delta'''$$
etc.
$$(5,l,3) = (5,l,2) + (3,l,2)\delta'''$$

---

etc. bis
$$(ll,3) = (ll,2) + (3,l,2)\chi'''$$

$$\delta^{iv} = -\frac{(4,5,3)}{(4,4,3)}, \text{ etc. } \chi^{iv} = -\frac{(4,l,3)}{(4,4,3)}$$
$$(5,5,4) = (5,5,3) + (4,5,3)\delta^{iv}$$
etc.
$$(5,l,4) = (5,l,3) + (4,l,3)\delta^{iv}$$

---

etc. bis
$$(ll,4) = (ll,3) + (4,l,3)\chi^{iv}$$

$$\ldots\ldots \chi^{v} = -\frac{(5,l,4)}{(5,5,4)}$$
etc. bis
$$(ll,5) = (ll,4) + (5,l,4)\chi^{v}$$

---

etc. bis (ll,n)

Ferner sind zu berechnen

$$\beta''' = \gamma'' + \gamma'''\beta'' \quad \Big| \quad \begin{aligned} \beta^{iv} &= \delta'' + \delta'''\beta'' + \delta^{iv}\beta''' \\ \gamma^{iv} &= \delta''' + \delta^{iv}\gamma''' \end{aligned} \quad \Big| \quad \begin{aligned} \beta^{v} &= \varepsilon'' + \varepsilon'''\beta'' + \varepsilon^{iv}\beta''' + \varepsilon^{v}\beta^{iv} \\ \gamma^{v} &= \varepsilon''' + \varepsilon^{iv}\gamma''' + \varepsilon^{v}\gamma^{iv} \\ \delta^{v} &= \varepsilon^{iv} + \varepsilon^{v}\delta^{iv} \end{aligned}$$

etc.

worauf man

$$\begin{array}{rlllll}
-w(2) = & \chi'' & + \chi'''\beta'' & + \chi^{iv}\beta''' & + \chi^{v}\beta^{iv} & + \ldots \\
-w(3) = & & \chi''' & + \chi^{iv}\gamma''' & + \chi^{v}\gamma^{iv} & + \ldots \\
-w(4) = & & & \chi^{iv} & + \chi^{v}\delta^{iv} & + \ldots \\
-w(5) = & & & & \chi^{v} & + \ldots \\
\text{etc.} & & & & \text{etc.} &
\end{array}$$

erhält. Wenn auf der Station drei Richtungen eingeschnitten worden sind, so kommt im zweiten Theile der Auflösung ausser den $y(r)$ und den Divisoren

$$(2,2,1),\ (3,3,2)$$

ohne Ausnahme noch die Grösse

$$\beta''$$

in Betracht. Wenn vier Richtungen eingeschnitten worden sind, so kommen ausser den $y(r)$ und den Divisoren

$$(2,2,1),\ (3,3,2),\ (4,4,3)$$

noch die Grössen

$$\beta'',\ \beta''',\ \gamma'''$$

in Betracht. Wenn fünf Richtungen eingeschnitten worden sind, so kommen ausser den $y(r)$ und den Divisoren

$$(2,2,1),\ (3,3,2),\ (4,4,3),\ (5,5,4)$$

noch die Grössen

$$\beta'',\ \beta''',\ \gamma''',\ \beta^{iv},\ \gamma^{iv},\ \delta^{iv}$$

in Betracht, u. s. w. Man erhält schliesslich, mit Ausnahme der $y(1)_{\prime}$

$$y(r)_{\prime} = (r)_{\prime} + w(r)_{\prime}$$

Die Summe W_0 sowohl wie die $u(m)_{\prime}$ werden eben so berechnet, wie bei dem ersten Verfahren, wobei nur zu bemerken ist, dass hier immer die $w(1)_{\prime} = 0$ sind.

146.

2) Zweiter Theil der Auflösung.

Die Bedingungsgleichungen werden wieder eben so vorbereitet wie bei dem ersten Verfahren, nur werden in denselben alle

$$\delta(1)_{\prime} = 0$$

$$f(r,II,1)_s = f(r,II)_s + f(r,I)_s \,.\, (2)_1$$
$$f(r,III,1)_s = f(r,III)_s + f(r,I)_s \,.\, (3)_1$$
$$f(r,IV,1)_s = f(r,IV)_s + f(r,I)_s \,.\, (4)_1$$
etc.

$$f(r,III,2)_s = f(r,III,1)_s + f(r,II,1)_s \,.\, (3)_2$$
$$f(r,IV,2)_s = f(r,IV,1)_s + f(r,II,1)_s \,.\, (4)_2$$
etc.

$$f(r,IV,3)_s = f(r,IV,2)_s + f(r,III,2)_s \,.\, (4)_3$$
etc.

die auch auf dieselbe Weise aufgestellt werden können, wie die analogen Grössen des Art. 143, nemlich

$$f(r,II,1)_s = f(r,II)_s + f(r,I)_s \,.\, (2)_1$$
$$f(r,III,2)_s = f(r,III)_s + f(r,I)_s \,.\, (3)_1 + f(r,II,1)_s \,.\, (3)_2$$
$$f(r,IV,3)_s = f(r,IV)_s + f(r,I)_s \,.\, (4)_1 + f(r,II,1)_s \,.\, (4)_2 + f(r,III,2)_s \,.\, (4)_3$$
etc. etc.

und jedenfalls fortgesetzt werden müssen bis alle Bedingungsgleichungen erschöpft sind. Es wird hierauf

$$\mu(r)_s = \frac{f(r,I)_s^2}{(I,I)} + \frac{f(r,II,1)_s^2}{(II,II,1)} + \frac{f(r,III,2)_s^2}{(III,III,2)} + \frac{f(r,IV,3)_s^2}{(IV,IV,3)} + \ldots$$

und

$$P = \frac{1}{\pi(r)_s - \mu(r)_s},$$

wenn wieder P das gesuchte Gewicht bezeichnet.

§. 7. Berechnung der mittleren Fehler der durch das vorhergehende Verfahren erhaltenen Resultate.

149.

Es sind mehrere Ausdrücke zur Berechnung des sogenannten wahrscheinlichen Fehlers einer Bestimmung vorhanden, aber von diesen nur der folgende in allgemeinem Gebrauch,

$$\text{wahrscheinl. Fehler} = 0.67445 \sqrt{\frac{W}{m}}$$

wo W die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig gebliebenen Fehler, und m die Anzahl der Bestimmungen oder Beobachtungen bedeuten. Ausserdem hat Gauss noch den Begriff des mittleren zu befürchtenden Fehlers, den man häufig auch schlechtweg

den mittleren Fehler nennt, aufgestellt, und durch den folgenden Ausdruck definirt,

$$\text{mittl. z. bef. Fehler} = \sqrt{\frac{W}{m-n}}$$

wo W und m dieselbe Bedeutung haben wie vorher, und n die Anzahl der von einander unabhängigen Unbekannten bezeichnet.

Ohne mich in eine Discussion der inneren Gründe einzulassen, auf welchen diese beiden Ausdrücke beruhen, will ich blos die numerischen Werthe, die daraus in verschiedenen Fällen hervorgehen, mit einander vergleichen.

Je grösser m bei unverändert angenommenem Werthe von n wird, desto mehr nähern sich die Werthe der beiden Ausdrücke einander, die beide, wenn $m = \infty$ wird, den Werth Null geben. Bei sehr grossem m in Bezug auf n können daher schon die Resultate beider Ausdrücke für einander gleich erachtet werden. Während dieses an der oberen Grenze stattfindet, bildet sich an der unteren Grenze ein ganz davon verschiedenes Verhalten. Betrachten wir, um dieses zu zeigen, den extremen Fall $m = n$, nemlich den Fall, in welchem die Anzahl der vorhandenen Beobachtungen oder Bestimmungen der Anzahl der von einander unabhängigen Unbekannten gleich wird. Die Methode der kleinsten Quadrate schliesst diesen Fall nicht aus, denn die Gleichungen und sonstigen Ausdrücke, auf welche sie führt, finden in demselben, wie man oben gesehen hat, ohne Abänderung volle Anwendung. Es müssen daher auch die beiden hier aufgestellten Ausdrücke des wahrscheinlichen und des mittleren Fehlers ihre volle Geltung behalten.

Da aber jetzt allen vorhandenen Beobachtungen vollkommen Gnüge geleistet wird, so bekommt man $W = 0$, und folglich wird nach dem ersten Ausdruck auch der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung $= 0$, welches gewiss unrichtig ist. Im Ausdruck des mittleren Fehlers hingegen wird nicht nur $W = 0$, sondern auch $m = n$, und der Ausdruck giebt daher in diesem Falle den mittleren Fehler $= \frac{0}{0}$, das ist unbestimmt. Dieses ist das richtige Resultat, denn in dem Falle, der jetzt betrachtet wird, kann man weder den wahrscheinlichen noch den mittleren Fehler bestimmen, sie bleiben daher beide unbestimmt.

Aus diesem Grunde muss in den Fällen, in welchen m nicht viel grösser ist wie n, der Ausdruck des mittleren Fehlers eine genauere Bestimmung gewähren, wie der des wahrscheinlichsten Fehlers, und da,

wie wir gesehen haben, beide Ausdrücke bei wachsendem m zu gleichen Werthen hinstreben, so ist in allen Fällen die Berechnung des mittleren Fehlers der des wahrscheinlichen vorzuziehen.

150.

Aus den vorstehenden Gründen soll in der Anwendung auf unsere Hauptaufgabe nur die Bestimmung des mittleren Fehlers durch den Ausdruck

$$m.f. = \sqrt{\frac{W}{m-n}}$$

betrachtet werden. Die Berechnung der Grösse W ist schon oben gezeigt worden, und daher hier nur die Berechnung von m und n zu erklären. Da die Resultate der Einstellungen der Richtungen auf den verschiedenen Stationen mit l nebst angehängten Strichen bezeichnet worden sind, so ist klar dass

$m =$ der Anzahl aller vorhandenen l ist.

Die Unbekannten unserer Aufgabe sind einestheils die Richtungen x, und anderntheils die u, die der Anzahl der überhaupt vorhandenen Gruppen von Gyris gleich sind. Da aber auf jeder Station nur die Unterschiede der Richtungen von Einer derselben fest bestimmbar sind, so ist von der Summe der x und der u die Anzahl der Stationen abzuziehen, und da die hieraus hervorgehende Anzahl von Unbekannten durch die Bedingungsgleichungen von einander in Abhängigkeit stehen, so ist noch die Anzahl der Bedingungsgleichungen davon abzuziehen. Die so erhaltene Zahl ist n. Bezeichnet man nun durch ein der Bezeichnung der betr. Grösse vorgesetztes A die Anzahl aller Grössen dieser Gattung, so dass

(Al) die Anzahl aller l,
(Ax) die Anzahl aller x,
(Au) die Anzahl aller u, folglich die Anzahl aller Gruppen von Gyris,
(As) die Anzahl aller Stationen,
(Ab) die Anzahl aller Bedingungsgleichungen

bedeuten, so wird, wenn zur Abkürzung

$$D = (Al) + (As) + (Ab) - (Ax) - (Au)$$

gesetzt wird, der

$$m.f. = \sqrt{\frac{W}{D}}$$

*) und da dieser Ausdruck den mittleren Fehler einer Beobachtung der Gattung giebt, deren Gewicht = 1 gesetzt worden ist, so giebt er in seiner Anwendung auf das eben ausgeführte Hauptbeispiel den *m. f.* einer einzelnen Beobachtung einer Richtung, indem das Gewicht einer solchen Beobachtung = 1 angenommen worden ist.

151.

Wenden wir nun den eben abgeleiteten Ausdruck auf dieses Beispiel an, so erhalten wir aus dem Art. 95

$$W = 212.636$$

Die Anzahl der l ist auf den Stationen		und die Anzahl der Gruppen von Gyris
(1)	57	21
(2)	21	8
(3)	9	4
(4)	9	4
(5)	6	3
	$(Al) = 102$	$(Au) = 40$

und ferner sind

$$(Ax) = 19\,, \quad (As) = 5\,, \quad (Ab) = 6$$

folglich $D = 54$, und hieraus bekommt man den

m. f. einer einzelnen Beobachtung
einer Richtung = 1″984

---

*) Man kann bemerken, dass dieser Ausdruck in den von GAUSS in seinem Supplementum theoriae comb. etc. für den dort behandelten speciellen Fall gegebenen übergeht, wenn man die erforderlichen Bedingungen einführt. Der Gaussische Ausdruck, in die hier eingeführte Bezeichnung übersetzt, ist

$$m.\,f. = \sqrt{\frac{W}{(Ab)}}$$

und die Bedingungen des von GAUSS behandelten Falles sind

$$(Au) = (As)\,, \quad (Ax) = (Al)$$

Führt man diese in die Ausdrücke des Textes ein, so wird

$$D = (Ab)$$

und der vorstehende Ausdruck geht daraus hervor.

Will man auch die mittleren Fehler der Resultate, für welche oben die Gewichte berechnet worden sind, kennen lernen, so dient dazu der Ausdruck

$$m.f. = \frac{F}{\sqrt{P}}$$

wenn F den mittleren Fehler der Beobachtungen, denen das Gewicht $= 1$ beigelegt worden ist, — hier den oben gefundenen $m.f.$ —, und P das Gewicht des betr. Resultats aus den Beobachtungen bezeichnen. In den Artt. 97 bis 103 ergaben sich für

den Winkel	(3)(1)(5)	das Gewicht	=	13.46
» »	$(b)(1)(a)$	» »	=	21.29
» »	(5)(2)(3)	» »	=	34.8
» »	(5)(3)(2)	» »	=	15.58
das Aggregat	$u(1)_3+x(1)_3$	» »	=	67.37
» »	$u(8)_2+x(4)_2$	» »	=	50.00
die Seite	(1)(3)	» »	=	341.2

und der vorstehende Ausdruck giebt daher der Reihe nach die

$$\begin{aligned} m.f. &= 0''541 \\ &= 0.430 \\ &= 0.336 \\ &= 0.503 \\ &= 0.242 \\ &= 0.281 \\ &= 0^m1107\,^{*)} \end{aligned}$$

*) Gauss hat in seiner eben angezogenen Abhandlung in Bezug auf seine Triangulation berechnet und gefunden, den

$m.f.$ der Seite

Falkenberg-Breithorn $= 0^m1209$

und ich habe später für dieselbe Triangulation nach den obigen Formeln berechnet und gefunden, den

$m.f.$ des Winkels

Wilsede, Falkenberg, Wulfsode $= 0''385$

und den

$m.f.$ des Winkels

Hauselberg, Wulfsode, Falkenberg $= 0''353$.

152.

Ausserdem ist im Art. 130 noch das Gewicht der Seite (1)(2) unter zwei Annahmen berechnet worden. In der Annahme der einzig gemessenen Grundlinie (1)(3) wurde dasselbe = 738.0, und in der Annahme, dass die zwei Grundlinien (1)(3) und (2)(4) gemessen worden seien = 4105 gefunden. Wendet man den obigen Ausdruck hierauf an, so findet man für die Seite (1)(2) im ersten Falle den

$$m.\,f. = 0^m0730$$

und in dem zweiten Falle den

$$m.\,f. = 0^m0130$$

Das Hinzukommen einer zweiten Grundlinie hat also die Genauigkeit dieser Seite um mehr wie das Doppelte vergrössert.

Ich bemerke hiezu, dass strenge genommen für den Fall der zwei Grundlinien der *m. f.* einer Richtung von Neuem hätte berechnet werden müssen, da wegen des Hinzukommens von noch einer Bedingungsgleichung der Nenner D des bez. Ausdrucks sich um eine Einheit vergrössert. Da dieses jedoch hier nur einen unbedeutenden Einfluss auf das obige Resultat hätte äussern können, so habe ich keine Rücksicht darauf genommen, und der oben angegebene zweite *m. f.* der Seite (1)(2) ist ein Weniges grösser, wie er strenge genommen sein würde.

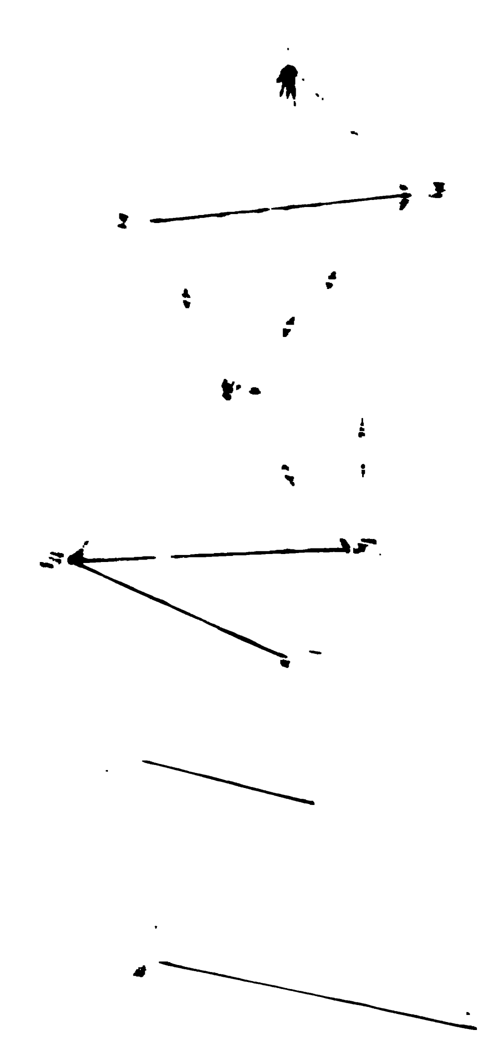
§. 8. Nachtrag zu der »Geodätische Untersuchungen« betitelten Abhandlung.

153.

Ich bin darauf aufmerksam gemacht worden, dass in der in der Ueberschrift angezogenen Abhandlung kein Verfahren angegeben ist, durch welches man mit erforderlicher Sicherheit in einem schon ausgeglichenen Dreiecksnetze lange geodätische Linien bestimmen könne. Es ist richtig, dass dort kein Verfahren für diesen Zweck beschrieben ist, aber die dort gelösten Hauptaufgaben bilden die Grundlagen, nicht nur dazu, sondern auch zu vielen andern Aufgaben, und es würde zu weit geführt haben, wenn ich diese alle hätte mit aufnehmen wollen.

Ich will indess hier die Auflösung der eben genannten Aufgabe geben, obgleich sie so nahe liegt, dass Jeder sie sich hätte entwickeln können.

Die folgende Figur soll irgend ein Dreiecksnetz darstellen, in welchem die Winkel schon ausgeglichen sind, und in dem die Endpunkte mit den Zahlen 1 bis 11 bezeichnet sind.



[illegible]

überflüssig, und sollten sie in der Anwendung in einzelnen Fällen nützlich werden können, so kann man sie ohne Weiteres auch aufzeichnen und anwenden.

154.

Ich nehme nun an, dass an den Punkten (1) und (7) dieses Dreiecksnetzes die Polhöhen und das Azimuth einer der dort zusammenlaufenden Dreiecksseiten astronomisch bestimmt sei, und man die Polhöhe von (1), so wie das Azimuth der geodätischen Linie (1)(7) am Punkte (1) auf den Punkt (7) geodätisch übertragen wolle, um diese Grössen mit dem am Punkte (7) astronomisch bestimmten zu vergleichen.

Zu dem Ende ziehe man die geodätische Linie (1)(4), und betrachte das sphäroidische Dreieck (1)(2)(4), in welchem die Seiten (1)(2) und (2)(4) nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt sind. Man berechne dieses Dreieck erst beiläufig, indem man es als sphärisch oder gar als eben betrachtet, wozu die Anwendung von höchstens fünfstelligen Logarithmen mehr wie ausreichend ist. Man erhält hiemit hinreichend genaue Data um nach den Ausdrücken des Art. 128 der angezogenen Abhandlung die Unterschiede zwischen den sphäroidischen und den sphärischen Winkeln mit erforderlicher Genauigkeit berechnen zu können. Durch den bez. Unterschied verwandele man den sphäroidischen Winkel (1)(2)(4) in den bez. sphärischen, und berechne hierauf durch die sphärische Trigonometrie die Seite (1)(4) und die beiden anliegenden Winkel mit hinreichender Schärfe. Die gefundene Seite bedarf keiner Verbesserung, aber die beiden mit berechneten Winkel werden durch die oben genannten vorher berechneten Unterschiede auf ihre Werthe auf den Sphäroid hingeführt.

In dem Dreiecke (1)(5)(4) sind nun wieder zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt, und nachdem dieses auf die nemliche Art behandelt worden ist, werden im Dreiecke (1)(5)(7) zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt, aus welchen auf die nemliche Art die verlangte geodätische Linie (1)(7) nebst den beiden anliegenden sphäroidischen Winkeln erhalten werden.

Aus der Polhöhe des Punkts (1) und dem Azimuth der Linie (1)(7) an diesem Punkte, welches man auch durch die vorbeschriebene Rechnung aus dem daselbst astronomisch bestimmten Azimuth einer Dreiecks-

seite erhält, nebst der gefundenen Länge der geodätischen Linie kann man nun durch die erste Hauptaufgabe der angezogenen Abhandlung (cf. Art. 10 u. f.) für den Endpunkt (7) die Polhöhe, den Längenunterschied mit (1), und das Azimuth von (1)(7) berechnen, und mit den astronomischen Bestimmungen dieser Grössen vergleichen.

Man kann dieses auch auf andere Weise ausführen. Durch die zweite Hauptaufgabe der angezogenen Abhandlung (cf. Art. 51 u. f.) kann man aus den Polhöhen der Punkte (1) und (7) und dem Längenunterschiede derselben die Länge der geodätischen Linie (1)(7) und die Azimuthe an ihren Endpunkten berechnen, und diese mit den anderweitig gefundenen Werthen derselben vergleichen.

Endlich kann man auch den Inhalt des vierten Abschnittes der angezogenen Abhandlung anwenden, und (cf. Art. 154 u. f.) aus der wie beschrieben gefundenen Länge der geodätischen Linie (1)(7) und den astronomisch bestimmten Polhöhen dieser Endpunkte den Längenunterschied derselben so wie die Azimuthe von (1)(7) berechnen, und diese mit den anderweitig erhaltenen Werthen dieser drei Grössen vergleichen.

Die a. a. O. entwickelten Auflösungen dieser drei Aufgaben sind unbeschränkt anwendbar, wie lang auch die Linie (1)(7) sei, und welche Lage sie auch auf dem Erdsphäroid habe.

155.

Zum Inhalt des vor. Art. sind einige Bemerkungen aufzustellen.

In der Anwendung wird man in der Regel nicht mit einer so geringen Anzahl von Dreiecken zur Berechnung der aufgegebenen geodätischen Linie ausreichen wie in diesem fingirten Dreiecksnetze der Fall ist, sondern eine grössere Anzahl derselben berechnen müssen.

Die Anzahl der zu berechnenden Dreiecke wird man oftmals dadurch kleiner machen können, dass man die Diagonalen der Vier- oder Mehrecke mit benutzt, die zur Ausgleichung des Dreiecksnetzes mit eingeschnitten worden sind; auch kann man zum vorliegenden Zweck Diagonalen berechnen und benutzen, die bei den Messungen nicht mit eingeschnitten worden sind.

Man kann in jedem Dreiecksnetze die hier in Rede stehenden Rechnungen auf verschiedene Arten, nemlich durch Benutzung anderer Dreieckspunkte, wie die oben angegebenen, ausführen.

In den ersten zu berechnenden Dreiecken, die von allen immer die kleinsten sind, kann man einen Schritt weiter gehen, wie im vor. Art. beschrieben ist. Man kann die Winkel derselben, nachdem sie vom sphäroidischen auf sphärische hingeführt worden sind, hierauf auf ebene hinführen, und das bez. Dreieck alsdann als ein ebenes berechnen, worauf die Winkel des Resultats wieder erst auf sphärische, und darauf auf sphäroidische hinzuführen sind.

In den ersten kleineren Dreiecken wird gemeiniglich die Reduction der sphäroidischen Winkel auf sphärische so klein, dass man sie übergehen kann, aber so wie die Seiten, und damit auch die Dreiecke selbst grösser werden, können diese Reductionen sehr merklich werden.

Das Verfahren des vor. Art. ist nicht unbegrenzt anwendbar, denn die Ausdrücke des Art. 128 der angezogenen Abhandlung hören auf ausreichend genau zu sein, wenn die Dreiecksseiten eine gewisse Grösse übersteigen, die ohngefähr auf 20^0 festgesetzt werden kann.

156.

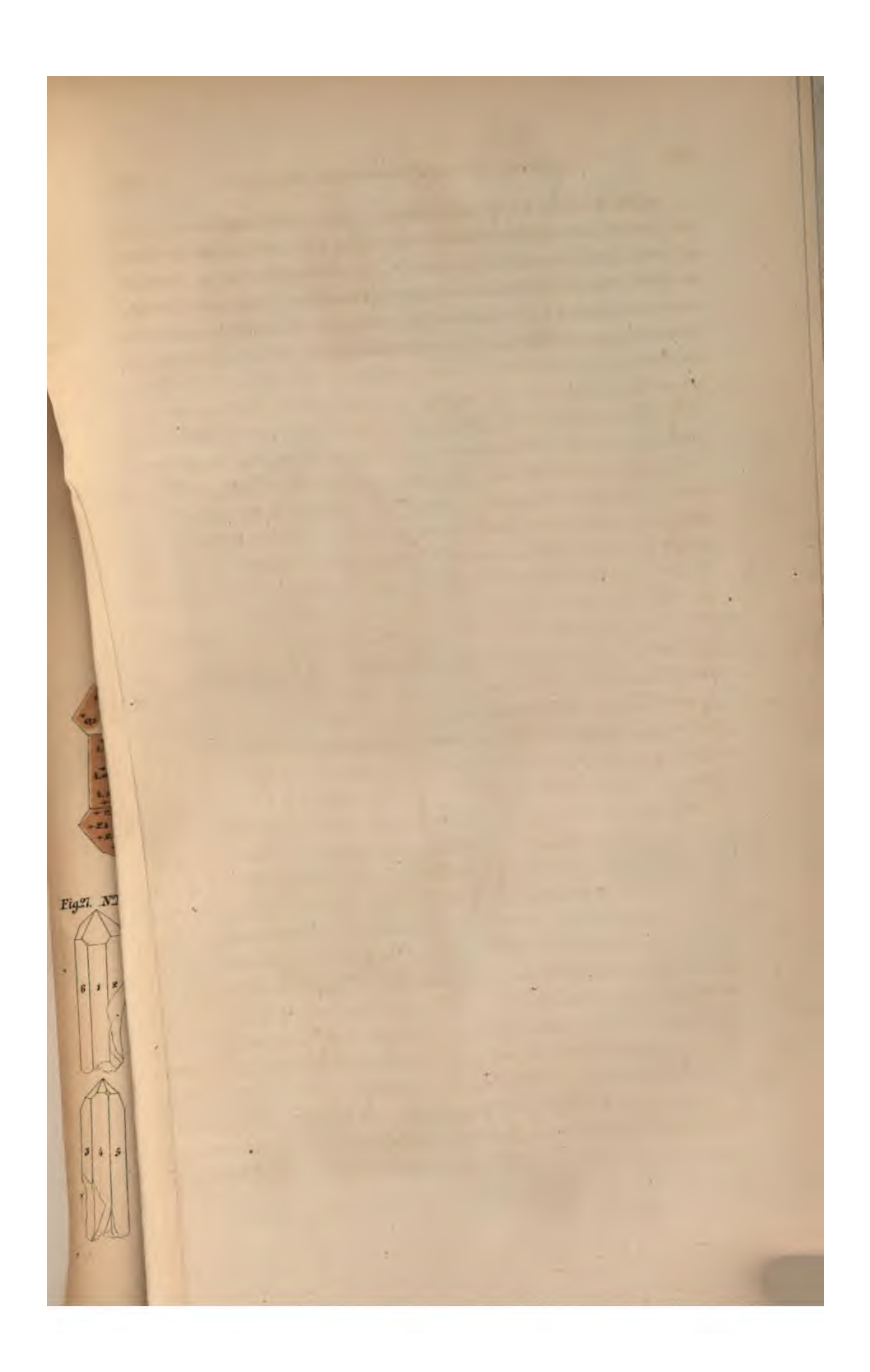
Um zu zeigen, wie man verfahren kann, wenn die zu berechnende geodätische Linie die eben genannte Grösse erreicht oder übersteigt, kehren wir zu dem im Art. 153 verzeichneten Dreiecksnetze zurück und nehmen an, dass die geodätische Linie (1)(11) nebst den anliegenden Winkeln zu berechnen sei, und dass diese die angeführte Grenze übersteige. Man kann nun in einem Zwischenpunkte, für welchen die betreffenden Linien die angeführte Grenze nicht erreicht haben, z. B. in (7), abbrechen, und diesen zum Ausgangspunkt neuer geodätischer Linien annehmen. Aus dem Dreiecke (5)(8)(10) kann man die Linie (8)(10) nebst den anliegenden Winkeln berechnen, und erhält hierauf durch das Dreieck (7)(10)(11) die Linie (7)(11) nebst den anliegenden Winkeln.

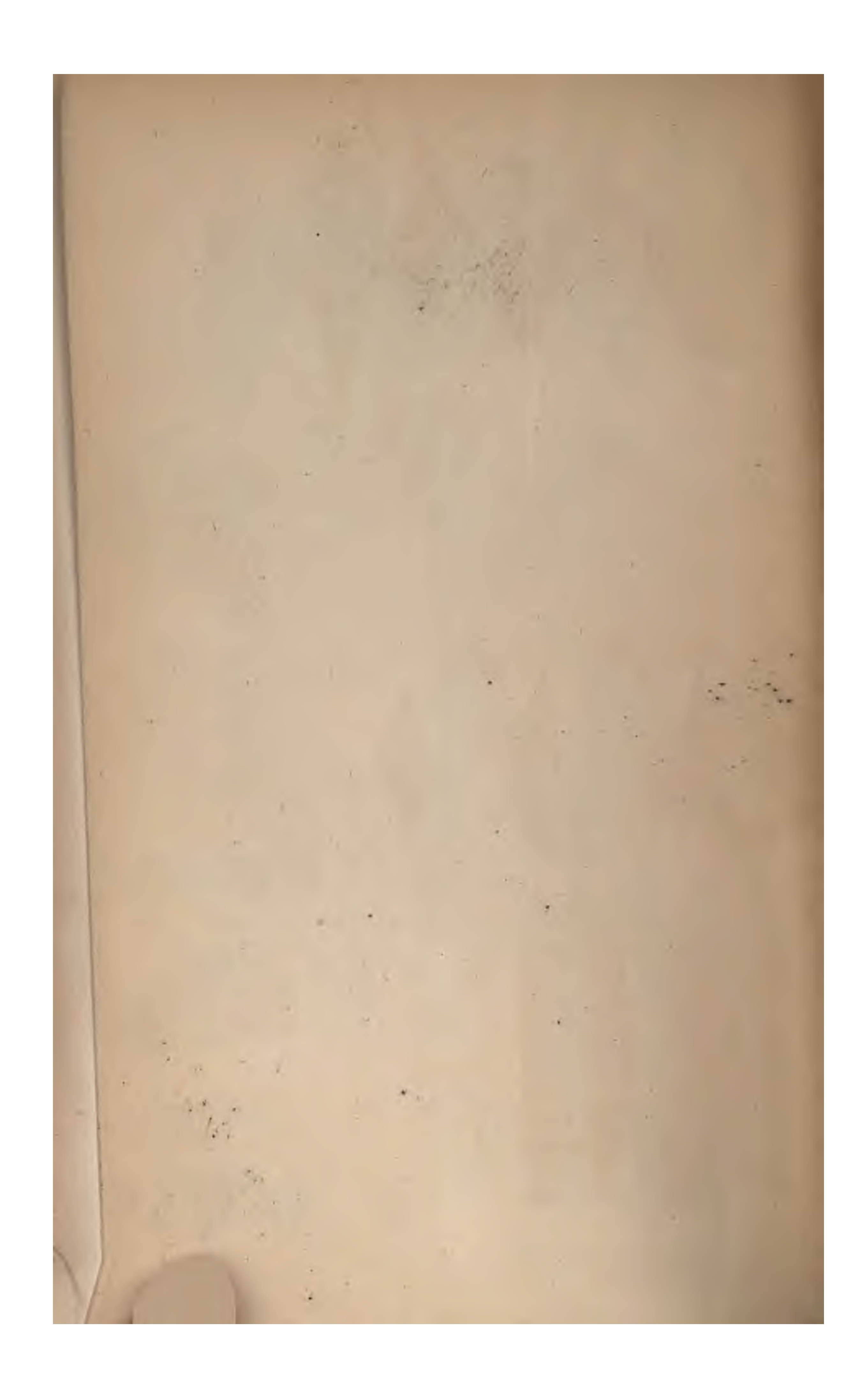
Da nun, um (1)(11) zu erhalten, das sphäroidische Dreieck (1)(7)(11) zu berechnen ist, und man durch die vorhergehend angeführten Regeln die Polhöhe von (7) und die Azimuthe der Linien (1)(7) und (7)(11) an diesem Punkt berechnen kann, so lässt sich durch Anwendung der Aufgabe des Art. 74 u. f. der angezogenen Abhandlung das Dreieck (1)(7)(11) vollständig berechnen, wie gross es auch sei, da die Auflösung, die ich von der zuletzt genannten Aufgabe gegeben habe, keiner Beschränkung unterworfen ist.

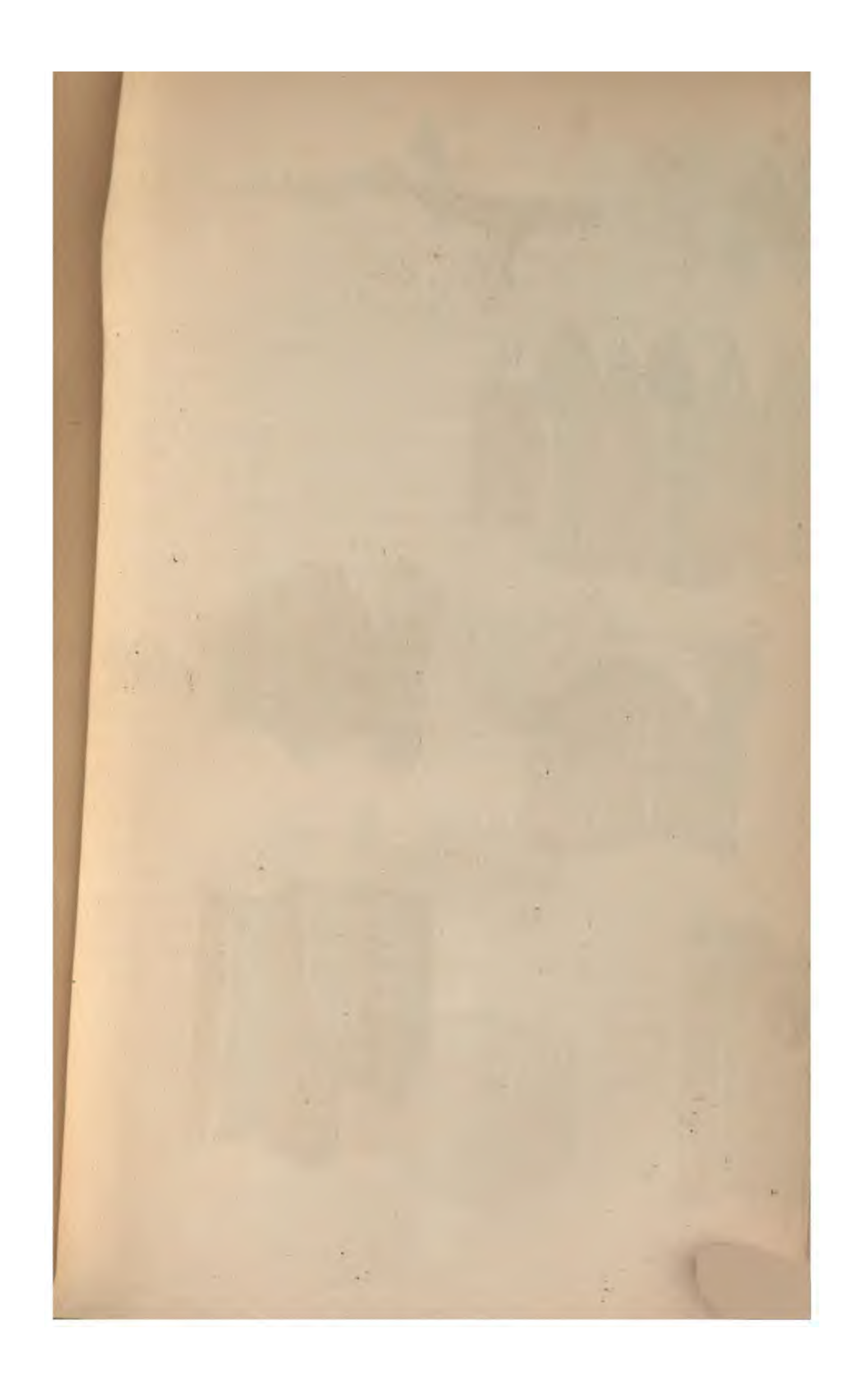
Wäre die Linie (1)(11) noch länger, so kann man, statt Eines, mehrere Zwischenpunkte annehmen, und die somit entstehenden grossen sphäroidischen Dreiecke immer durch die zuletzt angeführte Aufgabe mit jeder wünschenswerthen Genauigkeit berechnen. Man sieht hieraus, dass die in diesem § gestellte Aufgabe in dem Inhalt der oft angezogenen Abhandlung in möglichst grosser Ausdehnung und mit jeder wünschenswerthen Genauigkeit ihre Auflösung findet.

Druckfehler.

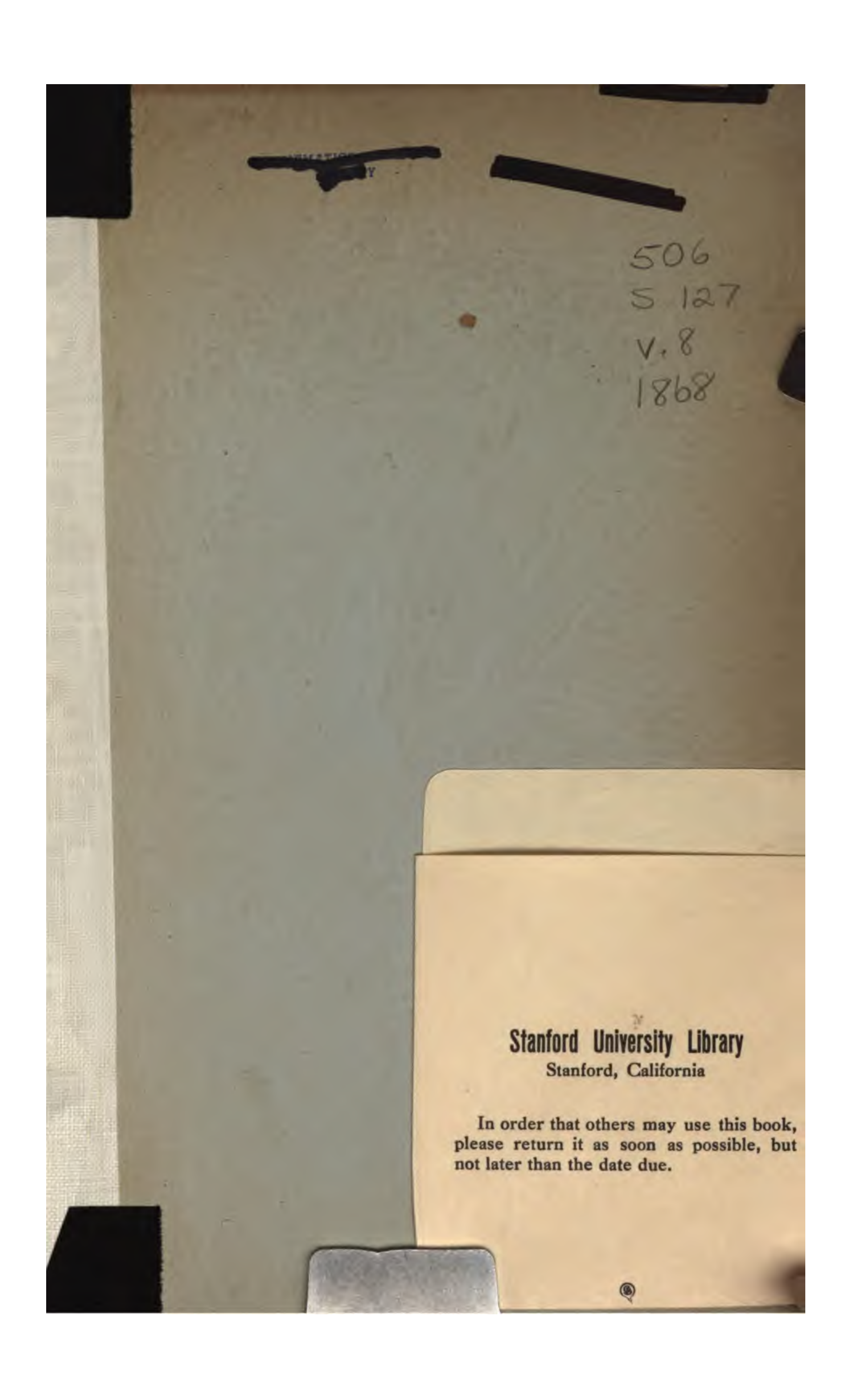
Pag. 801 Z. 10 v. o. lies 0^m0310 statt 0^m0130


Fig.27.









506
S 127
v. 8
1868
Stanford University Library
Stanford, California
In order that others may use this book, please return it as soon as possible, but not later than the date due.

